

Propriedades Mecânicas de Cerâmicas

Estatística de Weibull

Prof. Dr. Eduardo Bellini Ferreira
Departamento de Engenharia de
Materiais – EESC/USP

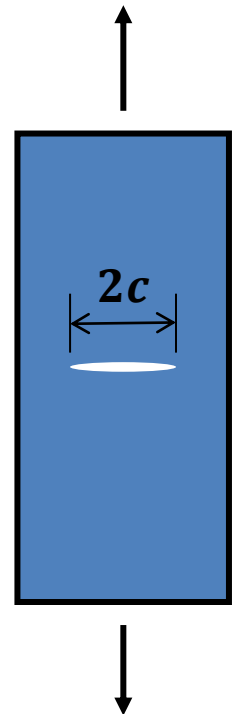
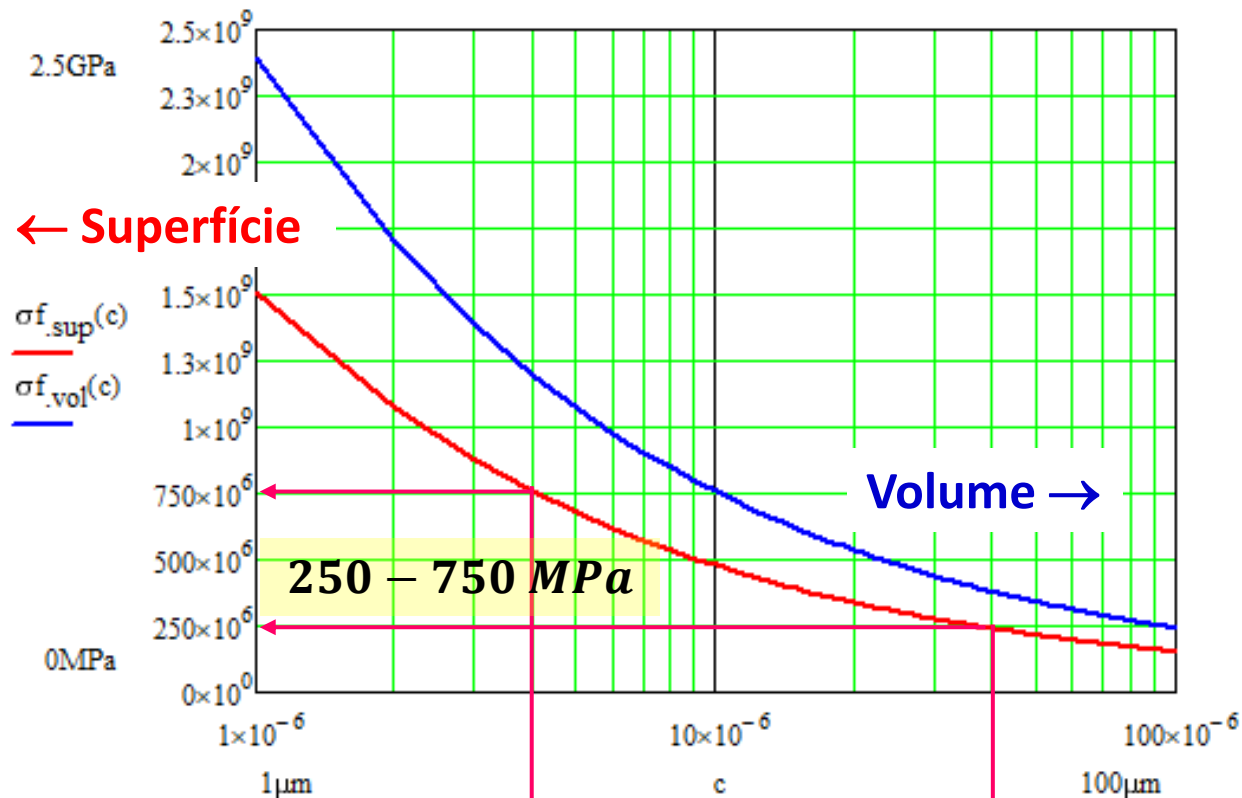
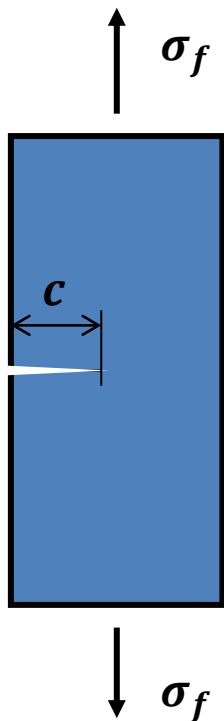
Variação da **tensão de fratura** para a **alumina** em função do **tamanho crítico de trinca na superfície**

$$\sigma_f(c) = \frac{1}{Y} \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi c}}$$

$$K_{IC} = 3 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

$$Y_{sup} = 1,12$$

$$Y_{vol} = 1$$



4 – 13 μm

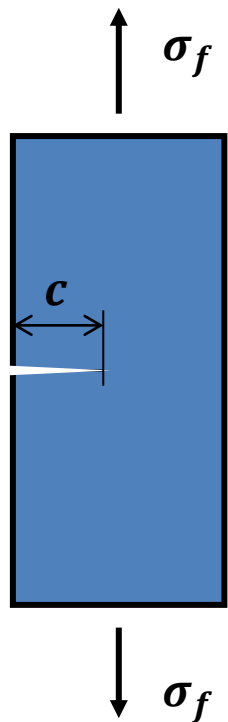
Variação da **tensão de fratura** para o **vidro** em função do tamanho crítico de trinca na superfície

$$\sigma_f(c) = \frac{1}{Y} \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi c}}$$

$$K_{IC} = 0,5 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$$

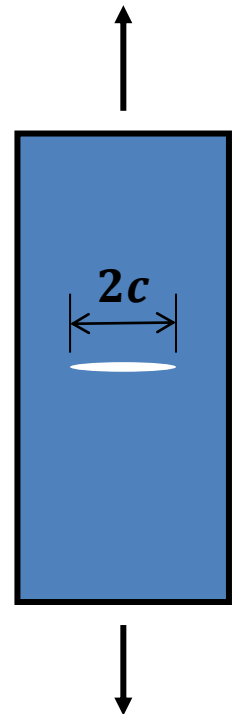
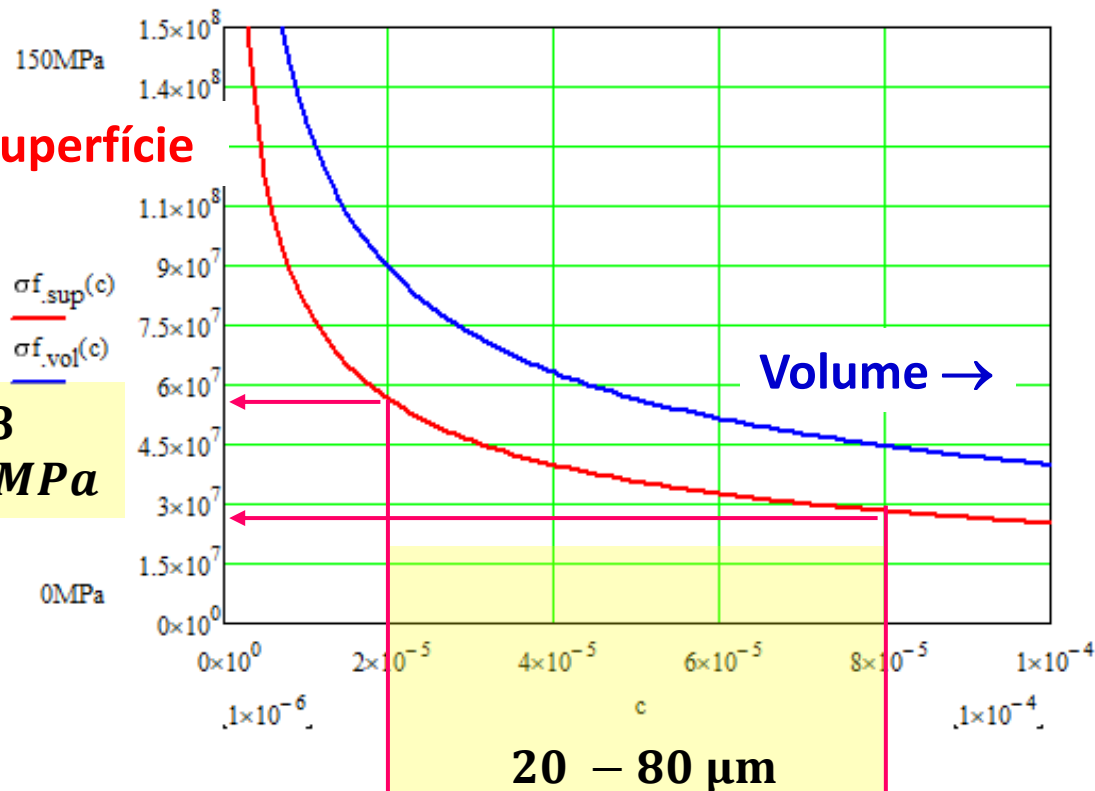
$$Y_{sup} = 1,12$$

$$Y_{vol} = 1$$



← Superfície

28
a 56 MPa



Variação dos resultados de resistência mecânica de materiais cerâmicos

- Quando ensaiamos um série de corpos de prova cerâmicos, observamos **grande variação dos resultados**.
- Mesmo se os CPs forem provenientes de um mesmo lote de fabricação.
- Isso é devido à
 - **distribuição de defeitos** geradores de trincas nos CPs
 - **grande sensibilidade** das cerâmicas a pequenas variações nas dimensões e orientações desses defeitos (consequência do baixo K_{Ic})

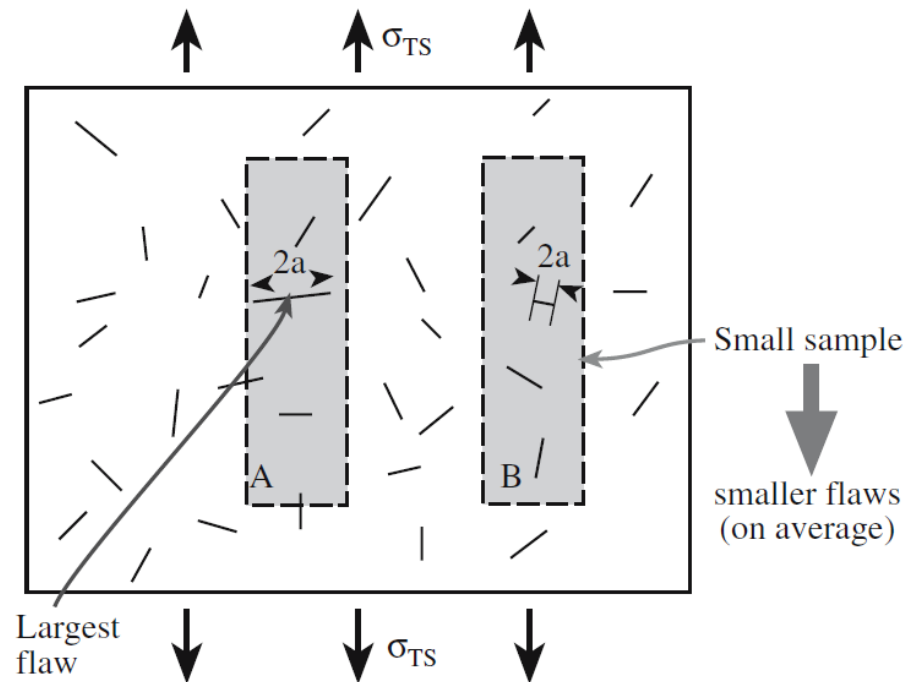


FIGURE 16.22 The largest flaw will be the weakest link and the source of failure. Smaller samples have smaller flaws.

Estatística da fratura

- A estatística da fratura é baseada no critério do **elo mais fraco**.
- Se aplica muito bem a materiais cerâmicos frágeis, ou seja, que falham pela **propagação instável de trinca a partir do maior defeito** (o elo mais fraco neste caso)
- Existem várias funções (equações) de distribuição estatística são baseadas no critério do elo mais fraco:
 - Distribuição de Weibull
 - Distribuições de densidade de falha
 - Distribuições do valor extremo
- A **distribuição de Weibull** é a mais popular, pela simplicidade matemática e maior concordância com os dados experimentais.

Distribuição de Weibull

- A probabilidade de ruptura de uma **corrente com N elos** semelhantes é controlada pela **probabilidade de ruptura ou falha do elo mais fraco, P_f** .
- Sendo **P_s a probabilidade de sobrevivência de um elo**, a **probabilidade de sobrevivência de uma corrente de N elos, P_{sN}** , pode ser escrita como a multiplicação das probabilidades dos N elos individuais:

$$P_{sN} = P_s^N = (1 - P_f)^N$$
$$P_{sN} = (1 - P_{fN}) = (1 - P_f)^N$$
$$P_{fN} = 1 - (1 - P_f)^N$$

- Essa última expressão pode ser escrita de forma aproximada como:

$$P_{fN} = 1 - \exp(-Nf(\sigma))$$

considerando $f(\sigma)$ uma função do parâmetro σ , positiva, crescente, que vai para zero quando $\sigma = \sigma_{min}$. A função mais simples que satisfaz essas condições (segundo Weibull) é :

$$f(\sigma) = \left(\frac{\sigma - \sigma_{min}}{\sigma_0} \right)^m$$

Distribuição de Weibull

- A aplicação para materiais é feita aproximando-se o comportamento do material ao de uma corrente, cujo número de elos é dado pelo volume (ou superfície) em questão:

$$P_F = 1 - \exp \left[- \iiint \left(\frac{\sigma - \sigma_{min}}{\sigma_0} \right)^m dV \right]$$

onde

V é o volume

σ é a tensão sobre um elemento de volume dv

σ_{min} é a tensão mínima para a qual existe uma expectativa de falha

σ_0 é um parâmetro de normalização de tensão, e

m é o chamado de módulo de Weibull

- Observe que $Nf(\sigma)$ é substituído por uma integral de volume, pois o material não é mais um conjunto discreto de componentes, mas é um meio contínuo.
- σ_{min} é frequentemente igualado a zero, sem muito erro, o que significa assumir que sempre há uma probabilidade de falha por menor que seja a tensão. Isso dá uma análise pessimista ao sistema, o que é mais seguro.**

Distribuição de Weibull

- Reescrevendo a expressão para a probabilidade acumulada de falha com $\sigma_{min} = 0$:

$$P_F = 1 - \exp \left[- \iiint \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \right]$$

- Que também pode ser expressa da seguinte forma, introduzindo o termo P_S , a probabilidade de sobrevivência:

$$P_S = 1 - P_F = \exp \left[- \iiint \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \right]$$

- Para ensaios de tração pura e uniforme (todo volume do corpo de prova fica sob tração constante), considerando **volume unitário**:

$$1 - P_F = \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right]$$

Distribuição de Weibull

$$P_F = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right]$$

- Rearranjando e aplicando logaritmo nos dois lados da expressão acima:

$$\ln \frac{1}{(1 - P_F)} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m$$

- E aplicando logaritmo de novo:

$$\ln \left[\ln \frac{1}{(1 - P_F)} \right] = m \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) = \ln \left(\frac{1}{\sigma_0^m} \right) + m \ln \sigma$$

Distribuição de Weibull

- Para determinação de σ_0 , consideramos:

$$\ln \left[\ln \frac{1}{(1 - P_F)} \right] = 0$$

$$\left[\ln \frac{1}{(1 - P_F)} \right] = 1$$

$$\frac{1}{(1 - P_F)} = e^1$$

$$P_F = 1 - \frac{1}{e} = 0,63 \text{ ou } 63\%$$

- Nesse caso,

$$m \ln \sigma = - \ln \left(\frac{1}{\sigma_0^m} \right)$$

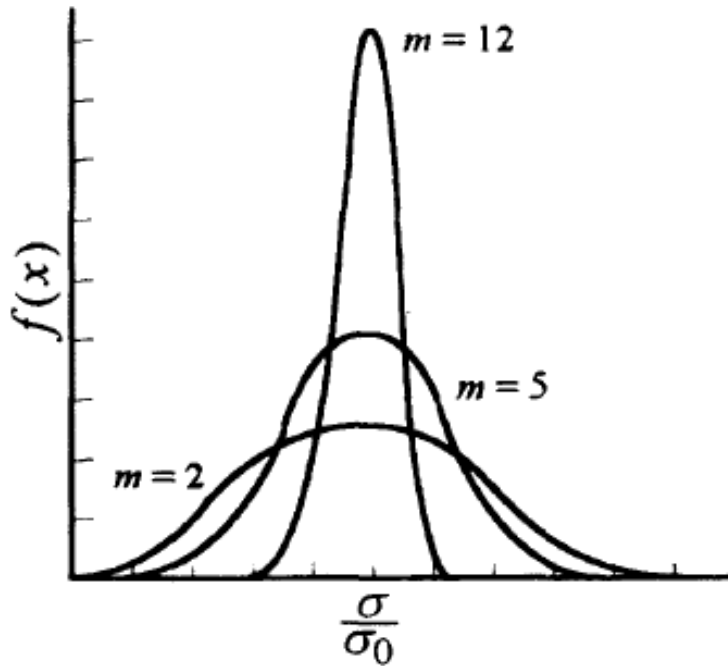
$$\ln \sigma^m = \ln(\sigma_0^m)$$

$$\sigma = \sigma_0$$

Assim, σ_0 = tensão característica é a tensão para a qual a probabilidade de falha é 0,63 ou 63%; ou a probabilidade de sobrevivência é 0,37 ou 37% (1/e).

Projeto determinístico vs. abordagem estatística

Função de distribuição de Weibull –
a resistência do elo mais fraco.



$$f(x) = m(x)^{m-1} \exp(-x^m)$$

$$f\left(\frac{\sigma - \sigma_{\min}}{\sigma_0}\right) = m\left(\frac{\sigma - \sigma_{\min}}{\sigma_0}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_{\min}}{\sigma_0}\right)^m\right]$$

- m = módulo de Weibull
- σ_0 = resistência característica, para a qual a probabilidade de sobrevivência é 0,37 ($1/e$)
- $\sigma_{\min}$ = nível de tensão abaixo do qual a probabilidade de fratura é zero

Projeto determinístico vs. abordagem estatística

Forma acumulada da distribuição de Weibull

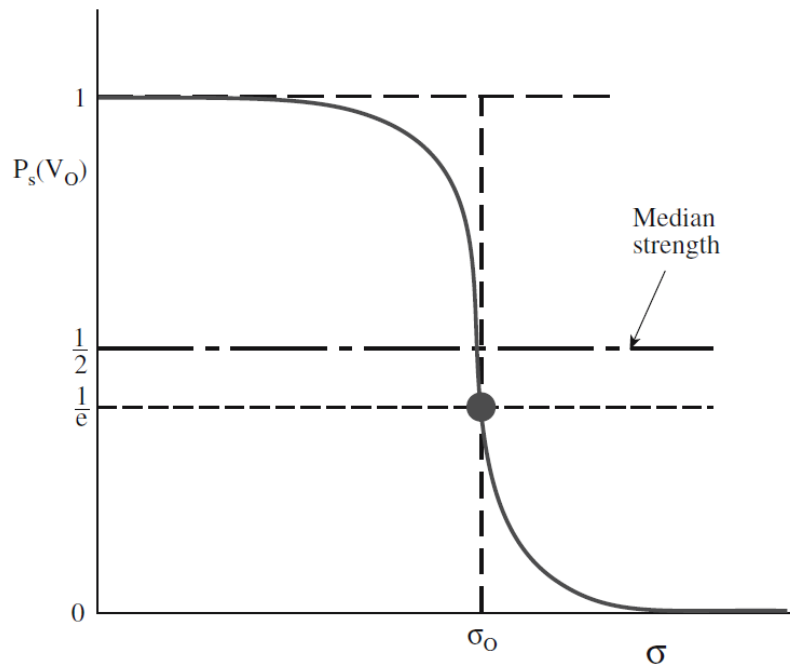
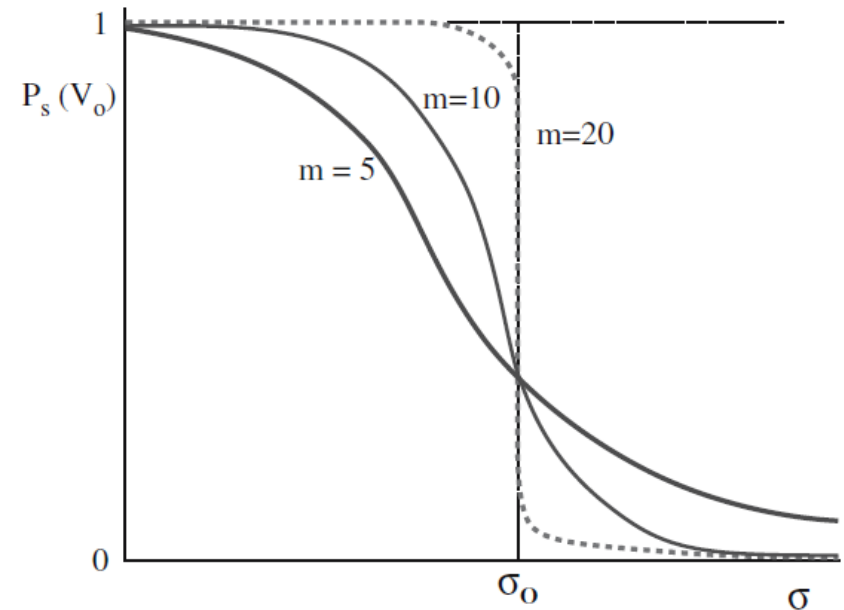


FIGURE 16.19 The Weibull distribution function.



Efeito do módulo de Weibull (m)
na probabilidade de sobrevivência.

Aços tem m da ordem de 100!

$$P_S = 1 - P_F = \exp \left[- \int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_{\min}}{\sigma_0} \right)^m dV \right] \quad (16.18)$$

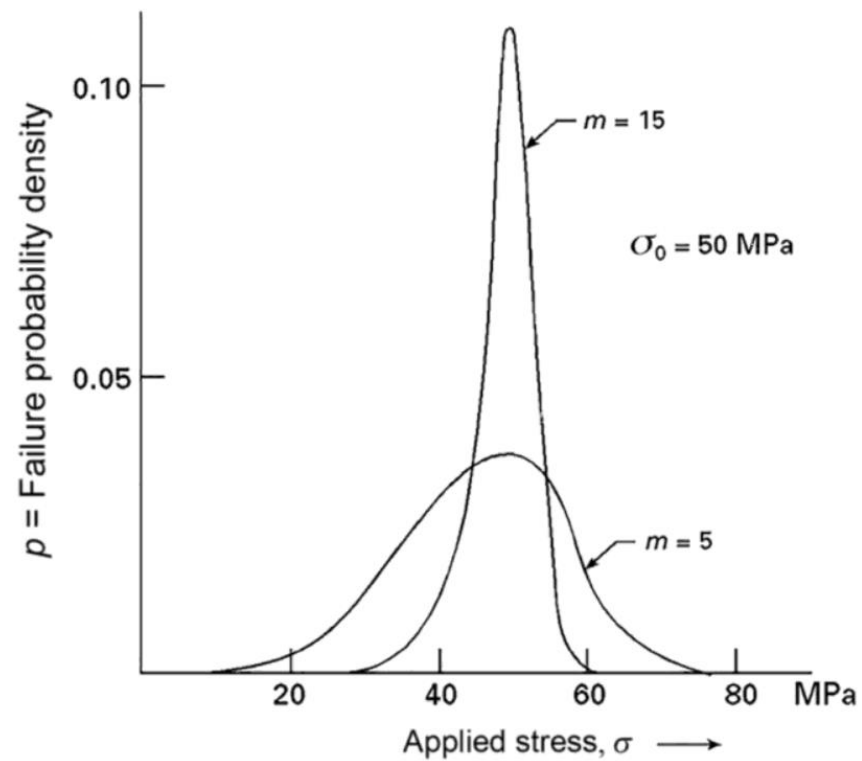
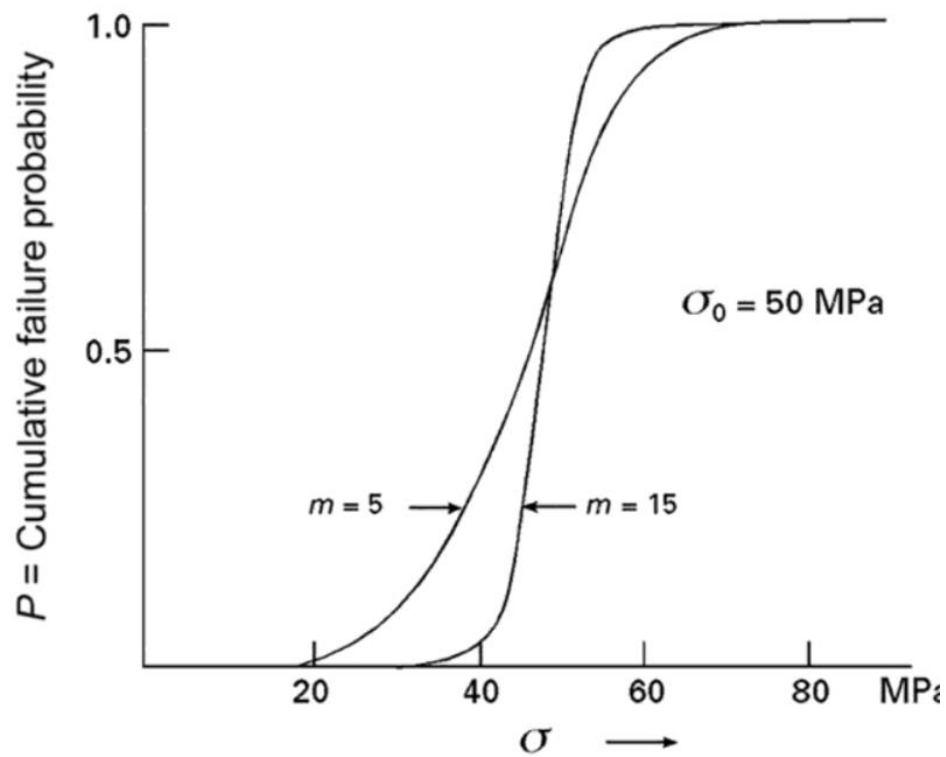


Gráfico de Weibull

$$\ln \left[\ln \left(\frac{1}{P_s} \right) \right] = m \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m = m \ln \sigma - m \ln \sigma_0$$

- Equação de uma reta **$y = bx + cte.$**
- Quanto maior a inclinação, maior o módulo de Weibull m e menor é a variabilidade dos resultados.
- Cerâmicas têm valores de m entre 5 e 20 (aços $m = 100$).
- É preciso um grande número de corpos de prova para determinação de m :
 - 30 cps resultam m com 20% de erro
 - ~100 cps são necessários para m com +90% confiança

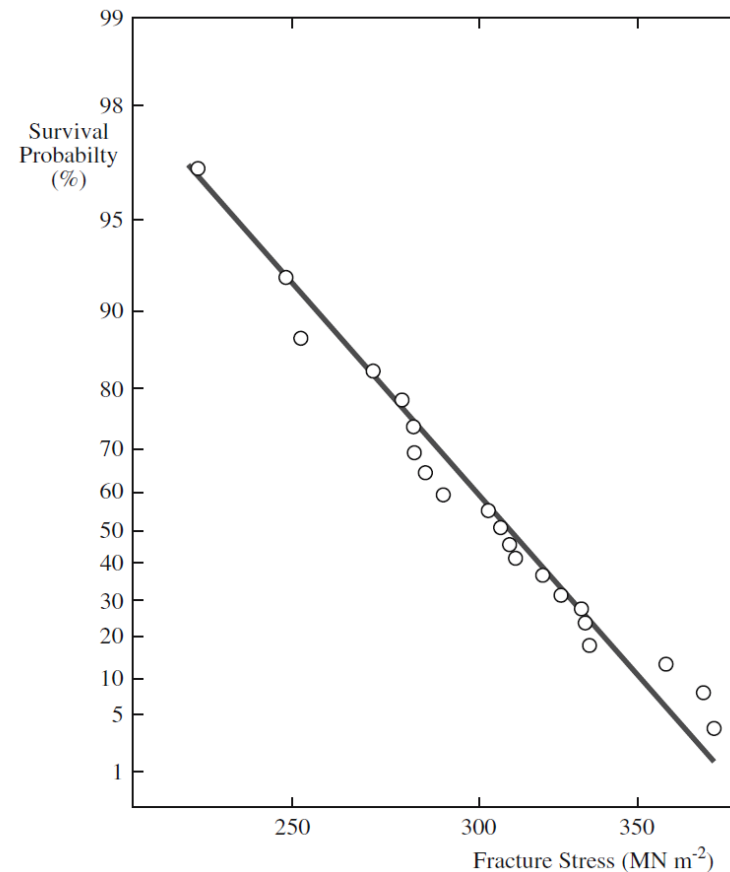


FIGURE 16.20 Weibull plot showing probability of failure as a function of fracture stress.

Procedimento para estatística de Weibull

1. Organizar os dados em ordem crescente de resistência mecânica
2. Determine P_S para cada resultado:
$$P_S = 1 - \frac{j}{N+1}, \text{ onde } j \text{ é a posição do resultado}$$

ou
$$P_S = 1 - \frac{j-0,3}{N+0,4}, \text{ que é mais preciso}$$
3. Calcule $\ln \sigma$ e $-\ln \left(\ln \frac{1}{P_S} \right)$
4. Faça um gráfico de $-\ln \left(\ln \frac{1}{P_S} \right)$ versus $\ln \sigma$
5. Por regressão linear, obtenha a equação da reta. O coeficiente angular é o módulo de Weibull, m .

Gráfico de Weibull

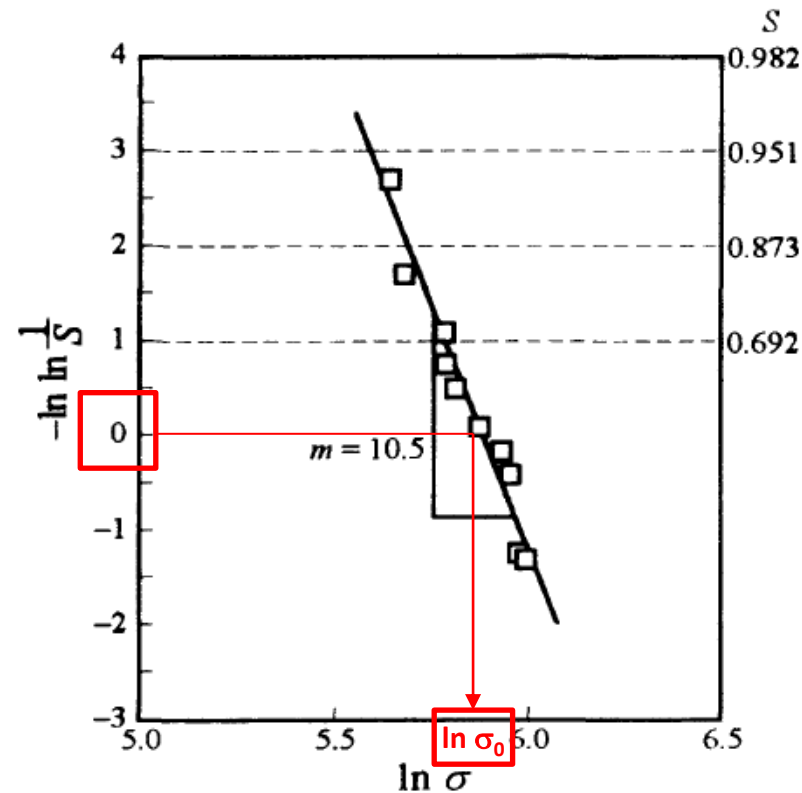


Figure 11.21 Weibull plot of data shown in Table 11.2. Slope of the line is the Weibull modulus m . The actual survival probability is shown on the right-hand side. At low stresses, S is large (left-hand corner of figure).²⁰⁴

²⁰⁴ The reason that $-\ln \ln(1/S)$ is plotted rather than $\ln \ln(1/S)$ is aesthetic, such that the high survival probabilities appear on the upper left-hand sides of the plots.

Efeito do volume

$$P_S = \exp \left[- \left(\frac{V}{V_0} \right) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right]$$

onde $V = nV_0$

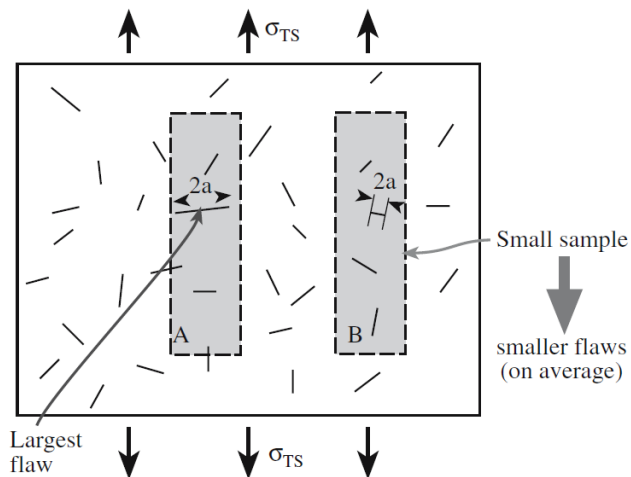


FIGURE 16.22 The largest flaw will be the weakest link and the source of failure. Smaller samples have smaller flaws.

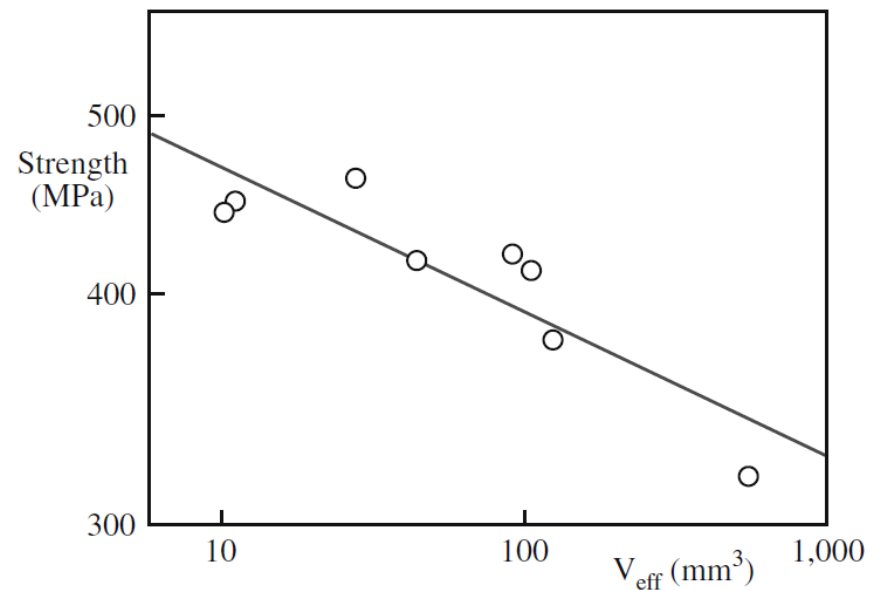


FIGURE 16.23 Fracture stress as a function of volume for Si_3N_4 springs.

Efeito do volume

- Para outros tipos de ensaio mecânico que não o de tração pura, consideramos um volume efetivo $V_{ef} = L_F V$, onde L_F é um fator de carregamento que depende do ensaio:

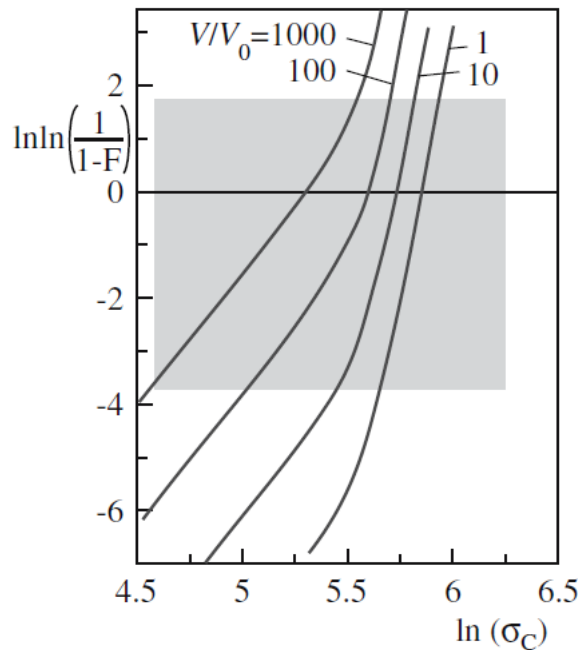
TABLE 16.9 Examples of Loading Factors^a

<i>Geometry</i>	<i>Loading factor, L_F</i>
Uniaxial tension	1
Pure bending	$1/[2(m + 1)]$
Three-point bending	$1/[2(m + 1)^2]$
Four-point bending	$(mL_i + L_o)/[2L_o(m + 1)^2]$

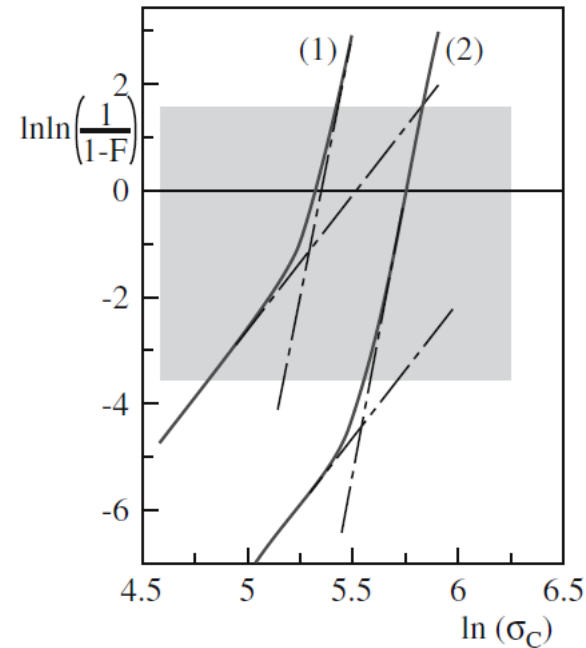
^a L_i , inner span; L_o , outer span.

Efeito de duas populações de defeitos

$$P_S = \exp \left[- \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_1} \right)^{m_1} - \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_2} \right)^{m_2} \right] \quad P_S = \exp \left[- \frac{V_{\text{eff1}}}{V_0} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{v1}} \right)^{m_1} - \frac{V_{\text{eff2}}}{V_0} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{v2}} \right)^{m_2} \right]$$



(A)



(B)

FIGURE 16.24 (a) Different flaws lead to different values of m . (b) Weibull plot for a sample having both surface and volume flaws.

Probabilidade de falha para alguns níveis de responsabilidade

TABLE 16.10 Suggested Failure Probabilities

P_F	<i>Possible consequences of failure</i>	<i>Example</i>
0.3	Slight inconvenience	Sticks of chalk
10^{-2}	Inconvenience and small expense	Ceramic cutting tool
10^{-6}	Injury	Window on a vacuum system
10^{-8}	Loss of life and significant expense	Ceramic protective tile on space shuttle

Proof testing: 100% dos componentes ensaiados em uma tensão máxima σ_{PT}

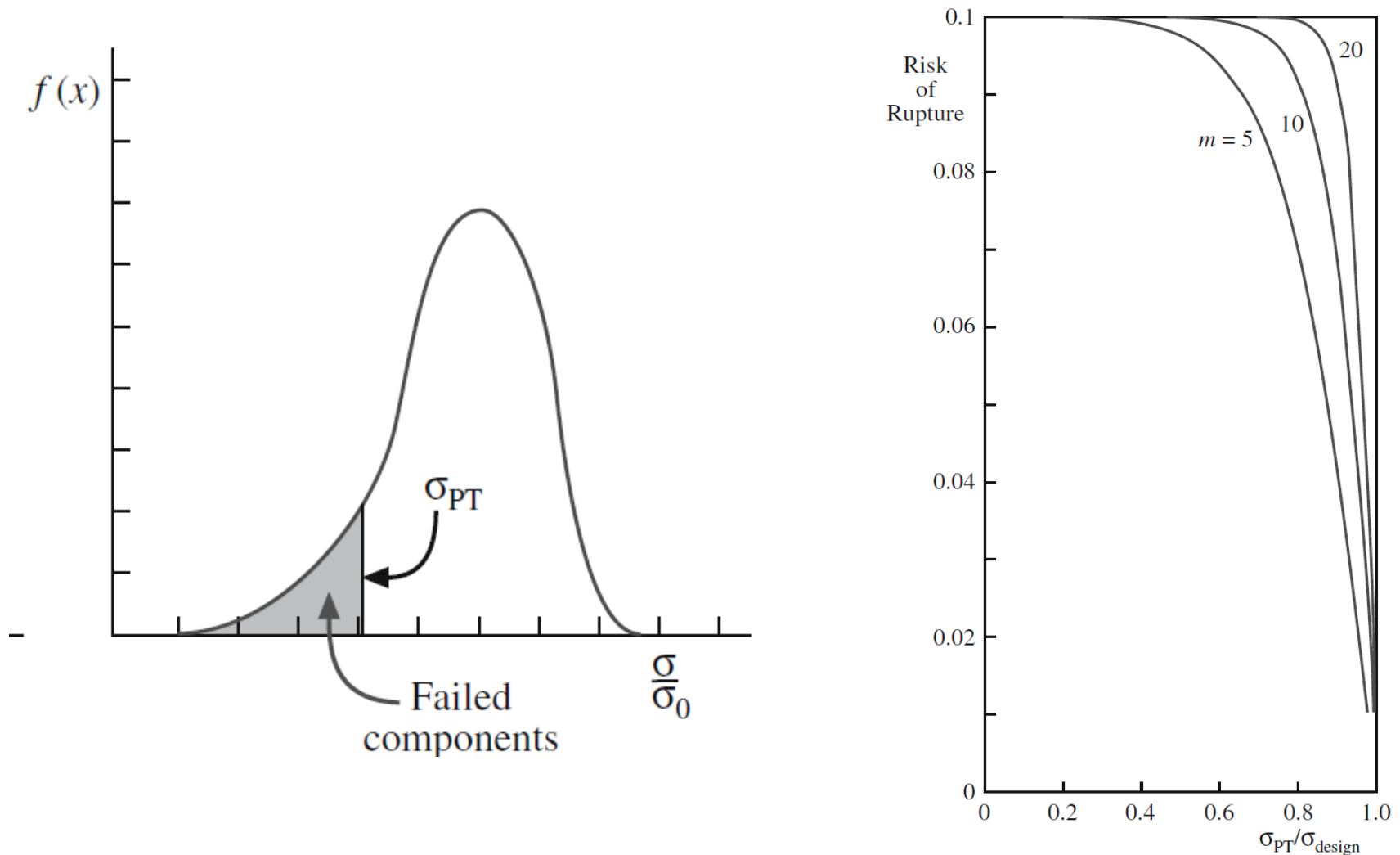


FIGURE 16.26 Plot showing the risk of rupture after proof testing to the ratio of proof-test stress to design stress.

Efeito do tempo

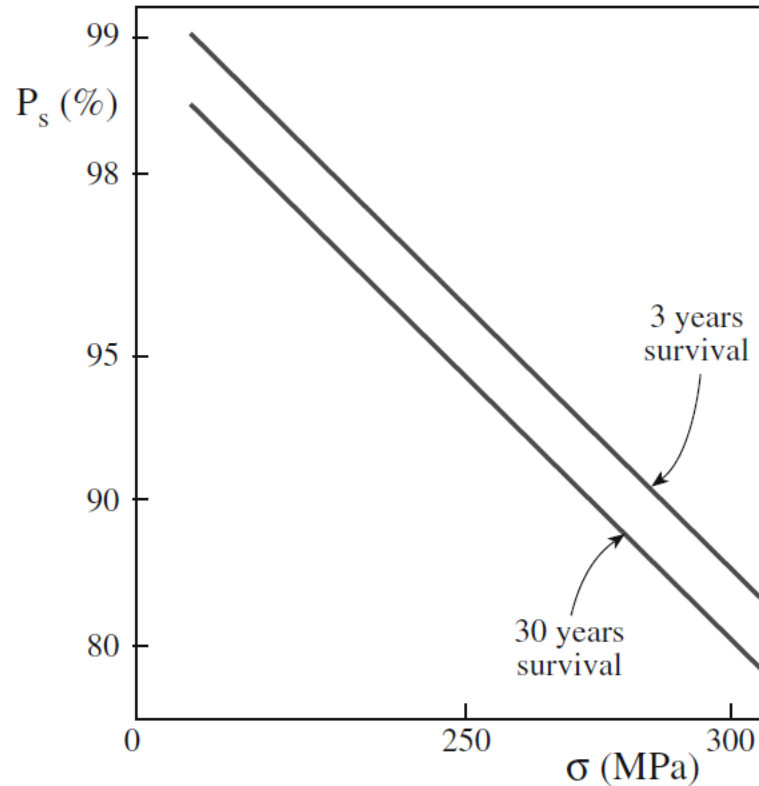


FIGURE 16.27 SPT diagram for medical grade Al_2O_3 . The survival probability decreases with increasing stress and longer times.