PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 8: Resposta em frequência de sistemas LIT

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Abril 2025

Sumário

Sumário

Bibliografia Básica

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
  - Capítulo 3.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
  - Capítulo 9.

Outras fontes recomendadas:

- Colab com os exemplos da aula.
- Documentação do signal.freqz.

Sumário

Resposta à exponencial complexa $Ae^{j\omega}$

- Seja um sistema LIT com resposta ao impulso $h[n]$.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

- Vejamos o que acontece ao aplicar a entrada $x[n] = Ae^{j\omega n}$, com $A, \omega \in \mathbb{R}$ e $j \triangleq \sqrt{-1}$:

$$y[n] \underbrace{=}_{\text{LIT}} x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)}$$

$$= Ae^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{\text{Constante função de } \omega}$$

- Definimos então

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}$$

Resposta em frequência

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}$$

- Com esta definição, $H\left(e^{j\omega}\right)$ é uma função da variável real ω que assume valores complexos. Podemos escrever

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\angle H\left(e^{j\omega}\right)}$$

- Assim, a saída de um sistema LIT à entrada $x[n] = Ae^{j\omega}$ é

$$\boxed{y[n] = H\left(e^{j\omega}\right) Ae^{j\omega} = A|H(e^{j\omega})|e^{j(\omega n + \angle H(e^{j\omega}))}.}$$

- Ou seja, a saída devido a uma exponencial complexa, é outra exponencial complexa com a mesma frequência! Sistema consegue mudar apenas o módulo e fase da exponencial!
- Dizemos que $x[n] = Ae^{j\omega}$ é uma autofunção dos sistemas LIT.

Propriedades de $H\left(e^{j\omega}\right)$

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}$$

- $H\left(e^{j\omega}\right)$ é chamada de *resposta em frequência* do sistema cuja resposta ao impulso é $h[n]$.

Propriedades

A resposta em frequência $H(e^{j\omega})$ é:

- função de uma variável contínua ω (por isso usamos parênteses)
- Periódica com período 2π (Provar!)

Classificação de Sistemas por Frequência

- Veja que $|H(e^{j\omega})|$ modifica a amplitude da exponencial complexa que entra no sistema: Faz sentido a ideia de filtros seletivos em frequência.

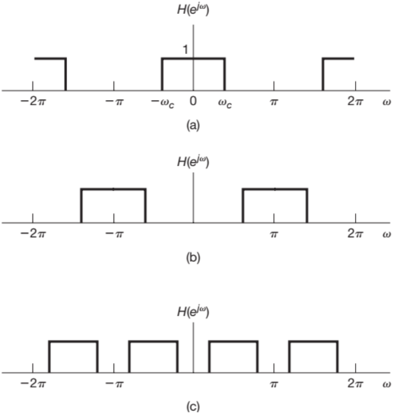


Figura 3.28 Filtros seletivos em frequência ideais de tempo discreto: (a) passa-baixas; (b) passa-altas; (c) passa-faixa.

Sumário

Exercício

Alguns sistemas FIR

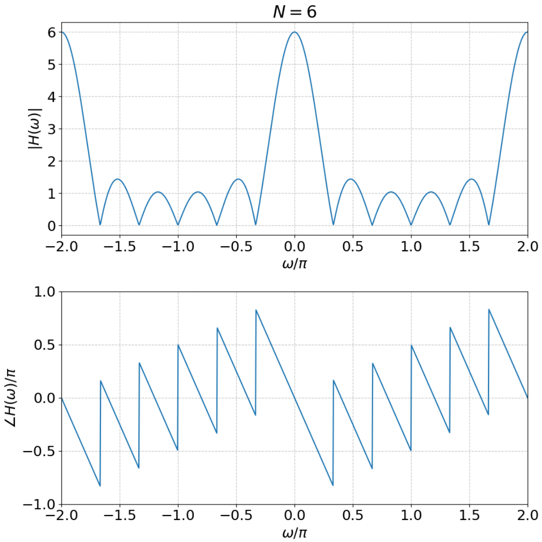
Calcular e esboçar o módulo de $H(e^{j\omega})$ para:

a. $h[n] = \delta[n]$
b. $h[n] = u[n] - u[n-6]$
c. $h[n] = 1$ para $0 \leq n \leq N$, 0 caso contrário

Desenhar diagramas de blocos que implementem os sistemas.

Em Python - usando resultado do exercício

```
def resp_freq(N):
    w = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.
     pi, 1000)
    H = np.empty(len(w), dtype=
     complex)
    H[w==0] = N
    H[w!=0] =
    (1-np.exp(-1j*w[w != 0]*N))/
    (1 - np.exp(-1j*w[w != 0]))
    return w, H
N = 6
w, H = resp_freq(N)
plt.plot(w/np.pi, np.abs(H))
plt.plot(w/np.pi, np.angle(H)/np.pi)
```



Em Python - usando signal.freqz

```
N = 6
b = np.ones(N)
a = 1
wdesejado =
np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 1000)
w, H = signal.freqz(b, a,wdesejado)
plt.plot(w/np.pi, np.abs(H))
plt.plot(w/np.pi, np.angle(H)/np.pi)
```