

MAP 0217 - MAT 0311 1º Semestre - IME USP  
Continuidade - Aspectos Globais

## 1 Introdução

Aqui serão vistas as propriedades básicas de funções contínuas em todo seu domínio, este é um tópico muito *topológico* da disciplina.

O material estudado é coberto na seção 22 no livro de Bartle, com o auxílio das seções 12 (para conexidade em espaços métricos) e 11 (para compacidade em espaços métricos).

Como mencionado na nota anterior o esquema básico é para este assunto o seguinte:

1. Propriedades Gerais.
2. Continuidade e conexidade.
3. Continuidade uniforme (Caso geral e  $\mathbb{R}^p$ ).
4. Continuidade e compacidade (Caso geral e  $\mathbb{R}^p$ ).
5. Pontos fixos, contrações.

Nesta nota discutem-se as propriedades gerais, algo de aparência bem simples, mas de alcance e profundidade muito grandes, lembrem-se que “os grandes perfumes vêm em pequenos frascos”, certo?

## 2 Funções Contínuas - Caracterização

Sejam  $(M, d)$  e  $(N, \tilde{d})$  espaços métricos, que serão denotados apenas por  $M$  e  $N$ .

Lembre que um subconjunto  $X \subset M$  é aberto se, por definição, se todo ponto  $a \in X$  é ponto interior, ou seja, existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que  $V \subset X$ , decorre de pronto da definição de vizinhança que isto é o mesmo que dizer que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B(a, \varepsilon) \subset X$ .

Um subconjunto  $H \subset M$  é fechado, por definição, se seu complementar,  $M \setminus H$ , é aberto.

Funções  $f : M \rightarrow N$  contínuas em todos os pontos de  $M$  estão ligadas de modo muito direto a conjuntos abertos e conjuntos fechados, mas antes de começar a ver essa relação, alguns exemplos para deixar evidentes propriedades que **NÃO** valem!

**Exemplo 1**  $M = N = \mathbb{R}$  COM A DISTÂNCIA USUAL  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

CLARO QUE  $f$  É CONTÍNUA EM TODOS OS PONTOS, AGORA VEJA O SEGUINTE,  $U = (-1, 1)$  É UM SUBCONJUNTO ABERTO DE  $\mathbb{R}$ , MAS  $W = f(U) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), : x \in U\} = [0, 1)$  **NÃO** É UM SUBCONJUNTO ABERTO DE  $\mathbb{R}$ .

Apesar dos boatos em contrário, funções contínuas não levam abertos em abertos! Nem sempre...

**Exemplo 2** CONSIDERE  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  DADA POR  $f(x) = \arctan x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . CLARO QUE  $f$  É CONTÍNUA, MAS  $H = [0, +\infty[$  É UM SUBCONJUNTO FECHADO DE  $\mathbb{R}$  E...  $V = f(H) = [0, \frac{\pi}{2}[$  **NÃO** É UM SUBCONJUNTO FECHADO DE  $\mathbb{R}$ .

Assim, mais uma vez... Cuidado com as chamadas *fake news*, apesar dos boatos em contrário, funções contínuas não levam fechados em fechados! Nem sempre...

A relação entre continuidade e subconjuntos abertos (ou com subconjuntos fechados) aparece ao tomar-se a pré-imagem do conjunto, de modo preciso, o que vale é:

**Fato 1** *Seja  $f : M \rightarrow N$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  *$f$  é uma função contínua em todos os pontos;*
- (ii) *Se  $V$  é um subconjunto aberto do seu **contradomínio**  $N$  então a pré-  
imagem<sup>1</sup> de  $V$ ,  $f^{-1}(V)$ , é um subconjunto aberto de  $M$ .*
- (iii) *Se  $H$  é um subconjunto fechado do seu **contradomínio**  $N$  então a pré-  
imagem de  $H$ ,  $f^{-1}(H)$ , é um subconjunto fechado de  $M$ .*

Antes de pensar em algo como demonstração do resultado considere a seguinte questão, e se  $f$  estiver definida em um subconjunto  $X \subset M$ , como fica o fato 1?

Na verdade a resposta é que esse resultado pode ser aplicado para essa situação, veja o seguinte

## 2.1 Um pouco sobre subespaços métricos

Considere um espaço métrico  $(M, d)$  e um subconjunto  $X \subset M$ ,  $X \neq \emptyset$ .

A distância  $d$  em  $M$  induz naturalmente uma distância em  $X$ , dada pela sua restrição,  $d_X = d|_{X \times X}$ , assim é imediato que  $(X, d_X)$  é um espaço, que

---

<sup>1</sup>Lembre que se  $W \subset N$  a pré-imagem de  $W$  por  $f$  é  $f^{-1}(W) = \{x \in M : f(x) \in W\}$ .

será denotado no futuro por  $X_d$  e é simples ver quais são os abertos desse espaço.

**Exercício 1** *Demonstre que um subconjunto  $A \subset X$  é um aberto do espaço métrico  $X_d$  se, e só se, existe um subconjunto  $U \subset M$ , aberto no espaço métrico  $M$ , tal que  $A = X \cap U$ .*

Em outras palavras, os abertos de  $X_d$  são as intersecções de  $X$  com os abertos de  $M$ .

Perceba agora que, nesse contexto, se  $(N, \tilde{d})$  é também um espaço métrico ao analisar-se a continuidade de uma função  $f : X \rightarrow N$  definida no subconjunto  $X$  do espaço métrico  $M$  a valores em  $N$ , está-se a analisar a continuidade de  $f$  considerada como função definida no espaço métrico  $X_d$  com valores em  $N$ , então o fato 1 aplica-se sem nenhum problema, além disso, o uso combinado desse resultado com o exercício 1 prova de pronto o resultado a seguir:

**Fato 2** *Sejam  $X \neq \emptyset$  um subconjunto do espaço métrico  $M$  e  $f : X \rightarrow N$ . São equivalentes:*

- (i)  *$f$  é uma função contínua em todos os pontos;*
- (ii) *Se  $V$  é um subconjunto aberto do seu **contradomínio**  $N$  então existe um subconjunto aberto  $U$  em  $M$  tal que  $f^{-1}(V) = U \cap X$ .*
- (iii) *Se  $H$  é um subconjunto fechado do seu **contradomínio**  $N$  então existe um subconjunto fechado  $G$  de  $M$  tal que  $f^{-1}(H) = G \cap X$ .*

Este é o teorema 22.1 do livro de Bartle enunciado para o caso de funções definidas entre espaços métricos.

Aqui aconselha-se o leitor a estudar o exercício 1 e perceber que, como consequência direta dele, o fato 2 nada mais é do que o fato 1 com  $X_d$  no lugar de  $M$ .

Na segunda edição do texto de Bartle, *The Elements of Real Analysis*, o resultado enunciado primeiro é o fato 2 (teorema 22.1) e o fato 1 é então obtido como caso particular (corolário 22.2), a razão para isso é evitar a discussão feita na aqui que levou ao exercício 1.

## 2.2 Sobre a demonstração do fato 1

A demonstração feita no supramencionado livro de Bartle, embora feita para o caso de  $M = \mathbb{R}^p$  e  $M = \mathbb{R}^q$  é adaptada de modo simples para a

situação geral de espaços métricos. O leitor fica convidado a comprovar esta afirmação.

Como o fato 1 é um resultado que estabelece equivalências entre as propriedades (i), (ii) e (iii), há duas formas padrão de fazer a prova:

- Linear:  $(i) \iff (ii) \iff (iii)$
- Circular:  $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$

O livro usa o método linear, aqui vai-se comentar a demonstração circular.

(A)  $(i) \implies (ii)$  Feita no livro, e muito simples. Suponha que  $f$  é contínua em todos os pontos e considere um subconjunto aberto  $V$  de  $N$ . Se  $f^{-1}(V) = \emptyset$  o resultado está provado, o conjunto vazio é. Caso contrário tome  $x \in f^{-1}(V)$ , para provar que  $f^{-1}(V)$  é um aberto de  $M$ , basta mostrar que  $x$  é um ponto interior a esse conjunto.

Para isto, considere  $y = f(x) \in V$  e veja que, como  $V$  é aberto então  $V$  é uma vizinhança de  $y$ . Assim, como  $f$  é contínua em  $x$  e  $y = f(x)$  existe uma vizinhança  $W$  de  $x$  tal que

$$z \in W \implies f(z) \in V.$$

Portanto  $W \subset f^{-1}(V)$  e isto mostra que  $x$  é de fato um ponto interior a  $f^{-1}(V)$ .

(B)  $(ii) \implies (iii)$  Feita no texto, basta lembrar que se  $H$  é fechado então  $V = N \setminus H$  é aberto e aplicar (ii) para este conjunto.

(C)  $(iii) \implies (i)$  Esta é a implicação que não está demonstrada (de modo direto) no livro. Vai-se fazer aqui uma demonstração direta desta parte.

Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função tal que a pré-imagem de qualquer subconjunto fechado de  $N$  é um subconjunto fechado de  $M$  e tome um ponto arbitrário  $x \in M$ . Deve-se provar que  $f$  é contínua em  $x$ .

Para isso, tome  $V$  uma vizinhança qualquer de  $y = f(x)$ , deve-se provar que existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $f(U) \subset V$ .

Como  $V$  é vizinhança de  $y$  existe um aberto  $W$  de  $N$  tal que  $y \in W \subset V$ .

Então  $H = N \setminus W$  é fechado em  $N$ , portanto, por (iii),  $G = f^{-1}(H)$  é um subconjunto fechado de  $M$  e, como  $y = f(x) \in W$ , claro que  $x \notin G$ , isto é,  $x \in M \setminus G$ .

Perceba agora que  $U = M \setminus G$  é um subconjunto aberto de  $M$ , pois  $G$  é fechado, então  $U$  é uma vizinhança de  $x$  e, como  $G = f^{-1}(H)$  tem-se que

$$z \in U = M \setminus G \implies f(z) \notin H = N \setminus W \implies f(z) \in W \subset V.$$

Isso mostra que  $f(U) \subset W \subset V$  e termina a prova. ■

### 3 Aplicação

Uma tarde, antes da pandemia destruir as aulas, comentou-se que a prova de que o interior de uma elipse  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$  é de fato um conjunto aberto ( $a > 0$  e  $b > 0$ ) podia ser feita em uma linha, basta conhecer o “canhão correto” para isso...

Pois é, agora você conhece o canhão! É o inocente fato 1.

Veja, considere  $a > 0$ ,  $b > 0$  e o polinômio  $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ , claro que  $f$  é contínua no plano todo (é até um polinômio...) então, pelo item (ii) do fato 1,  $f^{-1}(] - 1, 1[)$  é um subconjunto aberto do plano, pois  $] - 1, 1[$  é um aberto de  $\mathbb{R}$ . E é imediato que  $U = f^{-1}(] - 1, 1[)$ .

Também é uma aplicação imediata de fato 1 que

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{x^2+y^2+1} + \frac{1}{y^2+z^2+1} + \frac{1}{x^2+z^2+1} = \frac{1}{17}\}$$

é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^3$  e...