

4.4 Divergência – Efeitos de Enflechamento

Carlos De Marqui Junior, Matheus Urzedo Quirino

Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

2025

Nesta aula, discutiremos os efeitos de enflechamento (positivo e negativo) sobre o comportamento aeroelástico estático de asas flexíveis.



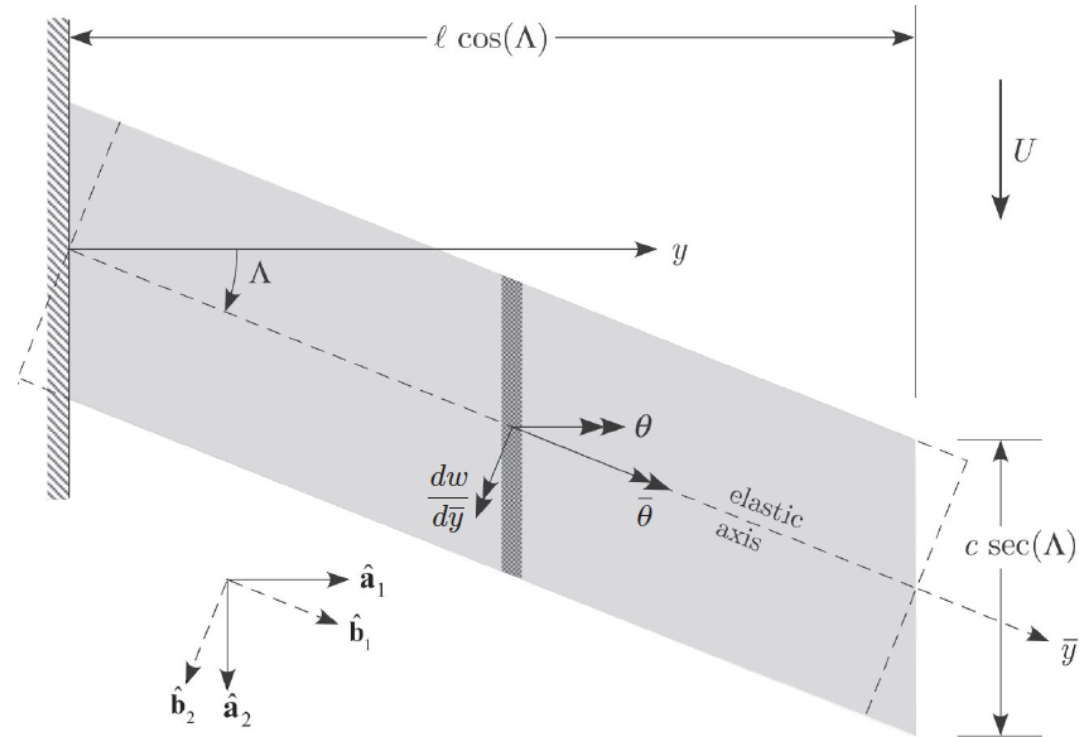
- Conceitos desenvolvidos para o caso a asa reta flexível das aulas anteriores serão utilizados

Assumiremos que o enflechamento pode ser obtido rotacionando a asa reta em torno do eixo elástico na raiz da mesma.

$$\alpha = \alpha_r + \theta$$

Lembrando que o segundo termo é a contribuição elástica devido ao efeito do carregamento aerodinâmico.

Para o caso enflechado, introduzimos os vetores unitários descritos na figura.



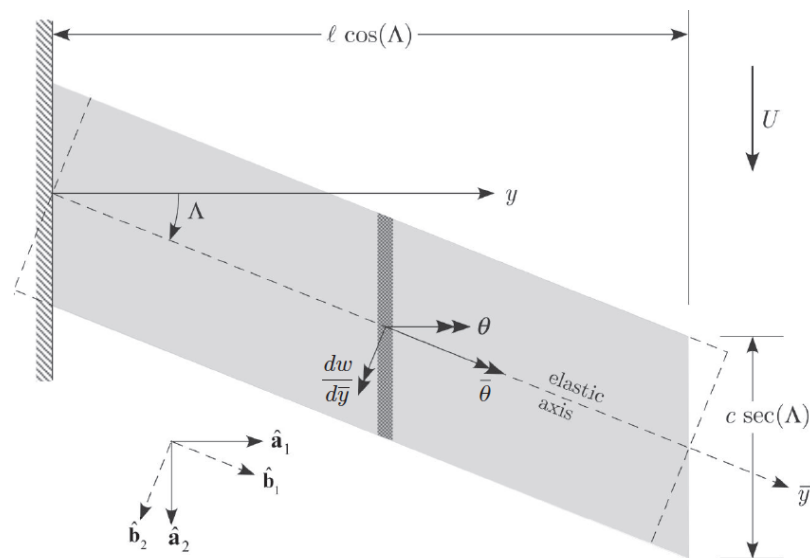
$$\hat{\mathbf{b}}_1 = \cos(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_1 + \sin(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_2$$

$$\hat{\mathbf{b}}_2 = -\sin(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_1 + \cos(\Lambda)\hat{\mathbf{a}}_2$$

Observamos que no caso enflechado, a rotação (θ) de cada seção local da asa devido a deformação elástica, é agora escrita como função da combinação de rotações devido a torção da asa $\bar{\theta}$ (em torno de $\hat{b}_1$) e flexão da asa $dw/d\bar{y}$ (em torno de $\hat{b}_2$)

Logo o componente de rotação (total):

$$\begin{aligned}\theta &= \left(\bar{\theta} \hat{\mathbf{b}}_1 + \frac{dw}{d\bar{y}} \hat{\mathbf{b}}_2 \right) \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 \\ &= \bar{\theta} \cos(\Lambda) - \frac{dw}{d\bar{y}} \sin(\Lambda)\end{aligned}$$



O que demonstra que o ângulo de ataque efetivo é alterado por movimentos de flexão devido ao acoplamento imposto pelo enflechamento, o que, baseado no conhecimento das aulas anteriores, nos leva a imaginar que o enflechamento alterará o comportamento aeroelástico estático.

Na aula de hoje, manteremos a notação da aula anterior. Entretanto, no caso atual, precisamos de duas equações para determinar a deflexão elástica final do sistema:

$$\frac{d}{d\bar{y}} \left(\overline{GJ} \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{y}} \right) = -qec\bar{a}\alpha - qc^2\bar{c}_{mac} + Nmgd$$

$$\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left(\overline{EI} \frac{d^2w}{d\bar{y}^2} \right) = qc\bar{a}\alpha - Nmg$$

Onde:

$\bar{a}$ é a inclinação da curva de sustentação para a seção bidimensional da superfície enflechada;

$\bar{c}_{mac}$ é o coeficiente de momento bidimensional da superfície enflechada;

$$\bar{a} = a \cos(\Lambda)$$

$$\bar{c}_{mac} = c_{mac} \cos^2(\Lambda)$$

Substituindo as expressões para o ângulo de ataque efetivo (total), coeficientes aerodinâmico modificados nas equações de equilíbrio e assumindo propriedades elásticas constantes , resulta em duas EDOs (torção e flexão) acopladas:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}'' + \frac{qeca}{GJ}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) - \frac{qeca}{GJ}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) \\ = -\frac{1}{GJ} [qeca\alpha_r\cos(\Lambda) + qc^2c_{mac}\cos^2(\Lambda) - Nmgd] \\ w'''' + \frac{qca}{EI}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) - \frac{qca}{EI}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) = \frac{1}{EI} [qca\alpha_r\cos(\Lambda) - Nmg]\end{aligned}$$

Com condições de contorno para o caso engastado livre:

$$\begin{array}{lll}\bar{y} = 0: & \bar{\theta} = 0 & \text{(zero torsional rotation)} \\ & w = 0 & \text{(zero deflection)} \\ & w' = 0 & \text{(zero bending slope)} \\ \bar{y} = \ell: & \bar{\theta}' = 0 & \text{(zero twisting moment)} \\ & w'' = 0 & \text{(zero bending moment)} \\ & w''' = 0 & \text{(zero shear force)}\end{array}$$

Dois casos de interesse podem ser estudados com as equações anteriores.

1 - Se não houver enflechamento, a primeira equação retorna para os casos de divergência em torção que estudamos para o caso de asas elásticas retas.

Por outro lado, uma vez obtida a condição deformada, a solução $\theta = \bar{\theta}$ deve ser substituída na segunda equação (eq. de flexão) e a integração da EDO e aplicação das condições de contorno leva ao conhecimento de cisalhamento, momento em flexão e deflexão.

2 - Um outro caso de interesse seria quanto $e = 0$. A solução para $\bar{\theta}$ pode ser calculada a partir da primeira equação e condições de contorno. Substituindo essa solução na segunda equação, leva a uma equação de quarta ordem onde os termos em $\bar{\theta}$ estariam do lado direito. Nos interessa no caso estático a solução homogênea, que pode ser escrita como uma eq de terceira ordem assumindo $\zeta = w'$

$$\zeta''' + \frac{qca}{EI} \zeta \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) = 0$$

$$\zeta(0) = \zeta'(\ell) = \zeta''(\ell) = 0$$

A solução analítica é: $q_D = -6.32970 \frac{\overline{EI}}{ac\ell^3 \sin(\Lambda) \cos(\Lambda)}$

onde o sinal negativo nos mostra que a divergência em flexão (instabilidade) ocorre somente para enflechamento negativo: $\Lambda < 0$

Observando as equações do sistema completo e comparando com o caso de asas flexíveis retas podemos discutir duas formas de influência do enflechamento no comportamento aeroelástico:

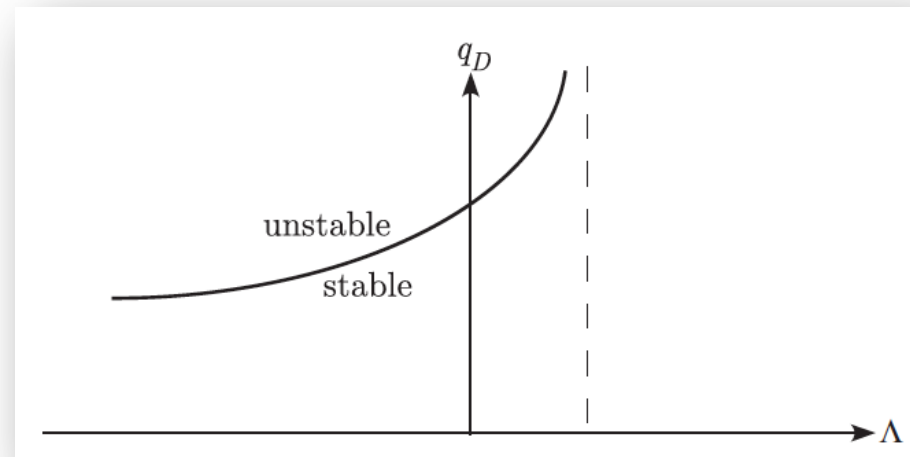
$$\begin{aligned}\bar{\theta}'' + \frac{qeca}{GJ}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) - \frac{qeca}{GJ}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) \\ = -\frac{1}{GJ}\left[qeca\alpha_r\cos(\Lambda) + qc^2c_{mac}\cos^2(\Lambda) - Nmgd\right] \\ w'''' + \frac{qca}{EI}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) - \frac{qca}{EI}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) = \frac{1}{EI}\left[qca\alpha_r\cos(\Lambda) - Nmg\right]\end{aligned}$$

$$\frac{qeca}{GJ}\bar{\theta} \quad \text{to} \quad \frac{qeca}{GJ}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda)$$

O segundo efeito é a influência da flexão no ângulo de ataque efetivo, o que vem da definição da influência sobre o ângulo elástico:

$$\begin{aligned}\theta &= \left(\bar{\theta} \hat{\mathbf{b}}_1 + \frac{dw}{d\bar{y}} \hat{\mathbf{b}}_2 \right) \cdot \hat{\mathbf{a}}_1 \\ &= \bar{\theta} \cos(\Lambda) - \frac{dw}{d\bar{y}} \sin(\Lambda)\end{aligned}$$

e que conduziu ao acoplamento flexão-torção nas equações de equilíbrio, o que **influencia o comportamento aeroelástico** e a distribuição de carregamento. Especialmente, é dependente do enflechamento.



Rígido

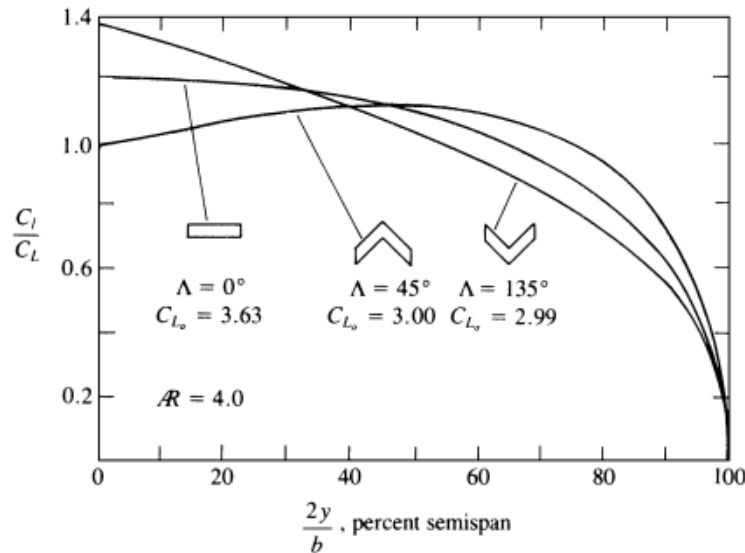
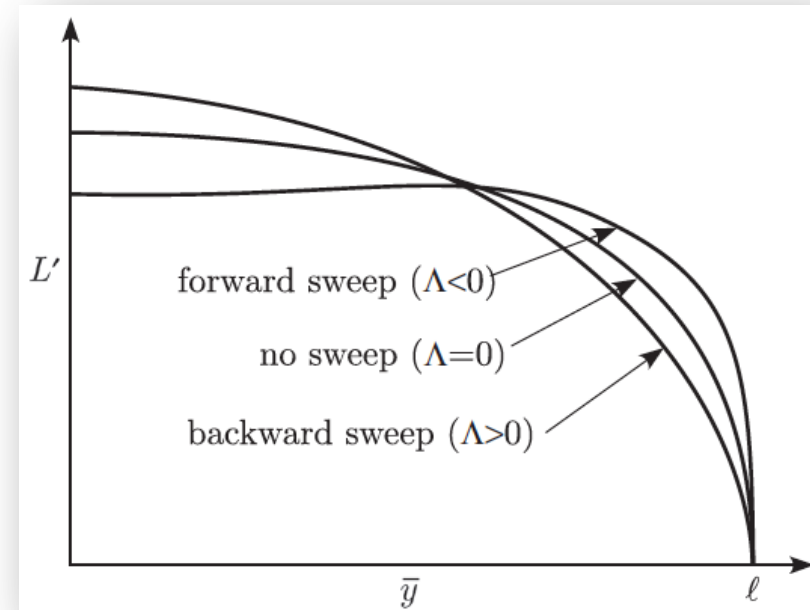


Figure 12.17 Effect of wing sweep on the spanwise loading of untapered planar wings. From Ref. 13.13, reprinted with permission of ASME.

Elástico



As figuras mostram efeitos de enflechamento. A figura para o caso elástico contempla um caso com propriedades constantes e sustentação total também constante através do ajuste do ângulo rígido (geométrico) α_r .

O enflechamento negativo (para frente) tende a reduzir o carregamento na ponta da asa para o caso rígido, enquanto que o enflechamento positivo o aumenta. Porém, o inverso pode ocorrer no caso elástico, com o enflechamento negativo adicionalmente facilitando a divergência.

Retornando nossa análise para as equações de equilíbrio abaixo:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}'' + \frac{qeca}{GJ}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) - \frac{qeca}{GJ}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) \\ = -\frac{1}{GJ}[qeca\alpha_r\cos(\Lambda) + qc^2c_{mac}\cos^2(\Lambda) - Nmgd] \\ w'''' + \frac{qca}{EI}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) - \frac{qca}{EI}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) = \frac{1}{EI}[qca\alpha_r\cos(\Lambda) - Nmg]\end{aligned}$$

sua solução analítica poderia ser mais facilmente obtida convertendo as duas equações acopladas em uma única equação. No nosso caso aeroelástico estático, já sabemos que a solução homogênea nos indica o limite de estabilidade:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}'' + \frac{qeca}{GJ}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) - \frac{qeca}{GJ}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) &= 0 \\ w'''' + \frac{qca}{EI}w'\sin(\Lambda)\cos(\Lambda) - \frac{qca}{EI}\bar{\theta}\cos^2(\Lambda) &= 0\end{aligned}$$

Podemos diferenciar a primeira equação em relação a $\bar{y}$ e multiplica-la por $\cos(\Lambda)$. Desta equação modificada, subtraímos $\sin(\Lambda)$ multiplicado pela segunda equação, substituindo $\bar{\theta} \cos(\Lambda) - w' \sin(\Lambda)$ por θ , resulta em:

$$\theta''' + \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \theta' + \frac{qcal^3}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) \theta = 0 \quad \text{com} \quad \eta = \bar{y}/\ell$$

onde $()'$ é $d()/d\eta$ e cond. de contorno $\theta(0) = \theta'(1) = \theta''(1) + \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda) \theta(1) = 0$

A solução exata da equação anterior dadas as condições de contorno forneceria suas raízes, que poderiam ser plotadas em diversos ramos para análise do comportamento aeroelástico do sistema.

Estudaremos aqui uma solução aproximada para um único ramo.

A solução aproximada fará parte dos exercícios 11 até 16 (opcional). A solução para um único ramo será aqui considerada para o caso de divergência flexão-torção.

$$\tau = \frac{qecal^2}{GJ} \cos^2(\Lambda)$$
$$\beta = \frac{qcal^3}{EI} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda)$$

é possível se demonstrar que a solução aproximada da equação de equilíbrio estático do slide anterior pode ser representada, de forma aproximada, pela reta:

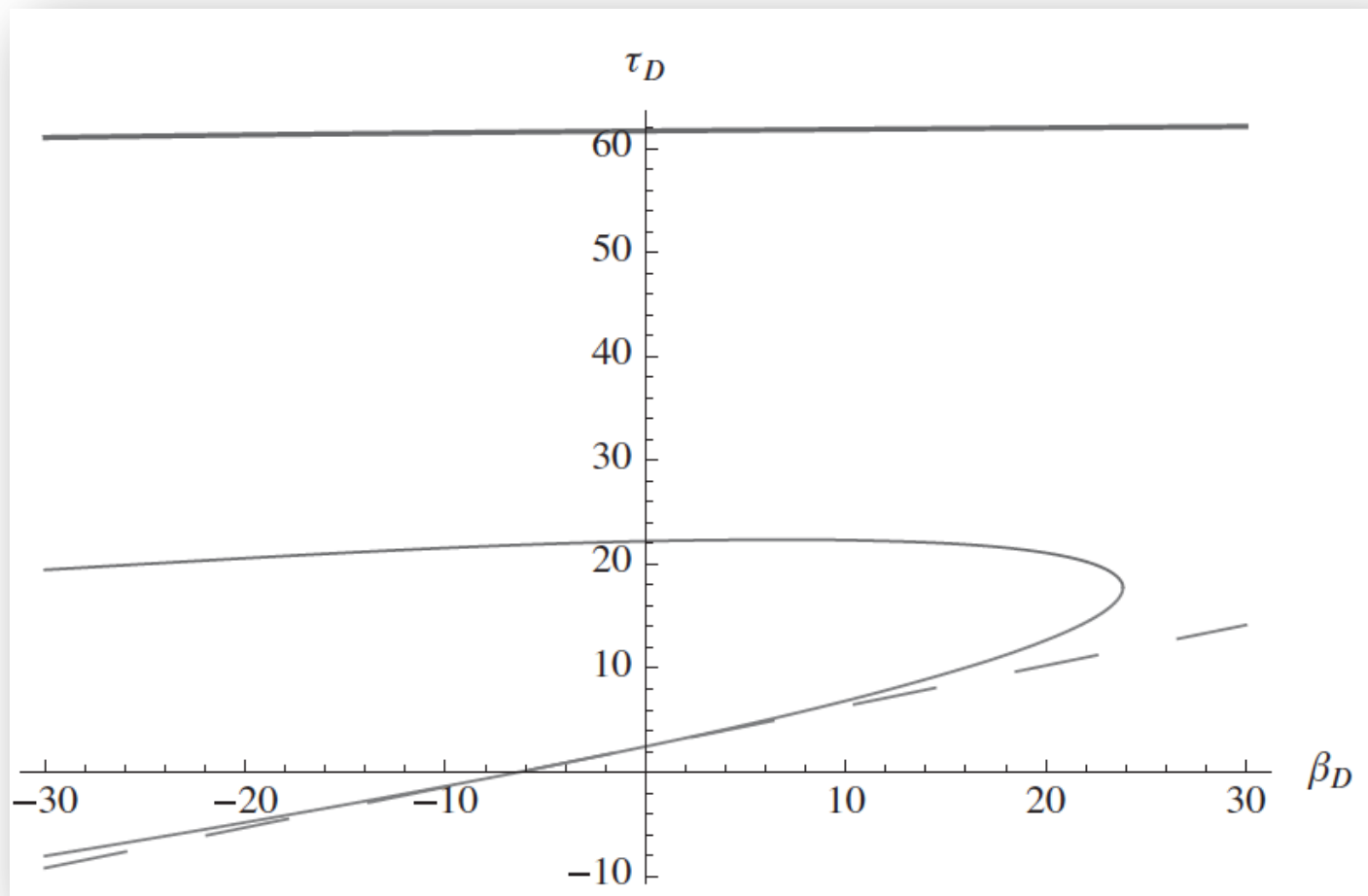
$$\tau_D = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi^2}{76} \beta_D$$

Para uma asa rígida em flexão, a solução resultante é $\tau_D = \frac{\pi^2}{4}$, que é exatamente a menor raiz encontrada na aula passada para o problema de divergência torsional em uma asa elástica.

Por outro lado, uma asa rígida em torção, leva a solução de $\beta_D = -19/3$ que será a solução de divergência em flexão.

Soluções obtidas da solução aproximada entre os dois extremos anteriores são boas aproximações.

A Figura mostra a solução aproximada (linhas pontilhadas) juntamente com a solução analítica do problema.



$$(2n - 1)^2 \pi^2 / 4 \text{ for } n = 1, 2, \dots, \infty \text{ (i.e., } \pi^2 / 4, 9\pi^2 / 4, \dots).$$

O problema pode ser analisado de forma mais conveniente avaliando τ_D contra um parâmetro de dependa apenas da configuração analisada.

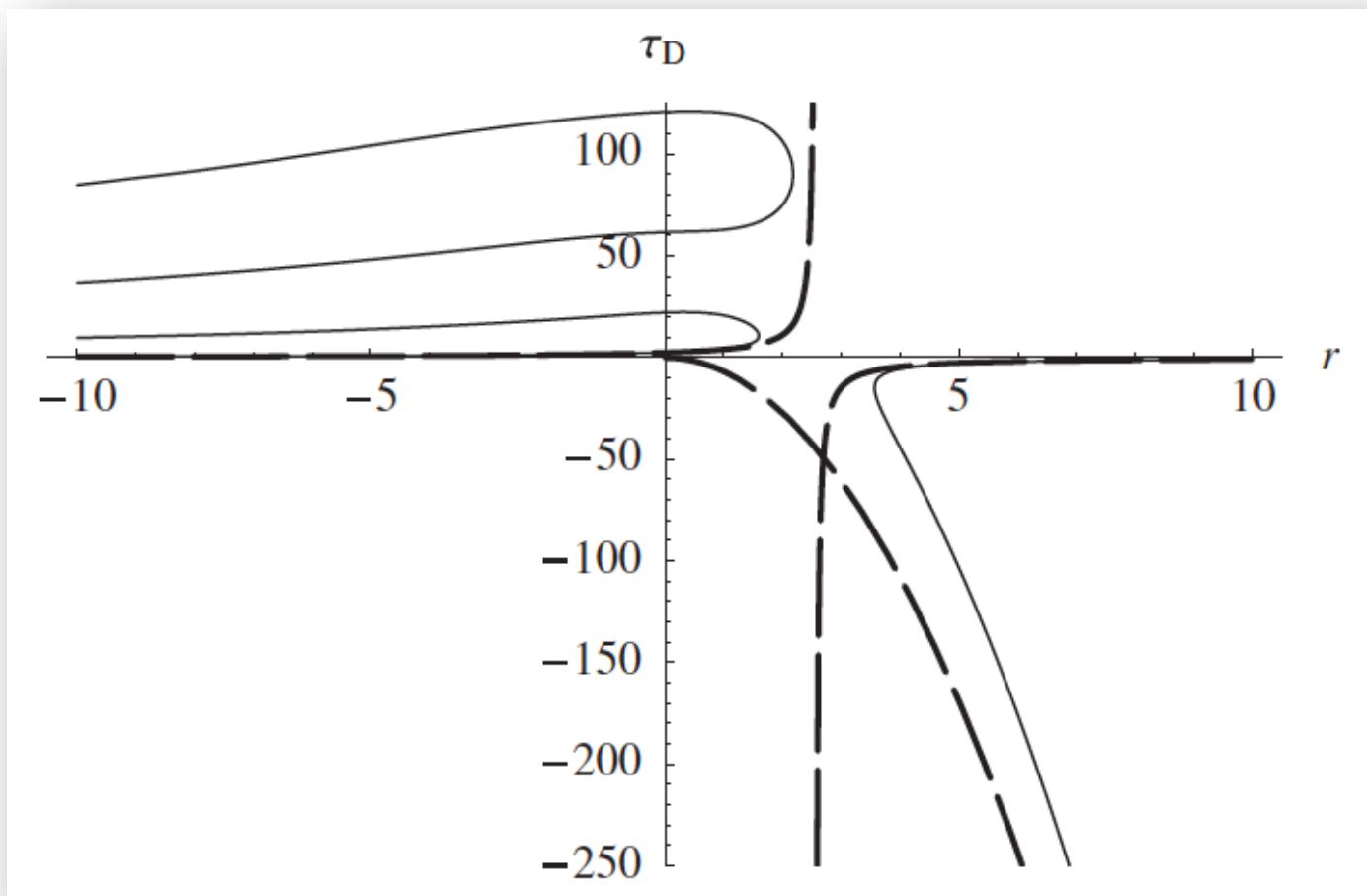
$$r \equiv \frac{\beta}{\tau} = \frac{\ell}{e} \frac{\overline{GJ}}{\overline{EI}} \tan(\Lambda)$$

o que modificaria a solução aproximada para:

$$\tau_D = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi^2 r}{76} \tau_D \longrightarrow \tau_D = \frac{\pi^2}{4 \left(1 - \frac{3\pi^2 r}{76}\right)}$$

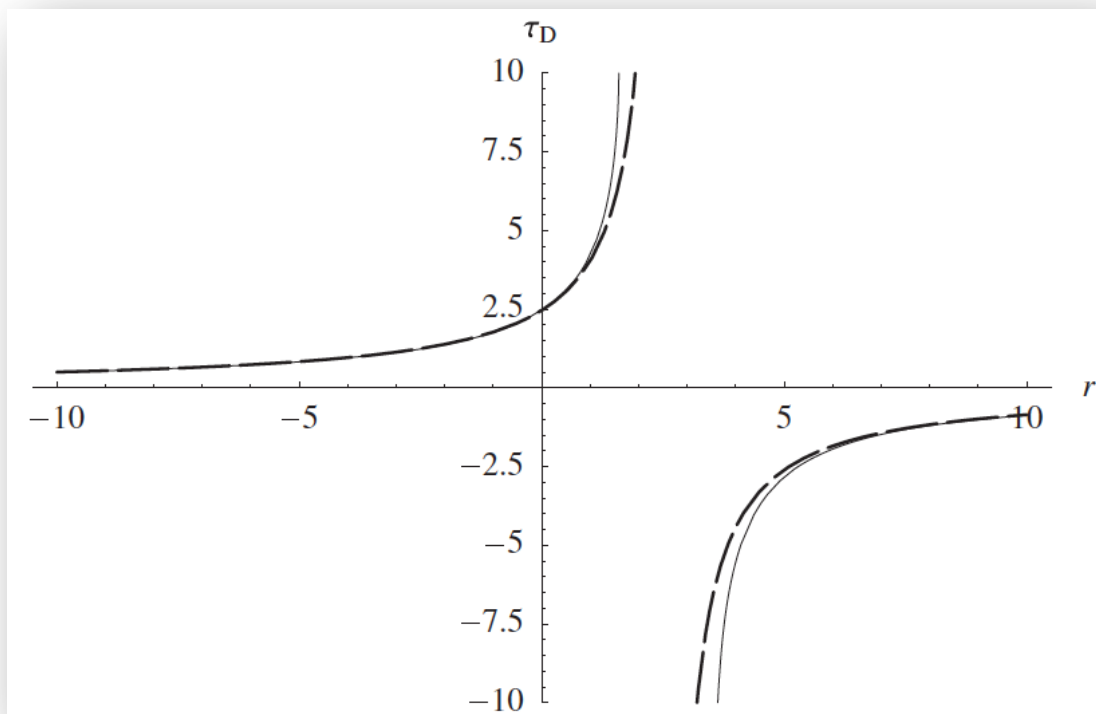
$$q_D = \frac{\overline{GJ} \pi^2}{4e c a \ell^2 \cos^2(\Lambda) \left[1 - \frac{3\pi^2}{76} \frac{\ell}{e} \frac{\overline{GJ}}{\overline{EI}} \tan(\Lambda)\right]}$$

A figura mostra a solução aproximada anterior (linhas tracejadas) juntamente com a solução exata.



$$(2n - 1)^2 \pi^2 / 4 \text{ for } n = 1, 2, \dots, \infty \text{ (i.e., } \pi^2 / 4, 9\pi^2 / 4, \dots).$$

A figura mostra a solução aproximada anterior (linhas tracejadas) juntamente com a solução exata.



$$(2n - 1)^2 \pi^2 / 4 \text{ for } n = 1, 2, \dots, \infty \text{ (i.e., } \pi^2 / 4, 9\pi^2 / 4, \dots).$$

A expressão anterior para pressão dinâmica de divergência depende da rigidez estrutural em flexão e torção, da razão e/ℓ e do ângulo de enflechamento. Analisando casos em que $e > 0$ podemos normalizar a pressão dinâmica de divergência pela pressão dinâmica de divergência da asa reta:

$$q_{D_0} = \frac{\pi^2 \overline{GJ}}{4e c a \ell^2}$$

resultando

$$\frac{q_D}{q_{D_0}} = \frac{1 + \tan^2(\Lambda)}{1 - \frac{3\pi^2}{76} \frac{\ell}{e} \frac{\overline{GJ}}{EI} \tan(\Lambda)}$$

Mostrando que para uma asa com determinadas características estruturais elásticas, há ângulos de enflechamento que fazem a pressão dinâmica tender ao infinito ou se tornar negativa (mudança de sinal).

$$-90^\circ \leq \Lambda \leq 90^\circ \quad \longleftrightarrow \quad |\Lambda| \neq 90^\circ \text{ and } 3\pi^2 r \neq 76$$

há divergência

Por outro lado, teríamos divergência se $-90^\circ < \Lambda < \Lambda_\infty$

$$\text{onde} \quad \tan(\Lambda_\infty) = \frac{76\overline{EI}e}{3\pi^2\overline{GJ}\ell}$$

Assim:

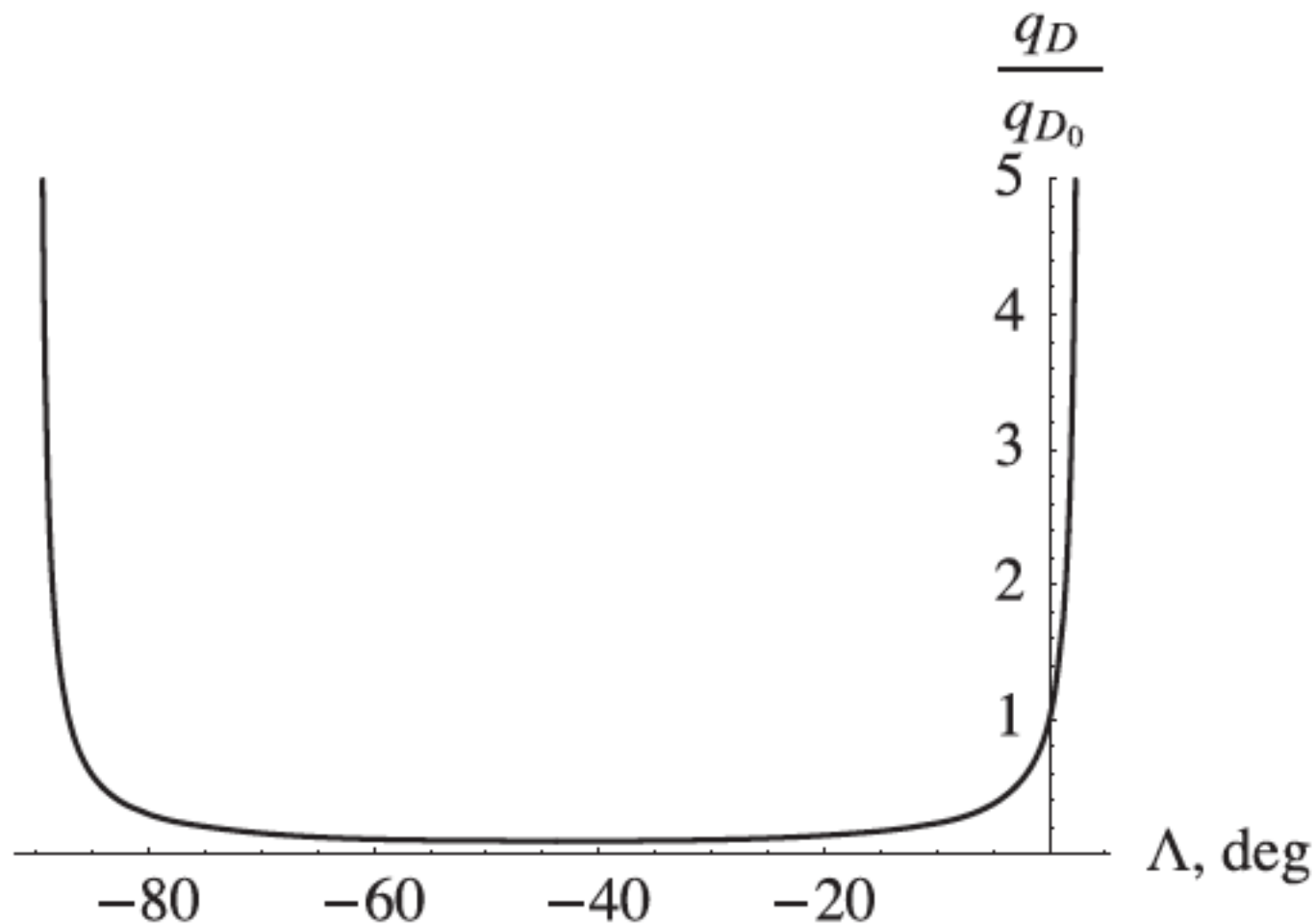
$$\frac{q_D}{q_{D_0}} = \frac{1 + \tan^2(\Lambda)}{1 - \frac{\tan(\Lambda)}{\tan(\Lambda_\infty)}}$$

Portanto, não há divergência se $\Lambda \geq \Lambda_\infty$, e a pressão dinâmica de divergência é significativamente reduzida quando Λ é reduzido a valores menores que Λ_∞ .

Λ_∞ é normalmente um valor numérico pequeno. O que nos permite concluir que quase qualquer enflechamento positivo evita divergência.

Por outro lado, enflechamento negativo induz a baixos valores de pressão dinâmica de divergência.

A figura mostra o comportamento para determinada razão de rigidezes e e/l .



$$\tan(\Lambda_\infty) = \frac{76\overline{EI}e}{3\pi^2\overline{GJ}\ell}$$

$$\overline{GJ}/\overline{EI} = 1.0 \text{ and } e/\ell = 0.02$$

Como e pode ser positivo, negativo ou zero, a pressão dinâmica de divergência da asa reta também pode ser positiva, negativa ou nula – o que pode levar a conclusões erradas quando analisamos o problema utilizando a expressão

$$\frac{q_D}{q_{D_0}} = \frac{1 + \tan^2(\Lambda)}{1 - \frac{\tan(\Lambda)}{\tan(\Lambda_\infty)}}$$

Reescrevendo a expressão, eliminando a dependência explícita de q_{D_0} ,

$$\frac{q_D a c l^3}{EI} = \frac{19 [1 + \tan^2(\Lambda)]}{3 [\tan(\Lambda_\infty) - \tan(\Lambda)]}$$

que nos mostra que a divergência ocorre quando $-90^\circ < \Lambda < \Lambda_\infty$ independentemente do sinal de e .

A expressão também nos mostra que a rigidez em flexão possui um papel importante no projeto de asas enflechadas livres de divergência.

Referências

1 Introduction to structural dynamics and aeroelasticity

D. Hodges and A. Pierce

▮ Leitura do Capítulo 4 (4.2.6)

2 Figura de distribuição de carregamento em asa enflechada rígida:

Low-Speed Aerodynamics, Second Edition: J. Katz and A. Plotkin, capítulo 12