PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 7: Propriedades da resposta ao impulso

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Março 2025

Sumário

Sumário

Bibliografia Básica

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
  - Capítulo 2.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
  - Capítulo 3.

Outras fontes recomendadas:

- Mais um exemplo de convolução (Profa. Maria Miranda) com vídeo

Sumário

Contexto

- Nas últimas aulas, vimos que a resposta ao impulso de um sistema LIT o caracteriza completamente.
- Portanto, apenas olhando a resposta ao impulso, devemos poder descobrir:
    - Se o sistema é causal ou não.
    - Se tem ou não memória.
    - Como é o resultado da interconexão desses sistemas (cascata, paralelo etc.).
    - Outras informações, como a resposta ao degrau, invertibilidade, estabilidade, etc.
- Nesta aula, exploraremos essas propriedades em detalhe.

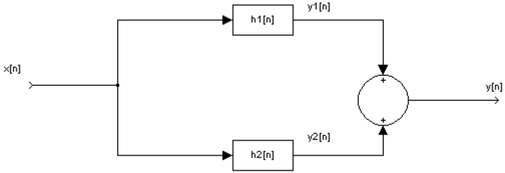
Sumário

1. Bibliografia

2. Propriedades da Resposta ao Impulso para Sistemas LIT
   - Conexão Paralela de Sistemas LIT
   - Conexão em Cascata de Sistemas LIT
   - Sistemas sem Memória
   - Sistemas Causais
   - Resposta ao Degrau
   - Sistemas Invertíveis e Desconvolução

Conexão Paralela de Sistemas LIT

- Sejam 2 sistemas LIT em paralelo, com respostas ao impulso $h_1[n]$ e $h_2[n]$.



- Saída total $y[n]$ é a soma das saídas individuais: $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$. Mas cada $y_i[n]$ é obtida via convolução:

$$y_1[n] = x[n] * h_1[n], \quad y_2[n] = x[n] * h_2[n].$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h_2[n-k] \implies$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \underbrace{\left(h_1[n-k] + h_2[n-k]\right)}_{\triangleq h[n-k]} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k].$$

Equivalência em Paralelo

- **Conclusão**: A resposta ao impulso do sistema equivalente (paralelo) é

$$\boxed{h[n] = h_1[n] + h_2[n]}$$

.

$$x[n] \rightarrow \boxed{h_1[n] + h_2[n]} \rightarrow y[n]$$

Outra forma de entender essa propriedade: vale a propriedade distributiva da convolução:

$$\boxed{x[n] * h_1[n] \ + \ x[n] * h_2[n] \ = \ x[n] * \left(h_1[n] \ + \ h_2[n]\right)}$$

Sumário

Conexão em Cascata

- Sistemas LIT encadeados em cascata:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \xrightarrow{z[n]} \boxed{h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

- $z[n] = x[n] * h_1[n], \quad y[n] = z[n] * h_2[n]$
- Temos então:

$$y[n] = z[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z[k] h_2[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]\, h_1[k-\ell] \right) h_2[n-k].$$

- Trocando a ordem das somatórias e fazendo $m = k - \ell$

$$y[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k-\ell] h_2[n-k] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell] \underbrace{\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1[m] h_2[n-\ell-m] \right)}_{\triangleq h[n-\ell]}$$

Equivalência em cascata

- Portanto, a resposta ao impulso do sistema cascata é

$$\boxed{h[n] = h_1[n] * h_2[n]}$$

.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n] * h_2[n]} \longrightarrow y[n]$$

- Outra forma de enxergar este resultado é que a convolução obedece as propriedades associativa e comutativa.

$$\boxed{(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])}$$

$$\boxed{h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]}$$

Exemplo

Sistema "faz nada"

Seja um sistema que "não faz nada", ou seja, um fio ligando a entrada à saída:

$$y[n] = x[n].$$

Pergunta-se:

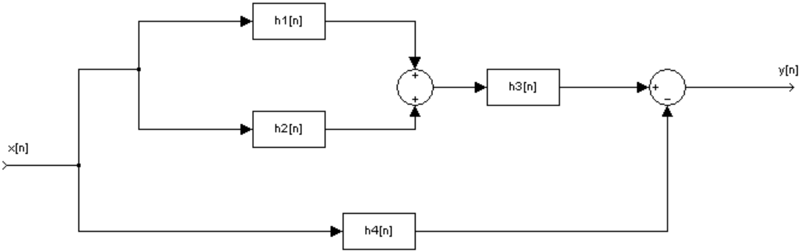
a) Qual a resposta ao impulso deste sistema?
b) Baseando-se na sua resposta, deduza qual é o elemento neutro da operação convolução.
c) Qual o resultado de $x[n] * \delta[n-m]$?

Exemplo

Considere a interconexão de sistemas LIT descrita na figura a seguir. A resposta de cada sistema é dada por

$$h_1[n] = u[n]$$
$$h_2[n] = u[n+2] - u[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n-2]$$
$$h_4[n] = \alpha^n u[n]$$

Encontre a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema global entre $x[n]$ e $y[n]$.



Sumário

Sistemas LIT sem Memória

- Recordando: um sistema sem memória (*memoryless*) tem $y[n]$ dependendo apenas de $x[n]$ (e não de $x[n-1]$, $x[n+1]$, etc.).
- Para um LIT, a saída é

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

.

- Se $y[n]$ depende somente de $x[n]$, isso implica que $h[n] = 0$ para todo $n \neq 0$.
- Logo, $h[n]$ precisa ser da forma

$$\boxed{h[n] = c\delta[n]}.$$

- Asism, $y[n] = cx[n]$ (um ganho) é o único sistema LIT sem memória.

Sumário

1. Bibliografia

2. Propriedades da Resposta ao Impulso para Sistemas LIT
   - Conexão Paralela de Sistemas LIT
   - Conexão em Cascata de Sistemas LIT
   - Sistemas sem Memória
   - Sistemas Causais
   - Resposta ao Degrau
   - Sistemas Invertíveis e Desconvolução

Sistemas LIT Causais

- Definimos um sistema causal como aquele que não usa valores futuros da entrada para produzir a saída.
- Ou seja, $y[n]$ pode depender de $x[n], x[n-1], x[n-2], \ldots$ mas não de $x[n+1], x[n+2], \ldots$
- Para sistemas LIT,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k].$$

- Se o sistema é causal, $h[n]$ precisa ser nulo para $n < 0$. Em outras palavras, $h[n]$ precisa ser um *sinal causal*.
- Conclusão:
  Sistema LIT é causal $\Longleftrightarrow$ $h[n]$ é causal ($h[n] = 0$, para $n < 0$).

Sumário

Resposta ao Degrau $s[n]$

- A resposta ao degrau de um sistema LIT é a saída gerada pela entrada $u[n]$ (degrau unitário). É fácil expressar a resposta ao degrau em termos de $h[n]$.
- Temos

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k].$$

- Mas $u[k] = 0$ para $k > n$ e 1 para $k \leq n$. Assim, a soma precisa ser feita apenas de $k = 0$ até $k = n$ e

$$\boxed{s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k].}$$

- Em suma, a resposta ao degrau é a "soma acumulada" (no tempo) de $h[n]$.

Exemplo

Calculando a resposta ao degrau

Um sistema de tempo discreto tem a resposta ao impulso:

$$h[n] = a^n u[n+2]$$

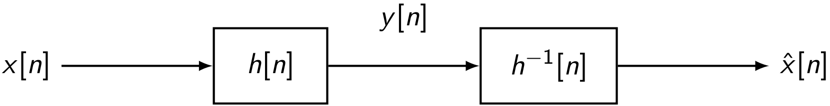
Este é um sistema causal? Tem memória? Determine sua resposta ao degrau.

Sumário

Sistemas Invertíveis (Desconvolução)

- Um sistema é invertível se é possível recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$.
- Isso significa existir um sistema inverso denotado como $h^{-1}[n]$ tal que

$$x[n] \; = \; y[n] * h^{-1}[n].$$



- Mas $y[n] = x[n] * h[n]$, então

$$x[n] = \left(x[n] * h[n]\right) * h^{-1}[n].$$

- Pelo associatividade,

$$x[n] = x[n] * \left(h[n] * h^{-1}[n]\right).$$

- Para que isso seja verdade, precisamos $\boxed{h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n]}$.
- Esse é o conceito de desconvolução — **desfazer** a convolução original.

Sistemas invertíveis e desconvolução

- Nas áreas de processamento de áudio e de Telecomunicações, desfazer o efeito de um canal sobre um sinal é chamado de equalização.
- Por exemplo, em modems de alta velocidade, o equalizador tenta desfazer o efeito do canal de comunicação sobre o sinal enviado.
- Muitas vezes implementados de forma adaptativa, porque o canal varia no tempo.
- Tópico de estudo importante e interessante! Possibilidades de uso de aprendizado de máquina também.

Exemplo: Sinal de áudio com eco:

$$y[n] = x[n] + a\,x[n-1].$$

Encontre um sistema inverso causal que permita recuperar o áudio original $x[n]$.

$+$,,

,

Conclusões da Aula 07

- Vimos como a **resposta ao impulso** de um sistema LIT determina:
  - Causalidade: $h[n] = 0$ para $n < 0$.
  - Memória: sem memória $\leftrightarrow h[n] = c\,\delta[n]$.
  - Conexões em cascata, paralelo $\rightarrow$ soma e convolução de $h[n]$.
- Definimos a **resposta ao degrau**, que é a soma acumulada de $h[n]$.
- Discutimos **inversão** (desconvolução), $h[n] * h^{-1}[n] = \delta[n]$.
- Exemplos de aplicação: canais de comunicação, equalização, cancelamento de eco.