SCC0251
Processamento de Imagens

Transformada de Fourier

Professora Leo Sampaio Ferraz Ribeiro

Slide para não esquecer de passar a lista

Júpiter - Sistema de Gestão Acadêmica da Pró-Reitoria de Graduação

Lista de Presença

Unidade: 55 Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Disciplina: SCC0251 Processamento de Imagens
Turma: 2025101 - Teórica
Período: 24/02/2025 - 07/07/2025
Disciplina COM 2ª Avaliação.

Horário	Prof(a).
qua 08:10 09:50	Leo Sampaio Ferraz Ribeiro
sex 08:10 09:50	Leo Sampaio Ferraz Ribeiro

NºUSP	Ingr.	Curso	Nome	dia __/__/___	dia __/__/___	dia __/__/___
14712657	28/02/2024	55041	Allan Vitor de Souza Silva			
13687196	11/02/2022	55071	Amabile Pietrobon Ferreira			
13687108	23/02/2022	55090	Arthur Hiratsuka Rezende			
12691964	13/03/2023	55041	Arthur Pin			
13671532	11/02/2022	55041	Arthur Queiroz Moura			
12745212	03/05/2021	97001	Asafe Henrique de Oliveira Franca			
12542481	16/04/2021	55041	Bernardo Maia Coelho			
12733212	29/04/2021	55041	Bernardo Rodrigues Tameirao Santos			
14745682	13/03/2023	55071	Bruno Batista Pereira da Silva			
13672220	25/03/2022	55041	Camila Donda Ronchi			
12542630	18/03/2021	55041	Carlos Filipe de Castro Lemos			
14746015	24/02/2025	55090	Diego Gladcheff Munhoz			
12556973	25/02/2022	55041	Eduarda Fritzen Neumann			
14568142	27/01/2023	55090	Enzo Castelo Branco Biondi			
13781841	07/03/2022	55041	Enzo Yasuo Hirano Harada			
12547423	13/03/2023	55041	Fabricio Sampaio			

Introdução

Transformações matemáticas são usadas para obter informações não disponíveis ou não visíveis diretamente nos dados originais

Podem ser vista como uma mapeamento entre diferentes domínios. Apesar dos valores em diferentes domínios serem diferentes eles representam os mesmos dados

Introdução

$$(-22.00257, -47.89855)$$

Introdução

$$(-22.00257, -47.89855)$$

São Carlos, SP
Avenida Trabalhador Sãocarlense, 400

Introdução

$$(-22.00257, -47.89855)$$

São Carlos, SP
Avenida Trabalhador Sãocarlense, 400

Entrada principal da USP de São Carlos

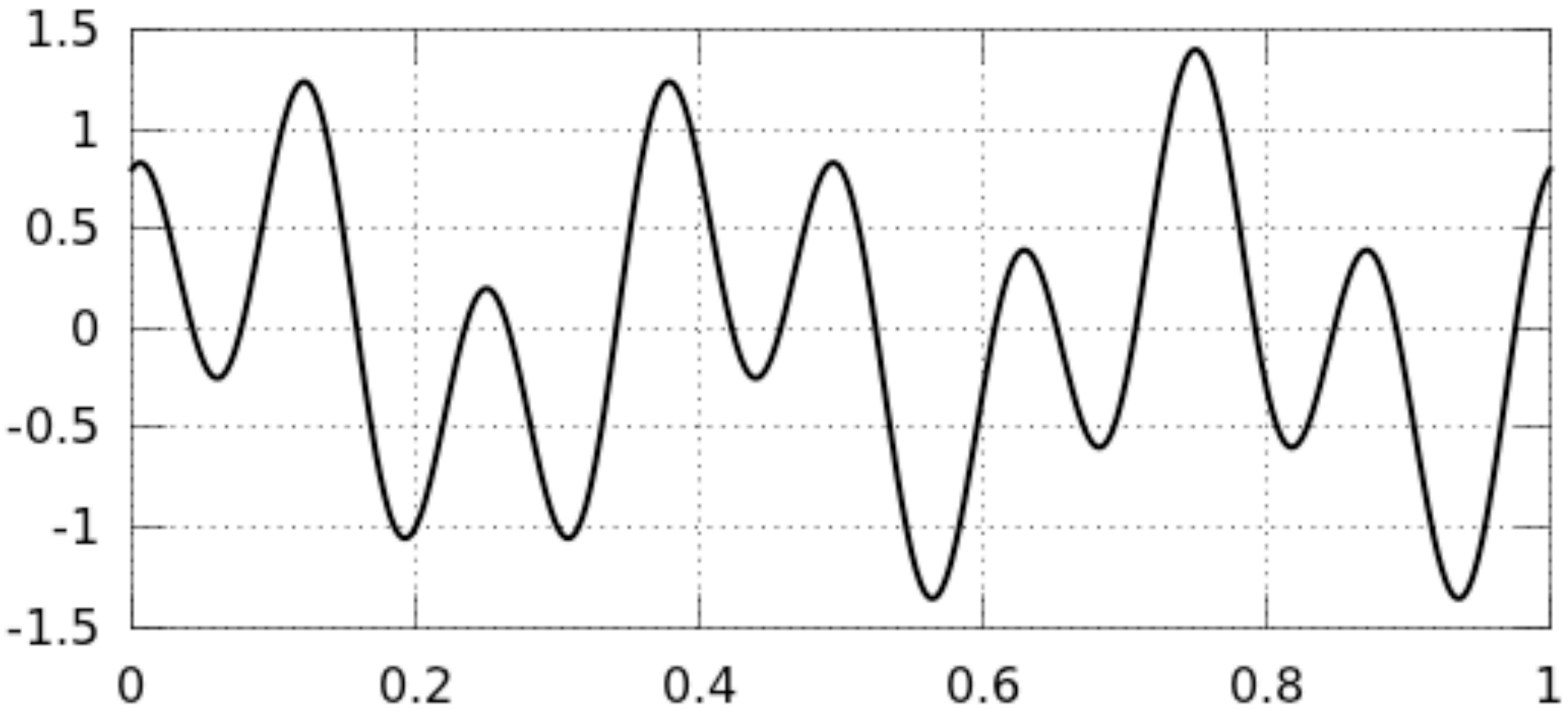
Introdução

> Matematicamente um sinal/imagem podem ser vistos como uma função
>
> Existem informações não óbvias que podemos extrair de uma função quando a observamos representadas em outros domínios

Introdução

Um sinal 1D é frequentemente representado em sua forma original no domínio do tempo

Plots costumam ser feitos em termos de tempo-amplitude



Introdução

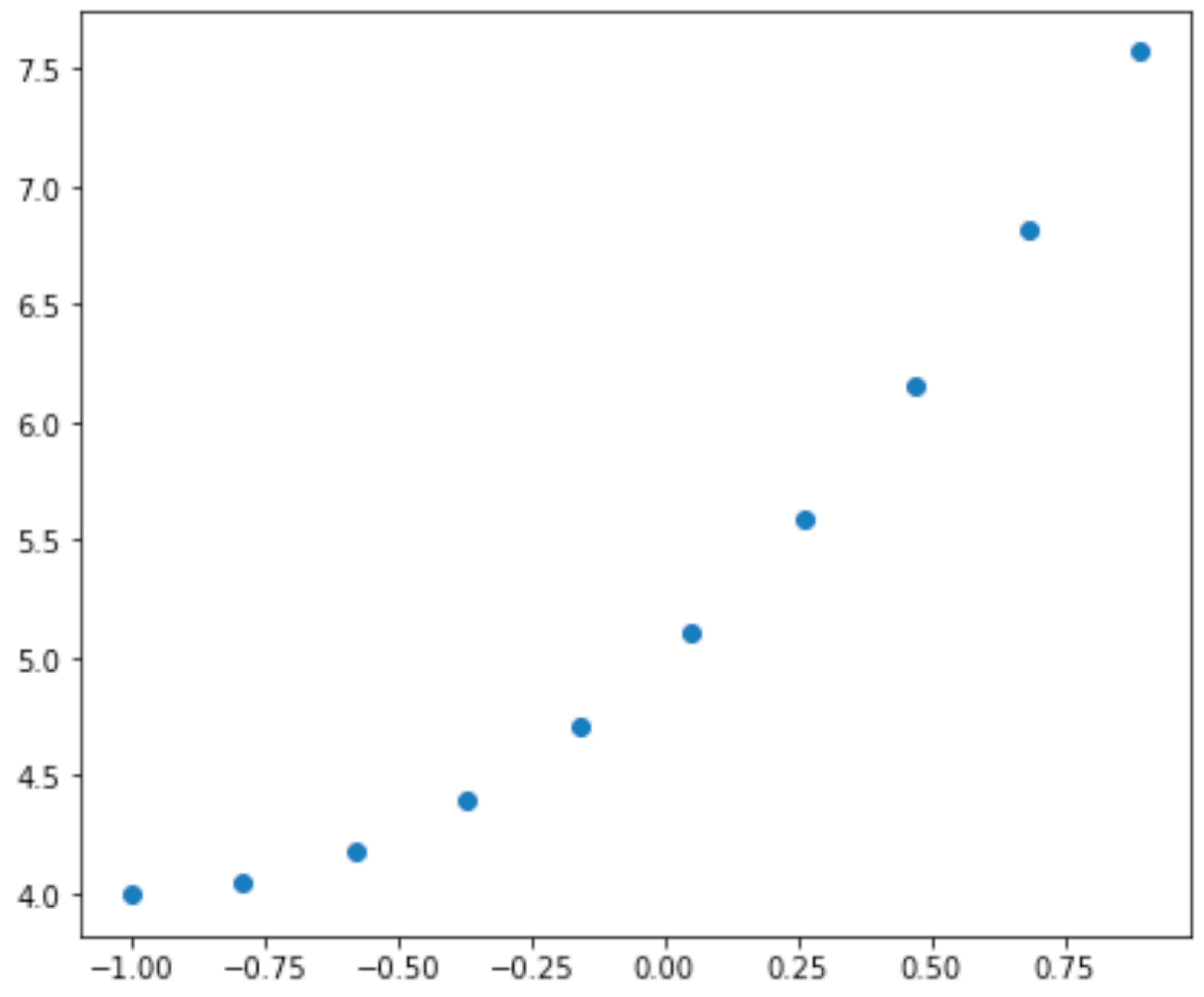
Uma imagem (sinal 2D) é representada no domínio espacial

Quando vemos uma imagem, vemos um “plot” em termos de espaço-amplitude/intensidade

Representações de Funções

Dados 10 pontos únicos amostrados de uma função desconhecida:

x	f(x)
-1.0	4.0
-0.79	4.04
-0.58	4.18
-0.37	4.4
-0.16	4.71
0.05	5.1
0.26	5.59
0.47	6.16
0.68	6.82
0.89	7.57



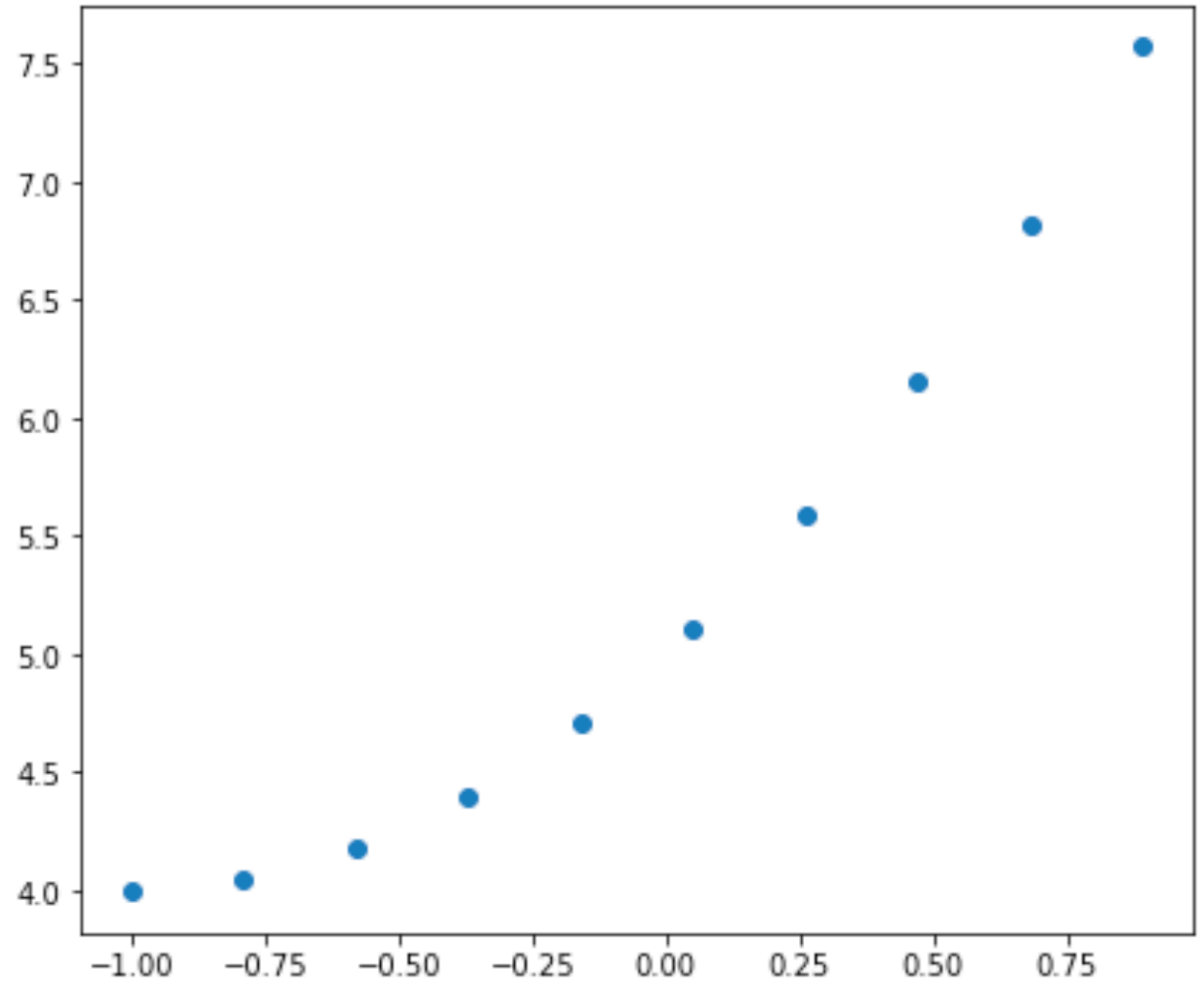
Podemos representar esta função com outro conjunto de valores?

Representações de Funções

Podemos definir que:

- Nossa função é um polinômio de grau 2
- 3 valores podem representar essa função

x	f(x)
-1.0 ,	4.0
-0.79 ,	4.04
-0.58 ,	4.18
-0.37 ,	4.4
-0.16 ,	4.71
0.05 ,	5.1
0.26 ,	5.59
0.47 ,	6.16
0.68 ,	6.82
0.89 ,	7.57



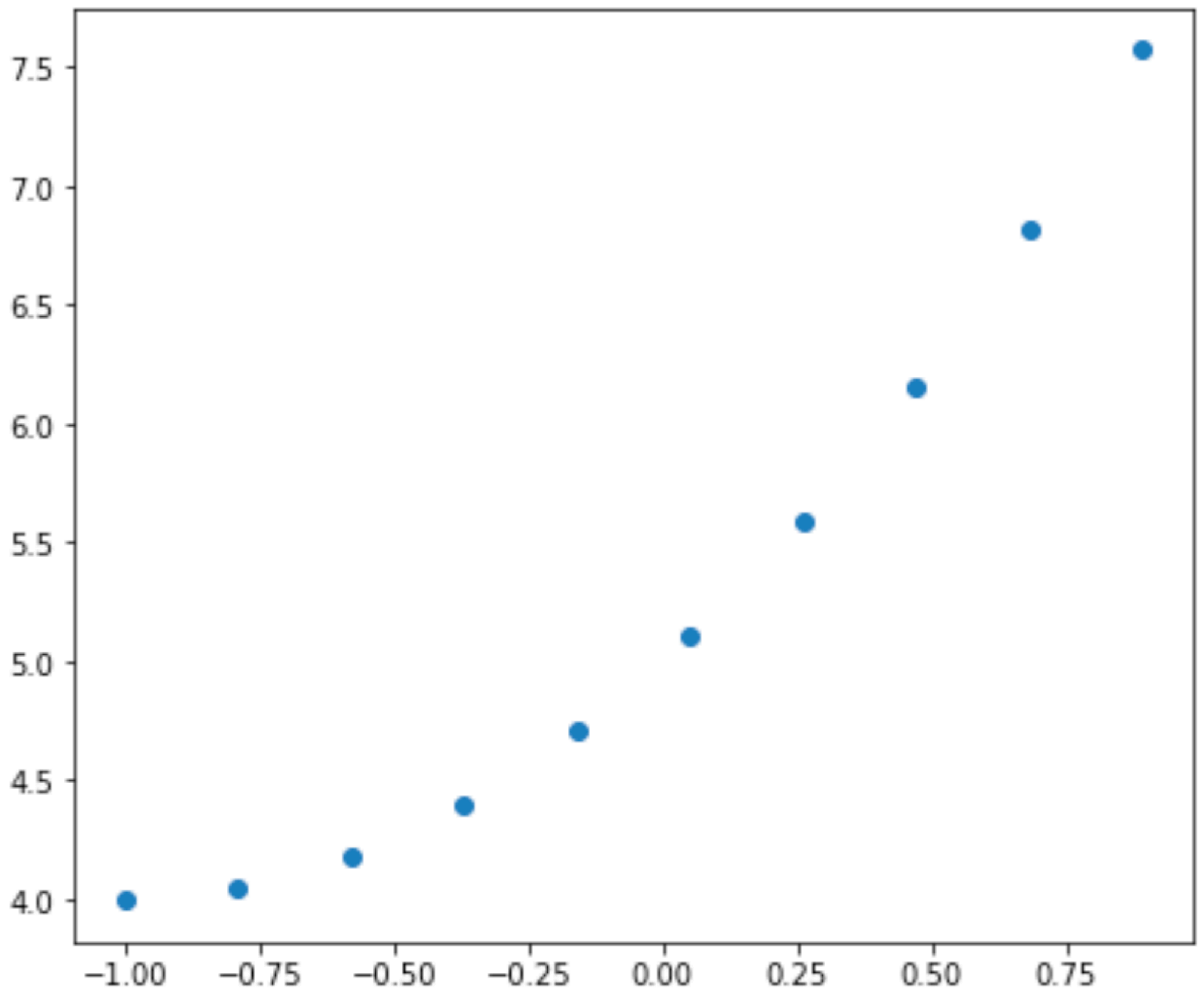
Representações de Funções

Podemos definir que:

- Nossa função é um polinômio de grau 2
- 3 valores podem representar essa função

Como computamos essa representação?

x	f(x)
-1.0	4.0
-0.79	4.04
-0.58	4.18
-0.37	4.4
-0.16	4.71
0.05	5.1
0.26	5.59
0.47	6.16
0.68	6.82
0.89	7.57



Representações de Funções

Podemos definir que:

- Nossa função é um polinômio de grau 2
- 3 valores podem representar essa função

Como computamos essa representação?

$$A = \begin{bmatrix} x_1^N & x_1^{N-1} & \dots & 1 \\ x_2^N & x_2^{N-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^N & x_n^{N-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$C = (A^T A)^{-1}(A^T Y)$$

Representações de Funções

Podemos definir que:
- Nossa função é um polinômio de grau 2
- 3 valores podem representar essa função

Como computamos essa representação?

$$A = \begin{bmatrix} x_1^N & x_1^{N-1} & \dots & 1 \\ x_2^N & x_2^{N-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^N & x_n^{N-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$C = (A^T A)^{-1}(A^T Y)$$

```
 x       f(x)
-1.0 ,  4.0
-0.79 ,  4.04
-0.58 ,  4.18
-0.37 ,  4.4
-0.16 ,  4.71
0.05 ,  5.1
0.26 ,  5.59
0.47 ,  6.16
0.68 ,  6.82
0.89 ,  7.57
```

Representações de Funções

Podemos definir que:

- Nossa função é um polinômio de grau 2
- 3 valores podem representar essa função

Como computamos essa representação?

$$A = \begin{bmatrix} x_1^N & x_1^{N-1} & \dots & 1 \\ x_2^N & x_2^{N-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^N & x_n^{N-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$C = (A^T A)^{-1}(A^T Y)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0.62 & -0.79 & 1.0 \\ 0.34 & -0.58 & 1.0 \\ 0.14 & -0.37 & 1.0 \\ 0.03 & -0.16 & 1.0 \\ 0.0 & 0.05 & 1.0 \\ 0.07 & 0.26 & 1.0 \\ 0.22 & 0.47 & 1.0 \\ 0.46 & 0.68 & 1.0 \\ 0.79 & 0.89 & 1.0 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 4.04 \\ 4.18 \\ 4.4 \\ 4.71 \\ 5.1 \\ 5.59 \\ 6.16 \\ 6.82 \\ 7.57 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 5.0 \end{bmatrix}$$

Representações de Funções

Temos então uma representação usando coeficientes:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$$

E uma representação usando pontos:

$$f(x) = f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$$

Representações de Funções

Para a Transformada de Fourier teremos

Entrada de pontos amostrados de uma função

Saída de coeficientes que definem a função

Dois aspectos da Transformada de Fourier:
- **Análise**: definindo a função usando coeficientes
- **Síntese**: reconstrução do sinal usando coeficientes

Representações de Funções

Para a Transformada de Fourier teremos

Entrada de pontos amostrados de uma função

Saída de coeficientes que definem a função

Dois aspectos da Transformada de Fourier:

- **Análise**: definindo a função usando coeficientes
- **Síntese**: reconstrução do sinal usando coeficientes

Ambos aspectos são feitos através de operações lineares

Série de Fourier

Jean-Baptiste Fourier, 1822, estudando transferência de calor, disse que uma função de variável única poderia ser expandida em termos de uma série de sinusóides de múltiplos desta variável

Lagrange e Dirichlet estudaram esta expansão e a nomearam de Série de Fourier

Série de Fourier

> Séries de Fourier estão associadas a análise matemática de padrões periódicos

Série de Fourier

Séries de Fourier estão associadas a análise matemática de padrões periódicos

Periodicidade no

- Tempo: movimentos harmônicos
- Espaço: uma medida física distribuída sobre uma região de forma simétrica

Série de Fourier

Descritores matemáticos de periodicidade:

- Frequência — número de repetições de um padrão ao longo do tempo
- Período ou comprimento de onda — tamanho do padrão que se repete

- Se fixarmos uma posição podemos medir frequência
- Se fixarmos um instante podemos medir o tamanho

Série de Fourier

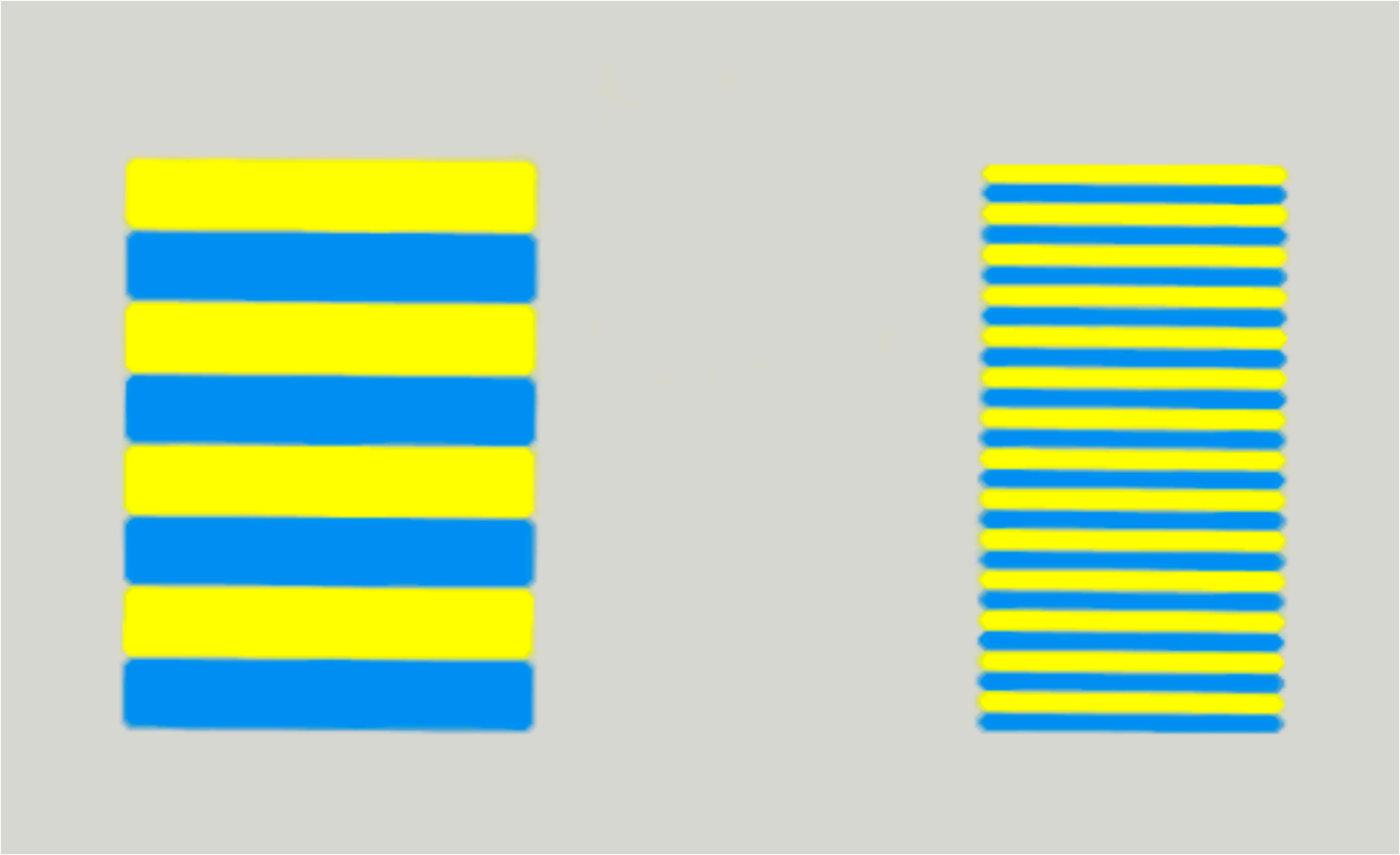
Relacionamento entre comprimento de onda e frequência

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$

Série de Fourier

Relacionamento entre comprimento de onda e frequência

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f}$$



Série de Fourier

Existem funções matemáticas que:

$$f(t + T) = f(t)$$

$$f(t + nT) = f(t), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Série de Fourier

Existem funções matemáticas que:

$$f(t + T) = f(t)$$

$$f(t + nT) = f(t), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Senos e cosenos são periódicas com período 2π:

- Associadas com o “objeto periódico mais simples”

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos(t)$$

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin(t)$$

Série de Fourier

Podemos escrever uma função arbitrária em termos de sinusoides?

Esta função precisa ser periódica?

Série de Fourier

Podemos escrever uma função arbitrária em termos de sinusoides?

Esta função precisa ser periódica?

Dada uma função periódica $f(t)$ de uma variável contínua t com período T

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2\pi n t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\pi n t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$