

4. Aeroelasticidade Estática 2

Carlos De Marqui Junior

Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

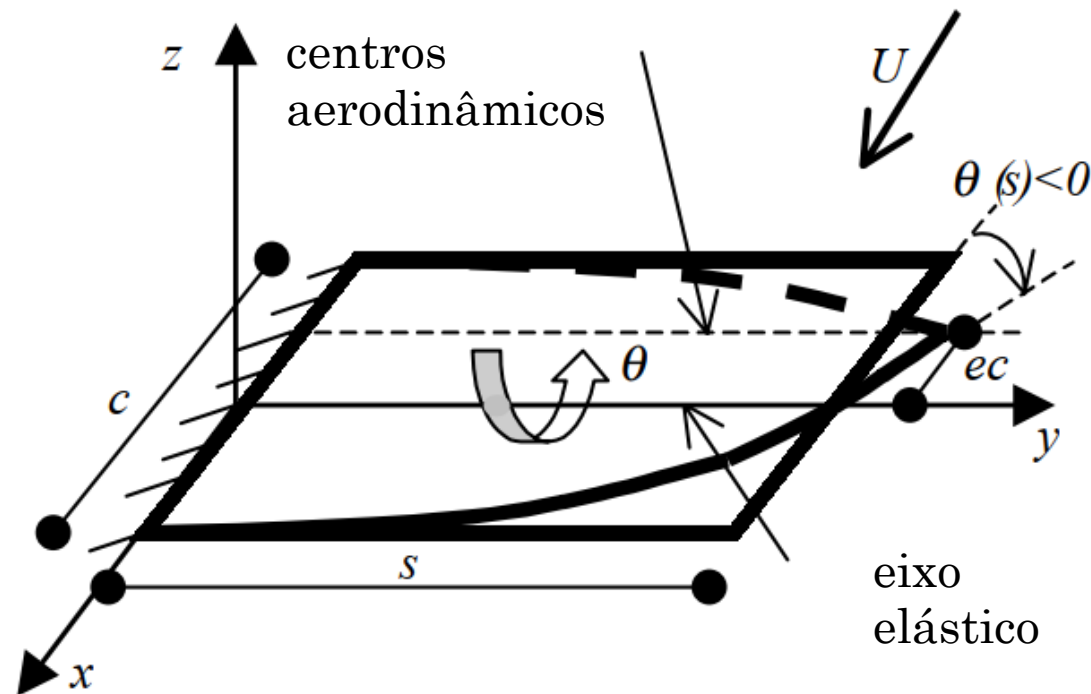
Universidade de São Paulo

Classificação de problemas aeroelásticos

	Estática	Dinâmica
Estabilidade	Divergência	Flutter; Flutter de estol
Resposta	Distribuição de carregamento; Efetividade de comando; Reversão de comando	Resposta à rajada; Resposta de comando; Cargas dinâmicas de pouso; Buffeting; Galloping

4.2 Asa de corda constante

- Representação viga de razão de aspecto elevado ($s \gg c$), asa reta (corda constante). A asa é considerada uma estrutura unidimensional com seções rígidas no sentido da corda.



- Os seguintes parâmetros são definidos:

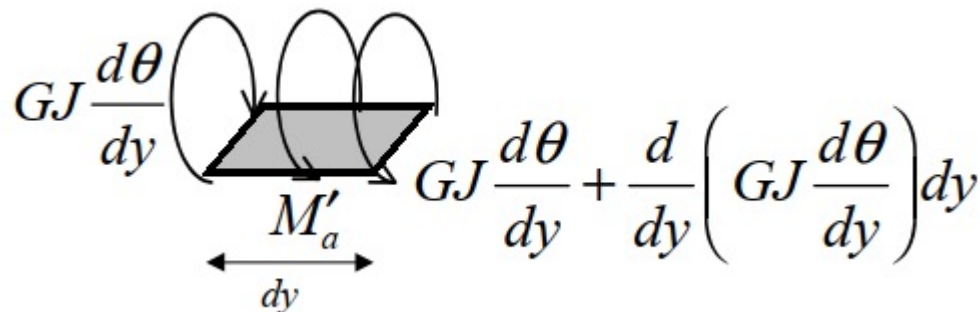
$\theta(y)$ rotação de uma seção na posição y em torno de e.e.
(positivo anti-horário)

M'_a momento de arfagem aerodinâmico nariz para cima por unidade de envergadura

G módulo de cisalhamento

J momento polar da área (GJ é a rigidez torcional da seção transversal)

- Considerando uma seção infinitesimal da viga:



- A condição de equilíbrio estático, em torno do e.e:

$$\begin{aligned} \underline{-GJ \frac{d\theta}{dy} + GJ \frac{d\theta}{dy} + \frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) dy + M'_a dy = 0} \\ \therefore \frac{d}{dy} \left(GJ \frac{d\theta}{dy} \right) + M'_a = 0 \quad (2.3) \end{aligned}$$

que é a equação diferencial de segunda ordem que governa a torção da viga. Duas condições de contorno estão associadas :

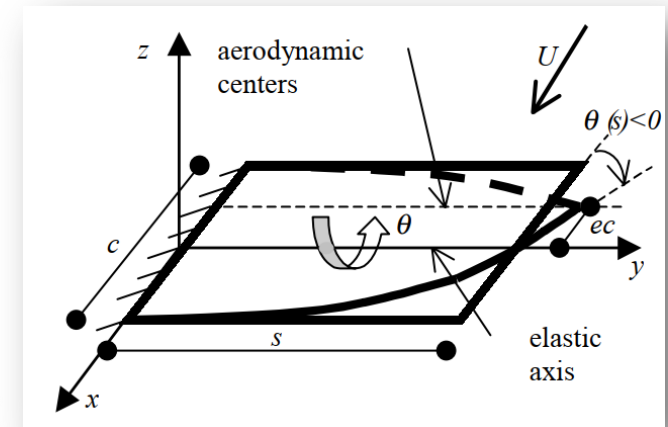
$$\theta = 0 \quad @ \quad y = 0$$

$$GJ \frac{d\theta}{dy} = 0 \quad @ \quad y = s$$

- A teoria das faixas aerodinâmicas é assumida - a sustentação e o momento aerodinâmico em uma seção dependem apenas do ângulo de ataque nesta seção, ou seja, são independentes do ângulo de ataque em outros locais. A teoria negligencia os efeitos de ponta de asa ("envergadura finita"). Assim, a partir da Seção 2.1, em uma seção específica ao longo da asa:

$$M'_a = M'_0 + L'ec = qec^2 a(\alpha(y) + \theta(y))$$

- Substituição em (2.3), resulta após normalização:



$$\bar{y} = y/s$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\bar{y}^2} + \bar{\mu}^2 \theta = \bar{K} \quad (2.4) \quad \text{onde}$$

$$\bar{\mu}^2 = \frac{qs^2}{GJ} ec^2 a$$

$$\bar{K} = -\frac{qc^2 s^2}{GJ} ea \alpha(\bar{y})$$



- Observe que, para a asa de corda constante em conexão com o grau de liberdade de torção, foram definidos os seguintes operadores estruturais e aerodinâmicos:

$$S \equiv GJ \frac{d^2}{dy^2}$$

$$A \equiv qc^2 ea$$

- O operador estrutural é diferencial e o operador aerodinâmico é algébrico.

- Como na seção 2.1, o problema de estabilidade (divergência) é determinado pela equação homogênea (problema de autovalor):

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{y}^2} + \bar{\mu}^2\theta = 0 \quad (2.5)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \quad @ \quad \bar{y} = 0 \\ \frac{d\theta}{d\bar{y}} &= 0 \quad @ \quad \bar{y} = 1 \end{aligned}$$

- A solução geral da equação diferencial de segunda ordem é dada por:

$$\theta = A \sin \bar{\mu} \bar{y} + B \cos \bar{\mu} \bar{y}$$

- A primeira condição de contorno fornece $B = 0$. Com essas informações, a substituição da segunda condição de contorno na solução geral produz:

$$A \bar{\mu} \cos \bar{\mu} = 0$$

o que leva à solução trivial ($A = 0$ ou $\bar{\mu} = 0$). Ou um conjunto infinito de soluções não triviais, dependendo do valor do argumento - os chamados autovalores de (2.5):

$$\bar{\mu}_n = (2n + 1)\pi/2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\bar{\mu}^2 = \frac{qs^2}{GJ} ec^2 a$$

- O menor desses autovalores ($n = 0$) corresponde ao limite de estabilidade, o valor crítico para a estabilidade. Portanto, a substituição desse valor na definição de $\bar{\mu}$ produz a pressão de divergência da asa:

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{q_{\text{div}} s^2}{GJ} e c^2 a \Rightarrow q_{\text{div}} = \frac{\pi^2 GJ}{4 s^2 c^2 e a}$$

- Cada autovalor corresponde a uma autofunção:

$$\theta_n(y) = \sin(2n+1) \frac{\pi y}{2s} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(normalizada tomando $A = 1$)

- Uma solução para a distribuição de torção a qualquer pressão dinâmica pode ser construída por sobreposição das autofunções. Isso é possível porque as autofunções representam uma base ortogonal para a expansão em série da distribuição de torção:

$$\theta(\bar{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \theta_m(\bar{y}) \quad (2.6)$$

(os coeficientes a_m são chamados de coordenadas generalizadas)

- Suponha também que a função de carregamento - o lado direito de (2.4) - possa ser expandida em séries semelhantes de funções:

$$\bar{K}(\bar{y}) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \theta_m(\bar{y}) \quad (2.7)$$



- Para resolver o problema, os coeficientes b_m devem ser determinados antes que as coordenadas generalizadas.
- A seguinte *condição de ortogonalidade* pode ser facilmente demonstrada para o conjunto (normalizado) de autofunções:

$$\int_0^1 \theta_n(\bar{y}) \theta_m(\bar{y}) d\bar{y} = \begin{cases} 1/2 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots, \infty)$$

- Esta condição pode ser usada para determinar b_n :
- (1) Multiplique (2.7) por θ_n e calcule a integral de 0 a 1:

$$\int_0^1 \bar{K} \theta_n(\bar{y}) d\bar{y} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \int_0^1 \theta_n(\bar{y}) \theta_m(\bar{y}) d\bar{y}$$

(2) Os termos no somatório do lado direito são sempre zero, exceto no caso em que $m = n$ (devido à condição de ortogonalidade). Portanto, a equação anterior simplifica para:

$$b_n = 2 \int_0^1 \bar{K}(\bar{y}) \theta_n(\bar{y}) d\bar{y}$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

• (3) Substitua (2.6) e (2.7) em (2.4):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{d^2 \theta_n}{d\bar{y}^2} + \bar{\mu}^2 a_n \theta_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \theta_n \quad (2.8)$$

(4) Observe que cada par de autovalores e as autofunções correspondentes satisfazem a equação homogênea (2.5):

$$\frac{d^2 \theta_n}{d\bar{y}^2} = -\bar{\mu}_n^2 \theta_n \quad (2.9) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

(5) Substitua (2.9) em (2.8) para obter:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_n (\bar{\mu}^2 - \bar{\mu}_n^2) - b_n] \theta_n = 0$$

resultando em

$$a_n = \frac{b_n}{\bar{\mu}^2 - \bar{\mu}_n^2} \quad (n=0,1,2,\dots)$$



pois a equação deve valer para qualquer valor de n

- A última equação é a solução da equação diferencial para qualquer pressão dinâmica. Representa a distribuição de torção associada à asa elástica em uma condição de voo específica. Usando (2.6) junto com os autovalores e autofunções, obtém-se:

$$\theta(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\bar{\mu}^2 - (2n+1)^2 \pi^2 / 4} \sin(2n+1) \frac{\pi y}{2s}$$

- Isso leva à solução do problema de *distribuição de carregamento* para a asa elástica:

$$M'_a = qc^2 ea (\alpha(y) + \theta(y)) = A [\alpha + \theta]$$

Outra solução possível para o problema:

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{y}^2} + \bar{\mu}^2\theta = \bar{K} \quad (2.4)$$

onde

$$\bar{y} = y/s$$

$$\bar{\mu}^2 = \frac{qs^2}{GJ} ec^2 a$$

$$\bar{K} = -\frac{qc^2s^2}{GJ} ea\alpha(\bar{y})$$

$$\frac{d^2\theta}{d\bar{y}^2} + \bar{\mu}^2\theta = -\bar{\mu}^2\alpha(\bar{y})$$

$$\theta = A \operatorname{sen} \bar{\mu} + B \cos \bar{\mu} - \alpha(\bar{y})$$

$$\bar{\mu} \neq 0$$

$$\theta(0) = 0 \quad B = \alpha(\bar{y})$$

$$\theta'(s) = 0 \quad A = B \tan(\bar{\mu})$$

$$\theta = \alpha(\bar{y}) [\tan(\bar{\mu}s) \operatorname{sen}(\bar{\mu}) + \cos \bar{\mu} - 1]$$



Já que agora a distribuição do angulo elástico (teta) é conhecida podemos calcular a distribuição de sustentação ao longo da envergadura:

$$L' = qca(\alpha + \theta)$$

$$\theta = \alpha(\bar{y})[\tan(\bar{\mu}s)\text{sen}(\bar{\mu}) + \cos \bar{\mu} - 1]$$

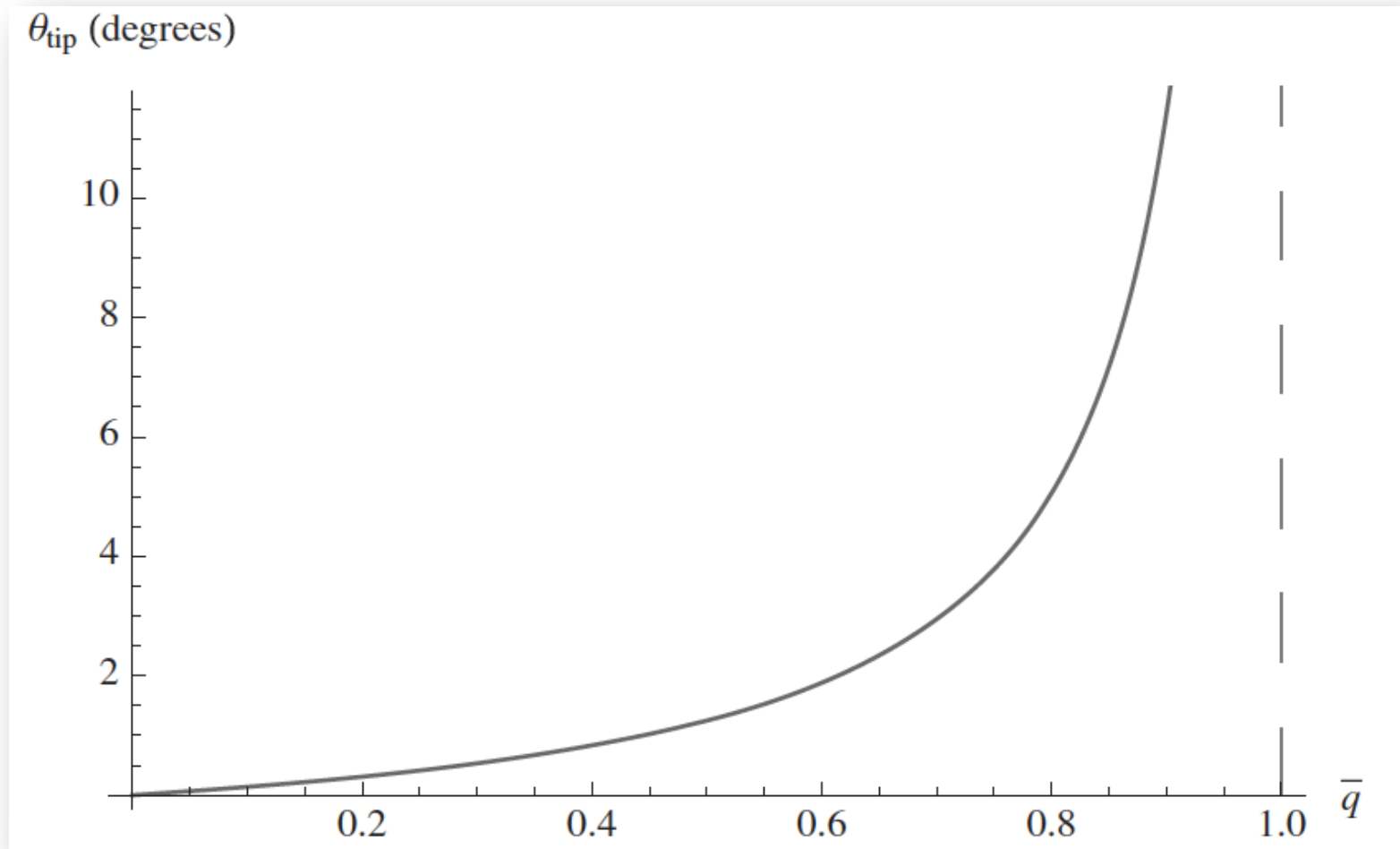
Da expressão de distribuição do ângulo elástico, verifica-se que o ângulo vai para infinito quando : $\bar{\mu} = \frac{\pi}{2}$

$$q_D = \frac{GJ}{c^2 ea} \left(\frac{\pi}{2s} \right)^2$$

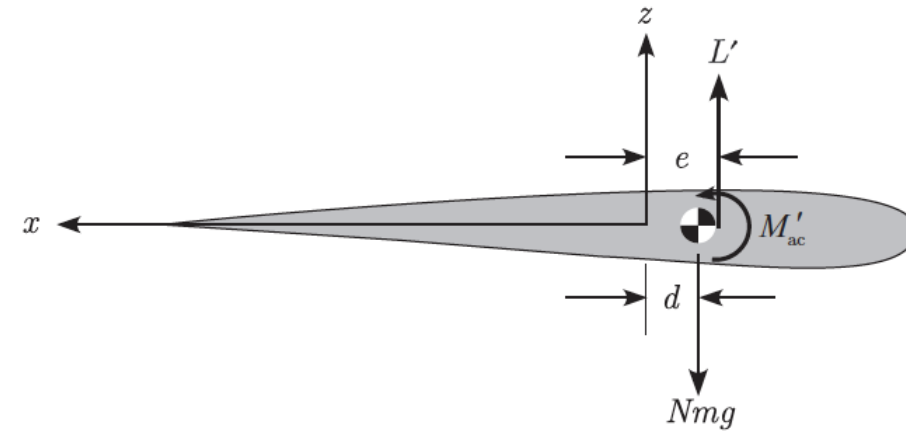
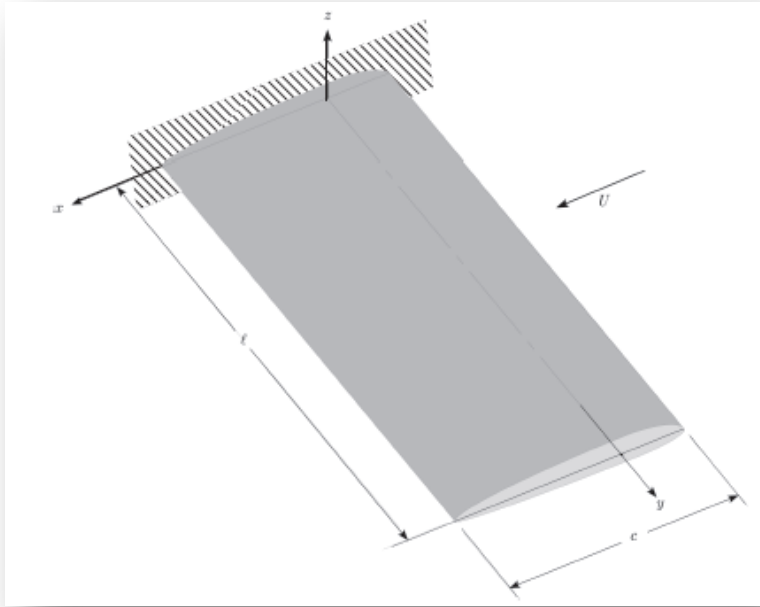
$$\bar{\mu}s = \frac{\pi}{2} \sqrt{\bar{q}}$$

$$\bar{q} = \frac{q}{q_D}$$

$$\theta(s) = \alpha \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\bar{q}} - 1 \right) \right]$$



Distribuição de carregamento na asa retangular, interpretação física



Momento por unidade de envergadura em torno do e.e. (positivo bordo de ataque para cima:

$$M' = M'_{ac} + eL' - Nmgd$$

onde

$$L' = qcc_\ell$$
$$M'_{ac} = qc^2c_{mac}$$
$$N = \frac{L}{W} = 1 + \frac{A_z}{g}$$

$$c_\ell(y) = a\alpha(y) \quad \alpha(y) = \alpha_r + \theta(y)$$

Distribuição de carregamento na asa retangular, interpretação física

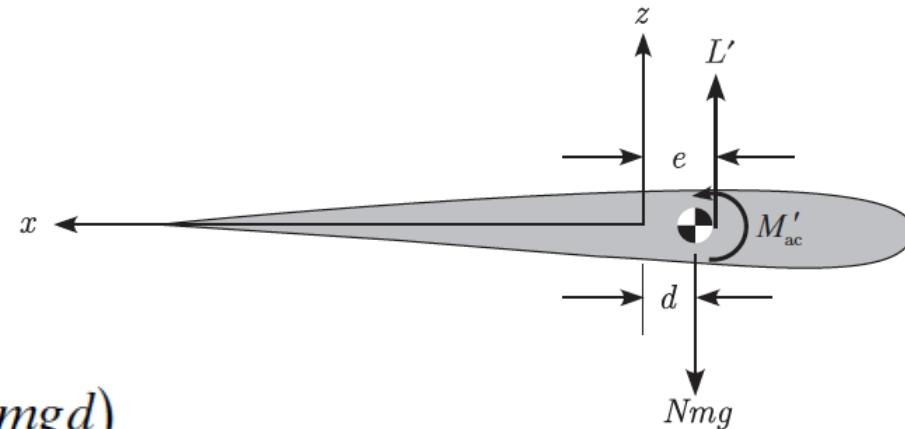
$$\frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\overline{GJ} \frac{d\theta}{dy} \right) = -M'$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{qcae}{\overline{GJ}}\theta = -\frac{1}{\overline{GJ}} (qc^2c_{mac} + qcae\alpha_r - Nmgd)$$

$$\lambda^2 \equiv \frac{qcae}{\overline{GJ}}$$

$$\lambda^2 \overline{\alpha}_r \equiv \frac{1}{\overline{GJ}} (qc^2c_{mac} - Nmgd)$$

$$\overline{\alpha}_r = \frac{cc_{mac}}{ae} - \frac{Nmgd}{qcae}$$



Momento por unidade de envergadura em torno do e.e. (positivo bordo de ataque para cima:



Distribuição de carregamento na asa retangular, interpretação física

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2(\alpha_r + \bar{\alpha}_r)$$

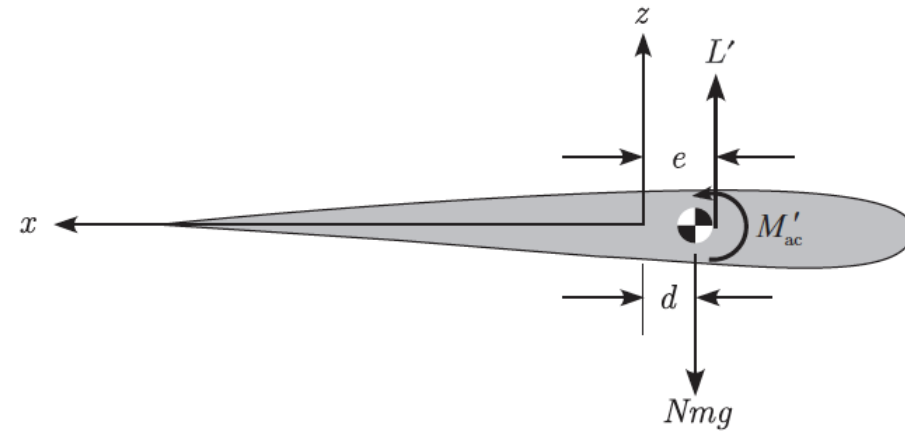
$$\theta = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) - (\alpha_{\text{r}} + \bar{\alpha}_{\text{r}})$$

$$\theta(0) = 0: \quad B = \alpha_{\mathrm{r}} + \overline{\alpha}_{\mathrm{r}}$$

$$\theta'(\ell) = 0: \quad A = B \tan(\lambda \ell)$$

Distribuição de torção ao longo da envergadura:

$$\theta = (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) [\tan(\lambda \ell) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1]$$



Distribuição de carregamento na asa retangular, interpretação física

$$\theta = (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) [\tan(\lambda \ell) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1]$$

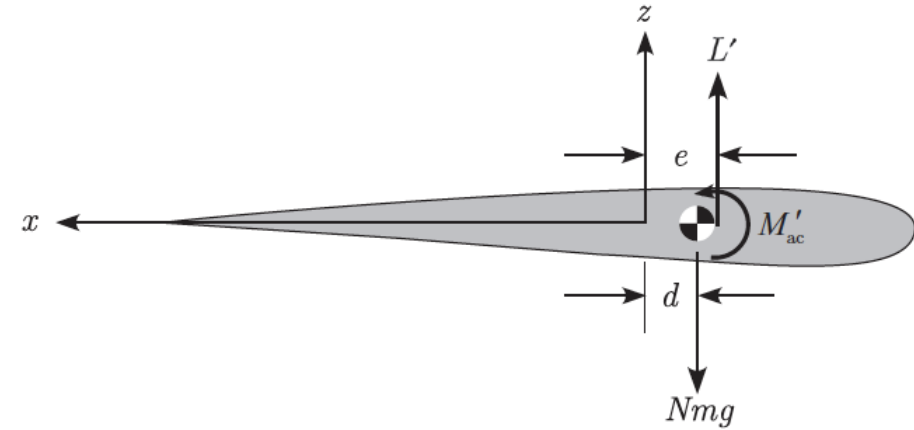
$$L' = qca(\alpha_r + \theta)$$

$$\alpha(y) = \alpha_r + \theta(y)$$

$$\lambda^2 \equiv \frac{qcae}{GJ}$$

$$\lambda^2 \bar{\alpha}_r \equiv \frac{1}{GJ} (qc^2 c_{mac} - Nmgd)$$

$$\bar{\alpha}_r = \frac{cc_{mac}}{ae} - \frac{Nmgd}{qcae}$$



$$N = \frac{L}{W} = 1 + \frac{A_z}{g}$$



A sustentação total pode ser obtida de:

$$L = 2 \int_0^{\ell} L' dy$$

E substituindo as expressões para sustentação ao longo da envergadura e

$$\begin{aligned} L &= 2qca \int_0^{\ell} \{ \alpha_r + (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) [\tan(\lambda\ell) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1] \} dy \\ &= 2qcal \left\{ (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) \left[\frac{\tan(\lambda\ell)}{\lambda\ell} \right] - \bar{\alpha}_r \right\} \end{aligned}$$

Que pode ser dividida pelo peso do veículo e utilizando a definição de $\bar{\alpha}_r$, para resultar na expressão de fator de carga em função de α_r

$$N = \frac{2\overline{GJ}(\lambda\ell)^2 \left\{ ae\alpha_r + cc_{mac} \left[1 - \frac{\lambda\ell}{\tan(\lambda\ell)} \right] \right\}}{ael \left\{ \frac{We\lambda\ell}{\tan(\lambda\ell)} + 2mg\ell d \left[1 - \frac{\lambda\ell}{\tan(\lambda\ell)} \right] \right\}} \quad (*)$$



Ou de α_r em função de N

$$\alpha_r = \frac{NW\ell e}{2\overline{GJ}\lambda\ell \tan(\lambda\ell)} + \left[1 - \frac{\lambda\ell}{\tan(\lambda\ell)}\right] \left[\frac{Nmg\ell^2 d}{\overline{GJ}(\lambda\ell)^2} - \frac{cc_{mac}}{ae}\right] \quad (**)$$

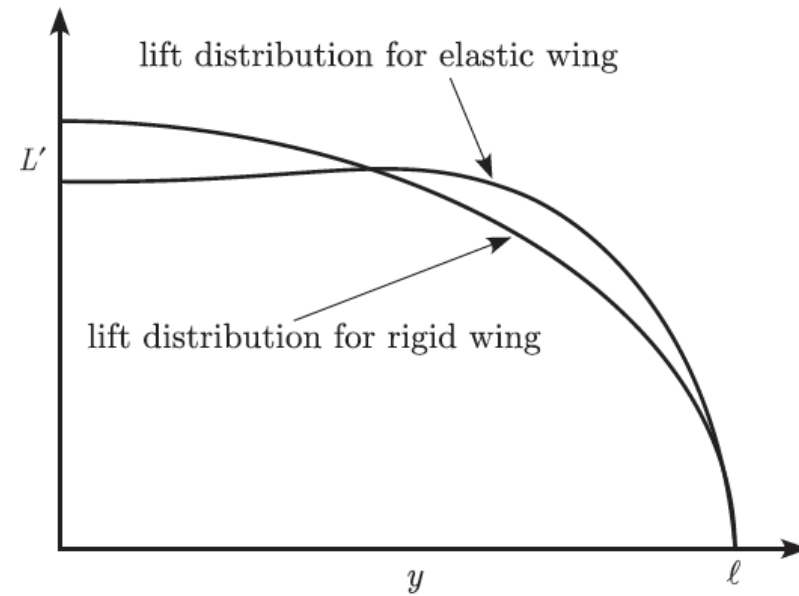
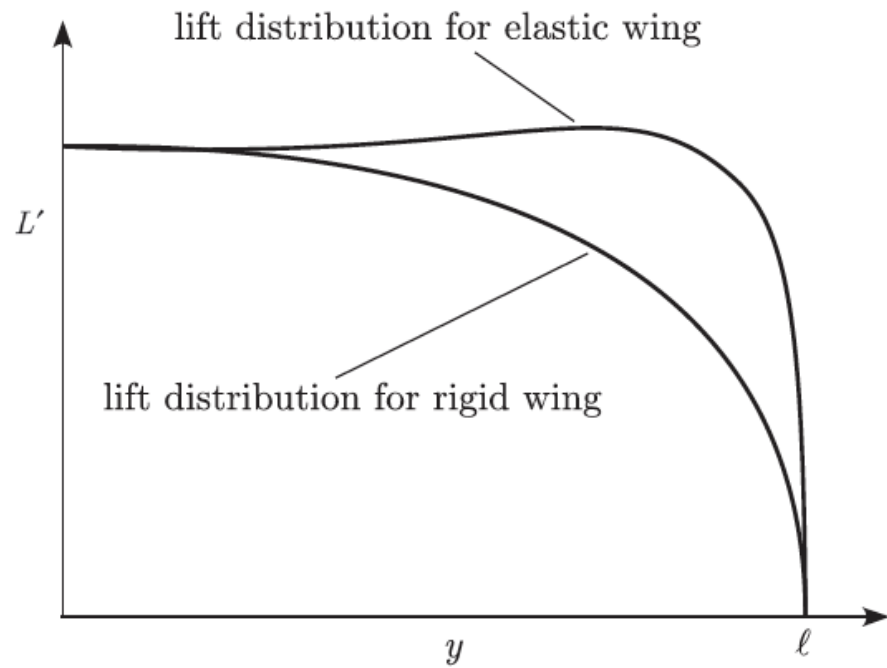
As expressões nos permitem especificar um α_r constante e encontrar N(q), ou especificar N e encontrar $\alpha_r(q)$

- Cálculo da distribuição de carregamento aeroelástico é prático e utilizado de duas formas. Primeiro, para satisfazer os aerodinamicistas e engenheiros de desempenho, que precisam conhecer o carregamento e momento em função da altitude e condições de voo. Então, dada uma pressão dinâmica e α_r o fator de carga ou sustentação total podem ser obtidas da eq. (*).
- Por outro lado, o eng. estruturas precisa garantir integridade em fatores de carga específicos e condições de voo (diagrama V-N). Assim, dado um fator de carga e condição de voo, precisam saber a distribuição de carregamento para verificar tensões e deformações. Quando q, α_r e N são dados, calcula-se $\overline{\alpha_r}$ e, por fim, a deformação torsional θ é calculada e também a distribuição de sustentação ao longo da envergadura. Assim, momento em flexão pode ser calculado e análise estrutural realizada.



$$\theta = (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) [\tan(\lambda \ell) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1]$$

$$L' = qca(\alpha_r + \theta)$$



Referências

1 - An Introduction to the Theory of Aeroelasticity

Y.C. Fung

- A leitura do Capítulo 3 (item 3.2) é recomendada.

2 - Introduction to structural dynamics and aeroelasticity

D. Hodges and A. Pierce

- Leitura do Capítulo 4 (item 4.2.1 até 4.2.4) e solução dos problemas 7 até 10 no final do capítulo.