MAP 0217 MAT 0311 - 2025 1° Semestre - IME USP
Continuidade Local

1 Introdução

Espaços métrios tem uma estrutura muito apropriada para estudar questões relativas a continuidade de funções, neste ponto da disciplina estuda-se esse tema, a estrutura que vai ser seguida é seguir o seguinte roteiro:

1. Aspectos de continuidade local (Caso geral e $\mathbb{R}^p$).
2. Aspectos de continuidade global:
   (a) Continuidade e conexidade.
   (b) Continuidade uniforme (Caso geral e $\mathbb{R}^p$).
   (c) Continuidade e compacidade (Caso geral e $\mathbb{R}^p$).
   (d) Pontos fixos, contrações.

Neste primeiro "pacote" discutem-se os aspectos de continuidade local de funções, o assunto é tratado no texto do Bartle (*The Elements of Real Analysis* - 2ª ed.) na seção 20.

Nesta nota aprestam-se os resultados, comenta-se como estes conceitos relacionam–se com tópicos já vistos na disciplina e destacam-se alguns exemplos sugestivos, para ver os detalhes de cada ponto, deve ser consultada a bibliografia, por exemplo, a supramencionada seção 20 do livro de R. G. Bartle.

2 Continuidade Local

Neste ponto nada se ganharia em simplicidade ou facilidade por apresentar as definições e propriedades gerais no contexto de $\mathbb{R}^p$ em vez do caso geral de espaços métricos, então isso será feito dessa forma mais "geral", e a única diferença será a linguagem usada, o leitor pode trocar nas páginas a seguir (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ por $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^q$ com as métricas usuais sem nada mais alterar (como aliás o é feito no texto de Bartle). O caso especial de $\mathbb{R}^p$ é destacado ao final, em uma seção separada.

No que segue, (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ são espaços métricos e $X \neq \emptyset$ é um subconjunto de M.

Como nesta parte a métrica considerada em M e N não muda, os espaços métricos (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ serão denotados apenas por M e N.

A definição básica aqui é a de continuidade pontual (veja a definição 1), ela está apresentada na forma apropriada para ser usada no caso mais geral de espaços topológicos, como se verá logo após, é imediato mostrar que esta forma é equivalente à "tradicional"definição por ϵ e δ.

Lembre que se $a \in M$, uma vizinhança de a é um subconjunto $V \subset M$ tal que $a \in V^\circ$.

Definição 1 *Uma função $f : X \longrightarrow N$ é dita, por definição, contínua em $a \in X$ se, e só se, para toda vizinhança V de $f(a)$ existe uma vizinhaça U de a tal que*

$$x \in U \cap X \Longrightarrow f(x) \in V.$$

Observação 1 Note que não se exigiu que a vizinhança U de a esteja contida no domínio de f, X, aliás pode acontecer que $X^\circ = \emptyset$, por exemplo, se $M = \mathbb{R}^2$ e X é a circunferência de centro c e raio r.

Observe ainda que decorre de pronto da definição de vizinhança e de continuidade que a definição 1 é equivalente à usual com ε e δ,

Fato 1 *$f : X \longrightarrow N$ é contínua em $a \in X$ se, e apenas se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que*

$$x \in B(a, \delta) \cap X \Longrightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Outro ponto a destacar é o fato de que continuidade em a pode ser caracterizada em termos de sequências. Isso está enunciado no resultado a seguir e tem muitas aplicações em situações concretas.

Fato 2 *$f : X \longrightarrow N$ é contínua em $a \in X$ se, e só se, para toda sequência (x_n) de pontos em X, tal que $x_n \to a$, tem–se que $f(x_n) \to f(a)$.*

Os fatos 1 e 2 estão no texto de Bartle reunidos no teorema 20.2

Uma critério simples para a descontinuidade de uma função em um ponto decorre de modo direto do fato 2.

Fato 3 *$f : X \longrightarrow N$ é descontínua em $a \in X$ se, e só se, existe sequência (x_n) em X que converge para a e $f(x_n)$ não converge para $f(a)$.*

Uma questão que às vezes surge é saber se uma função que não está definida em a pode ser estendida até o ponto a de forma contínua? Os resultados mencionados acima permitem estabelecer o seguinte critério, apresentado na forma de exercício.

Exercício 1 *Seja $X \subset M$ com $a \in X' \setminus X$ e considere $f : X \longrightarrow N$. Prove que uma condição necessária e suficiente para existir uma função $\widetilde{f} : X \cup \{a\} \longrightarrow N$ que estende f (i.e. $\widetilde{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in X$) e é contínua em a, é que:*

Para toda sequeência (x_n) em X que converge para a existe $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Os exemplos de continuidade e descontinuidade apresentados na seção 20 do livro de Bartle merecem ser vistos e estudados.

Além destes, apresenta-se agora um exemplo interessante por tratar de um tema que voltará a aparecer sob formas diversas na disciplina.

Ao se considerar coordenadas polares em $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ aparece um problema interessante, a cada ponto $(x_1, x_2) \in U$ associa-se o par (r, φ) em que $r = r(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e $\varphi = \varphi(x_1, x_2) = \ldots$ *quem é mesmo φ?*

O problema é que há uma certa indeterminação, ou arbitrariedade para escolher esse "ângulo polar", e não há o que se pode chamar "escolha canônica".

Por exemplo, pode até dizer-se que as coordenadas polares "naturais"de $(1, 1)$ são $r = \sqrt{2}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$, mas qual o "angulo polar canônico"de $(1, -1)$? Seria $\frac{3\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$?

Em termos precisos, não há muito sentido em falar **no** "ângulo polar"de (x_1, x_2), mas apenas em **uma escolha** do "ângulo polar". Se φ é uma dessas escolhas, então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi + n2\pi$ é outra escolha, e não há uma "maneira natural"de escolher entre essas possibilidades.

O que em geral se faz (ao menos nos textos de matemática) é escolher (meio arbitrariamente) $\alpha \in \mathbb{R}$, tomar o intervalo $I_\alpha = [\alpha, \alpha + 2\pi[$ e considerar que $\varphi \in I_\alpha$. Também é habitual escolher $\alpha = 0$ (e nesse caso o ângulo polar está em $[0, 2\pi[$) ou escolher $\alpha = -\pi$ (e nesse caso o ângulo polar está em $[-\pi, \pi[$).

No exemplo a seguir vai-se fixar $\alpha = 0$ e o ângulo polar de $\alpha = 0$ e o ângulo polar de (x_1, x_2) será denotado por $\varphi_0(x_1, x_2) \in [0, 2\pi[$.

Exemplo 1 Considere $X = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ e função que a cada ponto $(x_1, x_2) \in X$ associa $\varphi_0(x_1, x_2)$.

A função φ_0 é contínua nos pontos de $X \setminus \{(1, 0)\}$ e é descontínua em $(1, 0)$.

Exercício 2 *Prove as afirmações feitas no exemplo 1 sobre φ_0.*

2.1 Propriedades elementares sobre continuidade local

Definição 2 *Uma função $f : X \longrightarrow N$ é* limitada *se, e só se, por definição, existe uma bola $B = B(y, r) \subset N$ tal que $Im(f) \subset B$.*

f é dita localmente limitada em *$a \in \overline{X}$ se, e só se, por definição, existem uma vizinhança U de a e uma bola $B = B(y, r) \subset N$ tal que $f(U \cap X) \subset B$.*

O primeiro resultado desta parte afirma a velha conhecida propriedade de uma função ser localmente limitada nos pontos em que é contínua.

Fato 4 *Se $f : X \longrightarrow N$ é contínua em $a \in X$ então f é localmente limitada em a.*

Demonstração: Na definição 1 considere $V = B(f(a), 1)$ e obtenha a U desejada. ∎

Lembre agora a noção de pré-imagem, se A e B são conjuntos e $f : A \longrightarrow B$, então para $H \subset B$ define-se a pré-imagem de H por f, representada pelo símbolo $f^{-1}(H)$, como $f^{-1}(H) = \{x \in A : f(x) \in H\}$ (não se supõe que f seja injetora ou sobrejetora).

Com essa noção pode-se reformular a definição de continuidade de uma função em a do seguinte modo:

Fato 5 *A função $f : X \longrightarrow N$ é contínua em $a \in X$ se, e só se, para cada vizinhança V de $f(a)$ existe uma vizinhança W de a tal que*

$$f^{-1}(V) = W \cap X.$$

Este é o teorema 20.4 do livro de Bartle supramencionado, a demonstração pode ser vista ali e é muito simples. Claro que a propriedade enunciada no fato 5 implica a continuidade de f em a. Para mostrar que uma função contínua em a tem a propriedade acima basta usar a definição 1 e notar que se U é uma vizinhança de a e L é um subconjunto qualquer de M então $U \cup L$ é uma vizinhança de a.

A última propriedade desta subseção é bem conhecida, composta de contínuas é contínua.

Fato 6 *Sejam (M, d), $(N, \widetilde{d})$ e $(S, \widehat{d})$ espaços métricos e $X \subset M$, $Y \subset N$. Se $f : X \longrightarrow N$ tem imagem contida em Y e é contínua em $a \in X$, e $g : Y \longrightarrow S$ é contínua em $f(a)$ emtão $g \circ f : X \longrightarrow S$ é conínua em a.*

Este é o teorema 20.8 do livro de Bartle, não necessita comentários, a demonstração é "igual"à feita para funções reais a valores reais.

2.2 Funções de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$

Lembre que embora todas as normas introduzam distâncias uniformemente equivalentes em $\mathbb{R}^p$, considera-se, a menos de menção explícita em contrário, em $\mathbb{R}^p$ a distância pitagórica, se $x = (x_1, \ldots, x_p)$ e $y = (y_1, \ldots, y_p)$,

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\langle\, x - y, x - y \,\rangle},$$

com $\langle\, x, y \,\rangle = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j y_j$.

Dessa maneira $\mathbb{R}^p$ torna-se um espaço vetorial real de dimensão p com produto interno.

A base canônica de $\mathbb{R}^p$ é $\{e_1, \ldots, e_p\}$.

Com estas notações, se $X \subset \mathbb{R}^p$, uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^q$ será caracterizada por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_j(x), \ldots, f_q(x)) = \sum\limits_{j=1}^{q} f_j(x) e_q$, e, para $1 \leq j \leq q$, tem-se $f_j : X \longrightarrow \mathbb{R},\ f_j(x) = \langle\, f(x), e_j \,\rangle$.

As funções f_j definidas acima são chamadas funções coordenadas de f.

Um resultado básico que permite reduzir o estudo de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$ a funções de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}$ é

Fato 7 *Com as notações anteriores, se $a \in X$, então a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^q$ é contínua em a se, e só se, todas as funções coordenadas f_j forem contínuas em a.*

Exercício 3 *Demonstre o fato 7.*

A estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^p$ permite combinar funções de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$ de diversas maneiras, se f e g são funções de $X \subset \mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

(i) $\|f\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|(x) = \|f(x)\|$

(ii) $(f + g) : X \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

(iii) $(\lambda f) : X \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

(iv) $(f \cdot g) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = \langle\, f(x), g(x) \,\rangle$.

(v) Se $q = 1$ e $g(x) \neq 0$, para todo $x \in X$, pode definir-se a função $(f/g) : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

O seguinte resultado é de demonstração imediata

Fato 8 *Se f e g são contínuas em a então as funções $\|f\|$, $f + g$, λf, $f \cdot g$ e, quando estiver definida, f/g são contínuas em a.*