

4.3 Reversão de comando – Asa Elástica

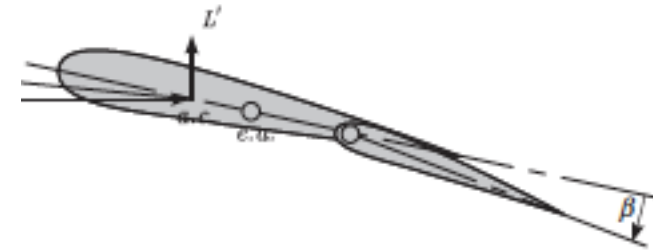
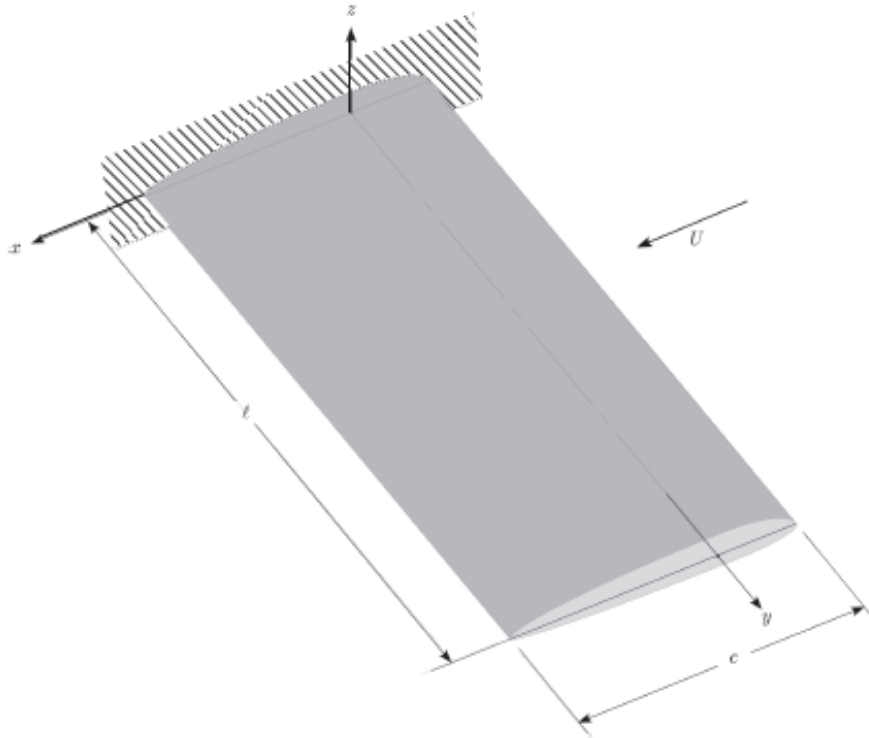
Carlos De Marqui Junior

Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

Nesta aula, discutiremos o problema de reversão e eficiência de comando, que foram anteriormente discutidos para o caso de uma seção típica (seção rígida bidimensional com suportes elásticos)

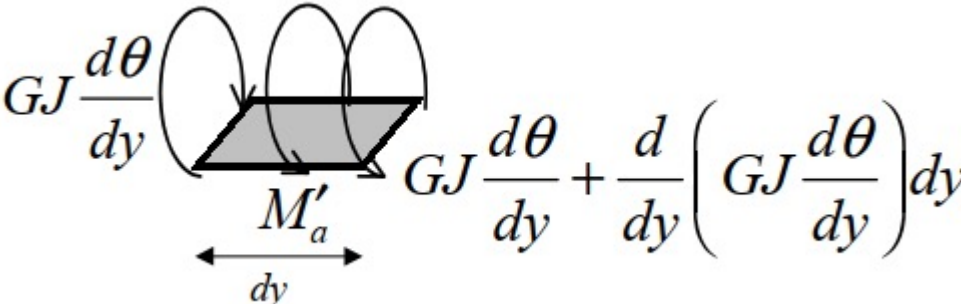


- Examinaremos a asa reta flexível em torção, consideraremos a geometria, condição de contorno da asa da aula anterior, portanto.

Duas definições são aceitas para a condição de reversão:

1. A pressão dinâmica de reversão de comando é definida como a pressão dinâmica na qual a variação da sustentação total da asa em relação a deflexão da superfície de comando é nula;
2. A pressão dinâmica de reversão é definida com a pressão dinâmica na qual a variação do momento de flexão na raiz da asa elástica em relação a deflexão da superfície é igual a zero.
3. As duas definições são aceitas;
4. Além de se estudar a condição de divergência, verificaremos também a eficiência do comando para o caso da asa elástica.

Relembrando a modelagem da asa flexível em torção da aula passada:



$$T = \overline{GJ} \frac{d\theta}{dy}$$

$$\frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\overline{GJ} \frac{d\theta}{dy} \right) = -M'$$

Substituindo a definição de momento aerodinâmico (por unidade de envergadura), obtemos,

$$\overline{GJ} \frac{d^2\theta}{dy^2} = -qc^2 c_{mac} - eqcc_\ell + Nmgd$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{qcae}{\overline{GJ}} \theta = -\frac{1}{\overline{GJ}} (qc^2 c_{mac} + qcae\alpha_r - Nmgd)$$

Aplicando as condições de contorno

$$y = 0: \quad \theta = 0 \quad (\text{zero deflection})$$

$$y = \ell: \quad \frac{d\theta}{dy} = 0 \quad (\text{zero twisting moment})$$

E definindo:

$$\lambda^2 \equiv \frac{qcae}{GJ}$$
$$\bar{\alpha}_r = \frac{cc_{mac}}{ae} - \frac{Nmgd}{qcae}$$
$$\lambda^2 \bar{\alpha}_r \equiv \frac{1}{GJ} (qc^2 c_{mac} - Nmgd)$$

A equação de equilíbrio estático fica:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2(\alpha_r + \bar{\alpha}_r)$$

Na aula anterior, definimos os coeficientes de sustentação e momento para uma seção (quando utilizamos a teoria das faixas), que serão alteradas no problema atual para:

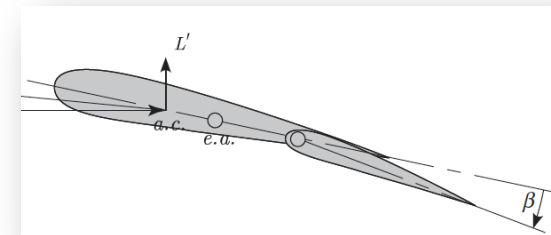
$$c_\ell = a\alpha + c_{\ell_\beta}\beta$$

$$c_{mac} = c_{m_\beta}\beta$$

Onde:

α é a inclinação da curva de sustentação;

β é a deflexão da superfície de comando;



$$\alpha(y) = \alpha_r + \theta(y)$$

Assim, a sustentação e o momento (por unidade de comprimento), são alterados para

$$L' = qc (a\theta + c_{\ell_\beta}\beta)$$

$$M' = eL' + qc^2 c_{m_\beta}\beta$$

Estamos aqui assumindo que a superfície de comando ocupa toda a envergadura do bordo de fuga da asa elástica!

Assim, a equação de equilíbrio estático para a asa elástica com a superfície de comando ao longo do bordo de fuga é alterada para,

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2\psi\beta$$

Onde:

$$\psi = \frac{e c_{\ell_\beta} + c c_{m_\beta}}{a e} \quad \lambda^2 \equiv \frac{q c a e}{GJ}$$

Aplicando as condições de contorno para a viga engastada, a solução para a variação do ângulo de rotação ao longo da envergadura é,

$$\theta = -\psi\beta [1 - \cos(\lambda y) - \sin(\lambda y) \tan(\lambda \ell)]$$

Seguindo a mesma discussão da aula anterior, temos que a sustentação total na asa uniforme como:

$$L = \int_0^\ell L' dy = \frac{qc\ell}{e} \left[(e c_{\ell_\beta} + c c_{m_\beta}) \frac{\tan(\lambda\ell)}{\lambda\ell} - c c_{m_\beta} \right] \beta$$

Onde:

$$L' = qc (a\theta + c_{\ell_\beta} \beta) \quad \theta = -\psi\beta [1 - \cos(\lambda y) - \sin(\lambda y) \tan(\lambda\ell)]$$

Aplicando a primeira definição para a condição de reversão de comando, ou seja, a variação da sustentação total em relação ao ângulo de deflexão da superfície de comando será nula,

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \frac{\tan(\lambda\ell)}{\lambda\ell} = \frac{c c_{m_\beta}}{c c_{m_\beta} + e c_{\ell_\beta}}$$

Onde são conhecidos a distância entre centro aerodinâmico e eixo elástico (e), a corda (c) e os coeficientes aerodinâmicos da seção bidimensional.

A equação anterior pode ser resolvida numericamente para $\lambda \ell$
O menor valor de $\lambda \ell$ fornecerá a pressão dinâmica de reversão:

$$q_R = \frac{(\lambda_1 \ell)^2 GJ}{e c a \ell^2}$$

Lembrando que a pressão dinâmica dada pela equação anterior é válida para a aerodinâmica utilizada e simplificações elásticas assumidas. Além disso, ela foi obtida considerando uma superfície de comando no bordo de fuga da asa que estende ao longo de toda envergadura.

De forma similar o que foi realizado até então, podemos supor que a superfície ocupe uma região finita do bordo de fuga, por exemplo:

$$y = r \ell \longrightarrow y = R \ell$$

$$0 \leq r < R \leq 1$$

Portanto, diante da nova configuração, podemos redefinir a equação de equilíbrio estático para cada região, ou seja

$$\frac{d^2\theta_1}{dy^2} + \lambda^2\theta_1 = 0 \quad 0 \leq y \leq r\ell$$

$$\frac{d^2\theta_2}{dy^2} + \lambda^2\theta_2 = -\lambda^2\psi\beta \quad r\ell \leq y \leq R\ell$$

$$\frac{d^2\theta_3}{dy^2} + \lambda^2\theta_3 = 0 \quad R\ell \leq y \leq \ell$$

onde são obtidas 6 constantes arbitrárias impondo-se as 6 condições de contorno:

$$\theta_1(0) = 0$$

$$\theta_2(R\ell) = \theta_3(R\ell)$$

$$\theta_1(r\ell) = \theta_2(r\ell)$$

$$\frac{d\theta_2}{dy}(R\ell) = \frac{d\theta_3}{dy}(R\ell)$$

$$\frac{d\theta_1}{dy}(r\ell) = \frac{d\theta_2}{dy}(r\ell)$$

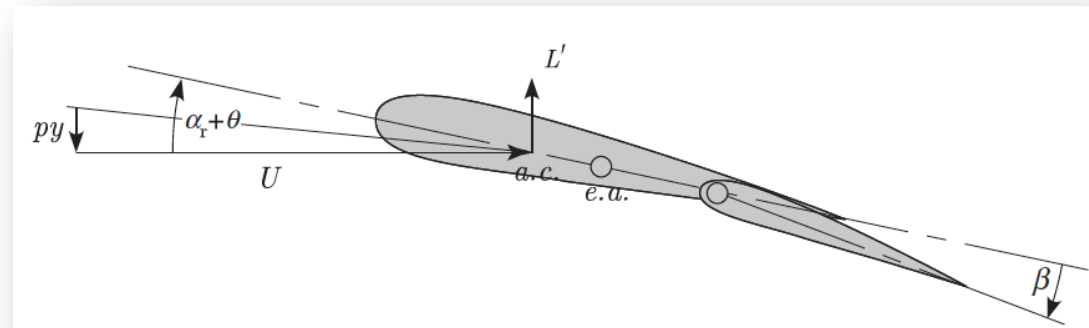
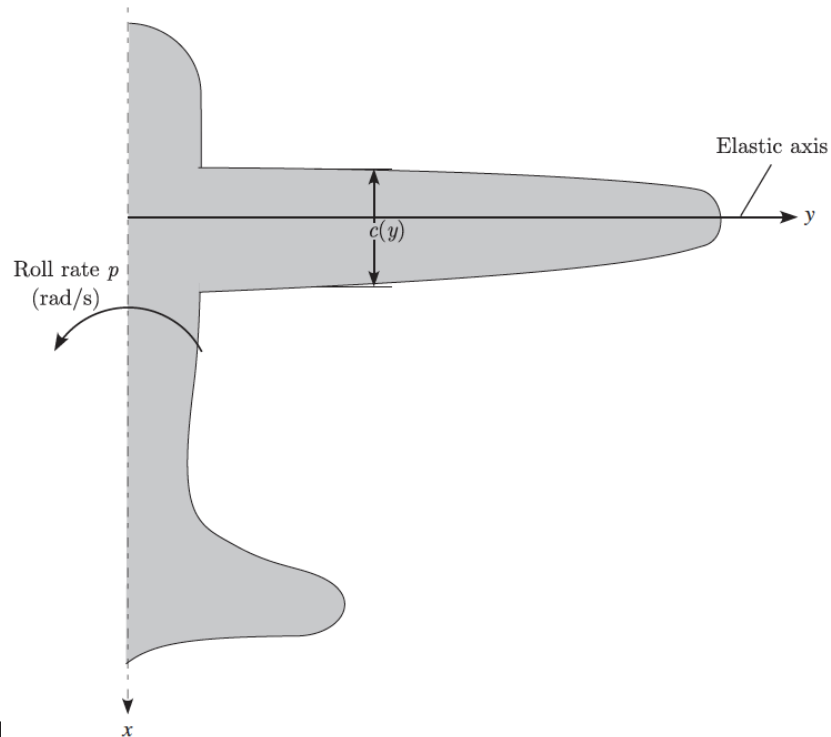
$$\frac{d\theta_3}{dy}(\ell) = 0$$



Se considerarmos uma aeronave com asas retas rolando, como mostrado na figura abaixo (metade direita).

A taxa (ou velocidade) de rolagem é definida como “ p ”, positivo como indicado na figura.

A Figura da direita mostra que a asa tem um ângulo de incidência $\alpha_r + \theta(y)$



A asa direita “sente” o componente de velocidade py , normal a direção do escoamento livre e para baixo.

O Ângulo de ataque efetivo se torna, portanto:

$$\alpha_r + \theta - py/U$$

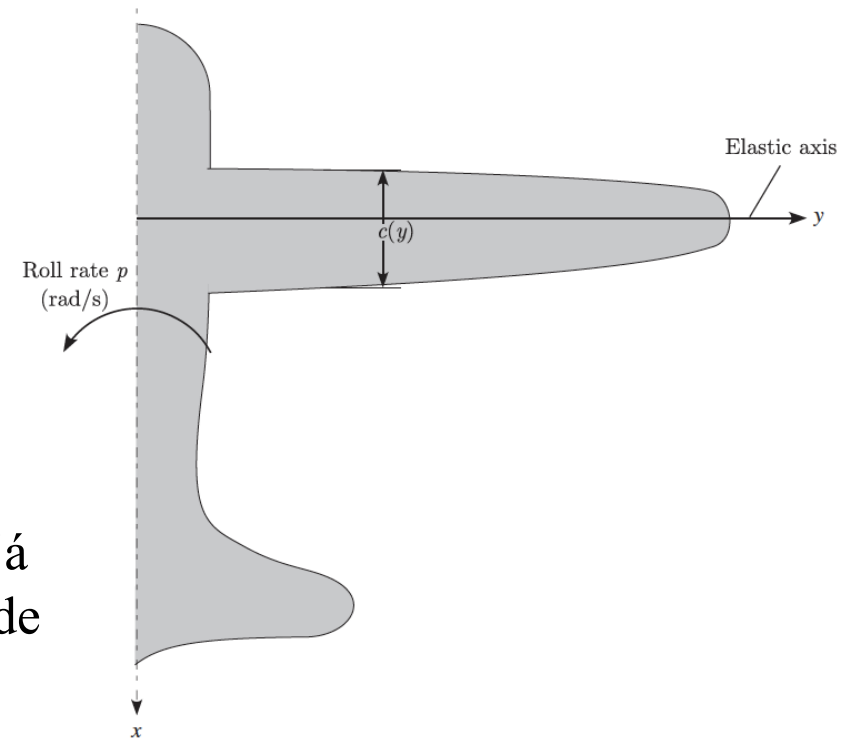
Contribuições de sustentação e momento são iguais nos dois lados da aeronave (em relação ao eixo de simetria. Nestes casos, esses componentes como simétricos. Do contrário, como antissimétricos

O Caso de rolagem pode ser tratado como antissimétrico, já que os componentes do problema puro de de rolagem são simétricos e se cancelam.

No caso do ângulo efetivo:

$$\alpha = \cancel{\alpha_r} + \theta(y) - \frac{py}{U}$$

- Componente rígido pode ser descartado por simetria.
- Os dois outros termos (ângulo elástico (dependente do ângulo de comando) e incremento no ângulo de ataque devido ao movimento de rolagem) são antissimétricos, já que possuem contribuições opostas em relação ao eixo de simetria da aeronave.



Assumindo que a corda é constante, podemos reescrever a equação de equilíbrio estático como,

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = \lambda^2 \left(\frac{py}{U} - \beta\psi \right)$$

e aplicadas as condições de contorno,

$$\theta = \frac{P}{U\lambda} [\lambda y - \sec(\lambda\ell) \sin(\lambda y)] + \psi\beta [\tan(\lambda\ell) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1]$$

Assumindo que a aeronave está rolando a uma taxa constante (steady state), o momento total de rolagem tem que ser zero.

Ignorando o offset entre a raiz da asa e o eixo de simetria, temos que o momento em torno do eixo de simetria será:

$$\int_0^\ell yL'(y)dy = \int_0^\ell yqc \left[a \left(\theta - \frac{py}{U} \right) + c_{\ell\beta}\beta \right] dy$$



Que pode se resolver e escrita na seguinte forma adimensional (dependente do ângulo da superfície de comando),

$$\frac{p\ell}{U} = \frac{\lambda\ell \{cc_{m_\beta} [(\lambda\ell)^2 - 2\sec(\lambda\ell) + 2] - 2ec_{\ell_\beta} [\sec(\lambda\ell) - 1]\} \beta}{2ae[\lambda\ell - \tan(\lambda\ell)]}$$

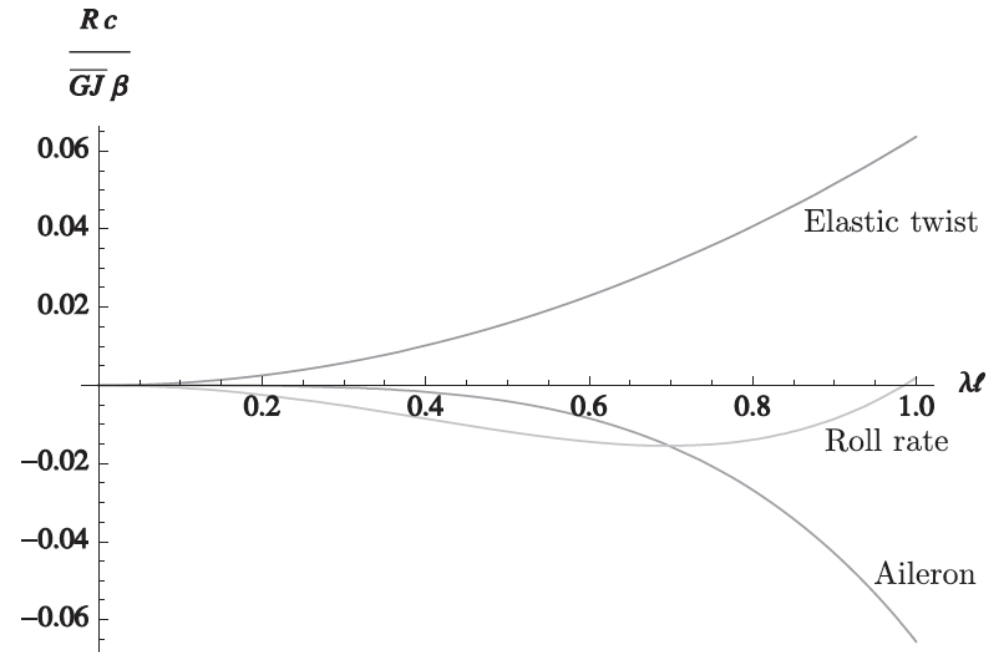
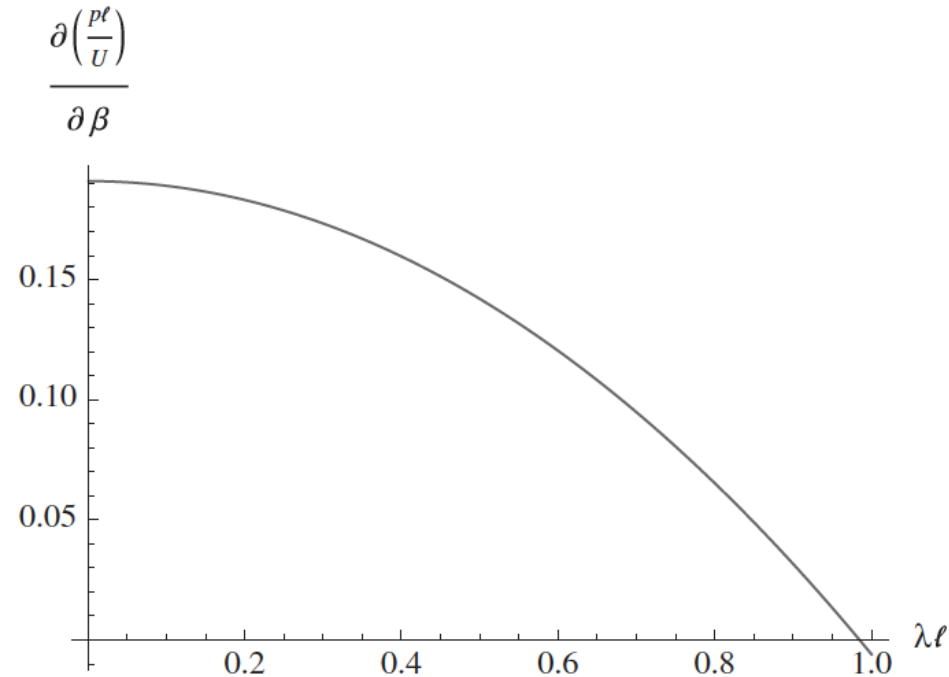
Há uma velocidade do escoamento (e pressão dinâmica) na qual a taxa de rolagem se torna insensível ao comando,

$$\frac{\partial \left(\frac{p\ell}{U} \right)}{\partial \beta} = \frac{\lambda\ell \{cc_{m_\beta} [(\lambda\ell)^2 - 2\sec(\lambda\ell) + 2] - 2ec_{\ell_\beta} [\sec(\lambda\ell) - 1]\}}{2ae[\lambda\ell - \tan(\lambda\ell)]} = 0$$

para valores específicos de e/c e para coeficientes aerodinâmicos da seção bidimensional, a equação poderá ser resolvida numericamente para se encontrar as raízes $\lambda\ell$, cujo menor valor estará associado com a velocidade de reversão de comando da asa elástica.

Uma alternativa é plotar a variação da taxa de rolagem pelo ângulo de comando em função das raízes e, assim determinar a velocidade de reversão.

Por exemplo, para $e = 0.25c$, $c_{\ell\beta} = 0.8$, and $c_{m\beta} = -0.5$



$$\int_0^\ell y L'(y) dy = \int_0^\ell y q c \left[a \left(\theta - \frac{py}{U} \right) + c_{\ell\beta} \beta \right] dy$$



Referências

1 - An Introduction to the Theory of Aeroelasticity

Y.C. Fung

- A leitura do Capítulo 4 (item 4.2 até 4.6) fornece um estudo aprofundado sobre o tema.

2 - Introduction to structural dynamics and aeroelasticity

D. Hodges and A. Pierce

- Leitura do Capítulo 4 (4.2.5) e solução dos problemas 20 e 21 no final do capítulo.