

3 Princípios de dinâmica e análise modal

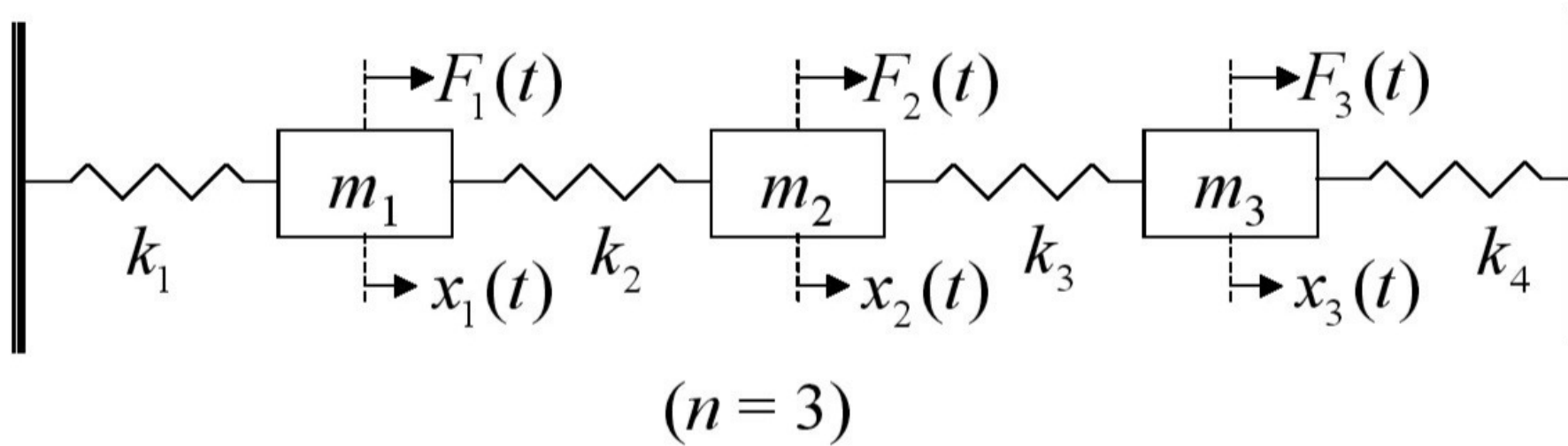
Carlos De Marqui Junior

Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

Sistema com múltiplos graus de liberdade (MDOF)



$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + m_3 \dot{x}_3^2)$$

$$V = \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2 + k_4 x_3^2]$$

$$\delta W = F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + F_3 \delta x_3$$

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} = Q_i \right|$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Como obtemos a eq do movimento de um sistema utilizando mecânica Lagrangeana?

$$L(x) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \dot{x}, t) dt$$

$$L = T - U = L(x, \dot{x}, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Pensando e um partícula unidimensional sujeito a uma força externa:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$F = - \frac{dU}{dx}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{dU}{dx} = F$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

$$F = \frac{d}{dt} p$$

$$\left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} = Q_i \right.$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3} = m_3 \ddot{x}_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = -k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3$$

Resultando em (na forma matricial):

$$\boxed{[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{Q\}}$$

(*)

onde

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

e as matrizes SIMÉTRICAS:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

(matriz de massa)

(matriz de rigidez)

Note que:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [m] \{\dot{q}\}$$

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^T [k] \{q\}$$

i.e. as matrizes de massa e rigidez são derivadas de formas “quadráticas”: elas são positiva semi-definidas

Análise modal: o problema de autovalor dinâmico (vibração livre não-amortecida)

$\{Q\} = 0$ nas equações (*):

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Examine as soluções de forma:

$$q_j(t) = u_j f(t) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(o movimento de todos os graus de liberdade – coordenadas generalizadas – é descrito pela mesma função do tempo: movimento sincronizado).

O problema do autovalor

Então,

$$\ddot{f} \sum_{j=1}^n m_{ij} u_j + f \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

resultando em

$$-\frac{\ddot{f}}{f} = \frac{\sum_{j=1}^n k_{ij} u_j}{\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j} = \lambda \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(constante)
↓

1º quociente:

$$\begin{aligned} \therefore \boxed{\ddot{f} + \lambda f = 0} &\Rightarrow f(t) = A_1 e^{\sqrt{-\lambda}t} + A_2 e^{-\sqrt{-\lambda}t} = \\ &= A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} = C \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda \doteq \omega^2}$$

Então, o movimento sincronizado será harmônico em uma certa frequência. Para determinar essa frequência, use o 2º quociente:

$$\sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) u_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

na forma matricial:

$$([k] - \omega^2 [m])\{u\} = 0 \quad (\text{problema de autovalor})$$

para soluções não-triviais ($\{u\} \equiv 0$):

$$|[k] - \omega^2 [m]| = 0 \quad \text{um polinômio de ordem } n \text{ em } \omega^2$$

Como esperado, haverá n movimentos sincronizados possíveis em n frequências harmônicas (as raízes positivas do polinômio), onde n é o número de coordenadas (graus de liberdade) generalizadas (ou independentes) do sistema:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \omega_r \leq \dots \omega_n$$

↑
frequência natural fundamental

frequências “naturais”
do sistema ou
autovalores

Associado com cada autovalor, há um autovetor ou “forma do modo” descrevendo o movimento sincronizado correspondente:

$$([k] - \omega_r^2 [m])\{u\}_r = 0 \Rightarrow \{u\}_r \quad r = 1, 2, \dots, n$$

- Conclusões importantes:

- Para obter os autovalores ou frequências "naturais" do sistema, a condição

$$|\dots| = \det(\dots) = 0$$

foi aplicada

- Matematicamente, essa condição implica para sistemas lineares que o posto do sistema seja menor que a dimensão da matriz e que haja mais incógnitas (elementos do autovetor que descrevam o movimento síncrono ou “forma do modo”) do que o número de equações INDEPENDENTES.
- Portanto, as formas do modo NÃO SÃO ÚNICAS - eles descrevem o MOVIMENTO RELATIVO associado a uma determinada frequência natural ou, em outras palavras, a AMPLITUDE de um autovetor é INDETERMINADA

Example: The eigenvector $\{1, 2, 3\}^T$ is the same as $\{2, 4, 6\}^T$



Ortogonalidade dos autovetores

Para quaisquer dois autovalores escreva:

$$([k] - \omega_r^2 [m])\{u\}_r = 0 \Rightarrow [k]\{u\}_r = \omega_r^2 [m]\{u\}_r$$

$$([k] - \omega_s^2 [m])\{u\}_s = 0 \Rightarrow [k]\{u\}_s = \omega_s^2 [m]\{u\}_s$$

Pré-multiplique a primeira por $\{u\}_s^T$ e a segunda por $\{u\}_r^T$

$$\{u\}_s^T [k]\{u\}_r = \omega_r^2 \{u\}_s^T [m]\{u\}_r$$

$$\{u\}_r^T [k]\{u\}_s = \omega_s^2 \{u\}_r^T [m]\{u\}_s$$

Subtraia a primeira pela transposta da segunda:

$$0 = (\omega_r^2 - \omega_s^2) \{u\}_r^T [m]\{u\}_s \quad \text{como} \quad \begin{aligned} [m]^T &= [m] \\ [k]^T &= [k] \end{aligned}$$

- Se os dois autovalores forem distintos

$$\{u\}_r^T [m] \{u\}_s = 0 \quad (\omega_r \neq \omega_s)$$

- os dois autovetores correspondentes são ortogonais em relação à matriz de massa

- Se os dois autovalores forem iguais

$$\{u\}_r^T [m] \{u\}_r > 0 \quad (\omega_r = \omega_s)$$

- o autovetor correspondente é normalizado por uma constante arbitrária, por exemplo:

$$\{u\}_r^T [m] \{u\}_r = \begin{cases} 1 & \text{(unit mass)} \\ m_T & \text{(total mass)} \\ m_r & \text{("generalized" mass)} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(... and it becomes an} \\ \text{UNIQUE vector)} \end{matrix}$$

- Interpretação Física:

- Observe que:

$$\omega_s^2 [m] \{u\}_s$$

- é a força inercial associada ao movimento síncrono descrito pelo autovetor s. O produto:

$$\omega_s^2 \{u\}_r^T [m] \{u\}_s$$

- corresponde ao produto escalar (ou "ponto") entre a força inercial associada ao autovetor s e ao autovetor r.

- O resultado $\{u\}_r^T [m] \{u\}_s = 0$

indica que os dois vetores são "ortogonais" ou, fisicamente, que a força inercial associada ao autovetor s não afeta o movimento associado ao autovetor r.

As expressões anteriores

$$\{u\}_s^T [k] \{u\}_r = \omega_r^2 \{u\}_s^T [m] \{u\}_r$$

$$\{u\}_r^T [k] \{u\}_s = \omega_s^2 \{u\}_r^T [m] \{u\}_s$$

podem ser usadas para demonstrar propriedades similares envolvendo a rigidez:

$$\frac{1}{\omega_r^2} \{u\}_s^T [k] \{u\}_r = \{u\}_s^T [m] \{u\}_r$$

$$\frac{1}{\omega_s^2} \{u\}_r^T [k] \{u\}_s = \{u\}_r^T [m] \{u\}_s$$

Subtraia a primeira pela transposta da segunda para obter:

$$\left(\frac{1}{\omega_r^2} - \frac{1}{\omega_s^2} \right) \{u\}_r^T [k] \{u\}_s = \overset{\text{Delta de Dirac}}{\downarrow} \delta(r, s) k_r \quad \begin{matrix} \text{(rigidez} \\ \text{“generalizada”)} \end{matrix}$$

- Interpretação física

O resultado

$$\{u\}_r^T [k] \{u\}_s = 0 \quad (\omega_r \neq \omega_s)$$

indica que os dois autovetores também são "ortogonais" ou, fisicamente, DESACOPLADOS em relação às componentes de força elástica

- Portanto, os movimentos síncronos associados a autovetores ou formas dos modos associados a autovalores distintos ou frequências naturais são ELASTICAMENTE E INERCIALMENTE INDEPENDENTES ou "ORTOGONAIS" entre si:

$$\boxed{\{q(t)\}_r = C_r \{u\}_r \cos(\omega_r t + \varphi_r) \quad r = 1, 2, \dots, n}$$

(SE as condições iniciais forem tais que um único modo é excitado)

- Para condições iniciais gerais, o movimento será uma superposição (combinação linear) dos movimentos independentes associados a cada forma do modo ou autovetor

$$\boxed{\{q(t)\} = \sum_{r=1}^n C_r \{u\}_r \cos(\omega_r t + \varphi_r)}$$

- As $2n$ constantes, C_r e ϕ_r são obtidas a partir das condições iniciais (deslocamento inicial e velocidade inicial - estados) de cada coordenada generalizada:

$$\{q(0)\}, \{\dot{q}(0)\} \quad r = 1, 2, \dots, n$$

- A participação relativa (“importância”) de um modo particular no movimento resultante é dada por C_r

O movimento “natural”

O resultado geral:

$$\{u\}_s^T [m] \{u\}_r = \delta(r, s) m_r$$

$$\{u\}_s^T [k] \{u\}_r = \delta(r, s) k_r \quad r, s = 1, 2, \dots, n$$

pode ser expressado para todos os modos:

$$[u]^T [m] [u] = \text{diag}(m_r)$$

$$[u]^T [k] [u] = \text{diag}(k_r)$$

onde $\text{diag}(m_r)$ e $\text{diag}(k_r)$ representam as matrizes diagonais de massas e rigidez generalizadas, respectivamente, e

$$[u] = [\{u\}_1 \quad \{u\}_2 \quad \cdots \quad \{u\}_n] = \begin{bmatrix} {}^{r=1}u_1 & {}^{r=2}u_1 & \cdots & {}^{r=n}u_1 \\ {}^{r=1}u_2 & {}^{r=2}u_2 & \cdots & {}^{r=n}u_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {}^{r=1}u_n & {}^{r=2}u_n & \cdots & {}^{r=n}u_n \end{bmatrix}$$

é chamada de matriz modal (autovetores dos autovalores correspondentes são alinhados em suas colunas). No exemplo MDOF, a forma matricial geral de um sistema sem amortecimento foi identificada:

$$\boxed{[m]\{\ddot{q}\} + [k]\{q\} = \{Q\}} \quad (*)$$

Assuma a transformação linear de coordenadas (mapeamento):

$$\{q(t)\} = \eta_1(t)\{u\}_1 + \eta_2(t)\{u\}_2 + \dots + \eta_n(t)\{u\}_n$$
$$\boxed{\{q\} = [u]\{\eta\}} \quad (**)$$

Substitua (**) em (*) e pré-multiplique a expressão pela transposta da matriz modal:

$$\underbrace{[u]^T [m] [u]}_{=\text{diag}(m_r)} \{\ddot{\eta}\} + \underbrace{[u]^T [k] [u]}_{=\text{diag}(k_r)} \{\eta\} = \underbrace{[u]^T \{Q\}}_{\doteq \{N(t)\}} \quad (***)$$

(massa generalizada) (rigidez generalizada)

(O sistema é desacoplado, pois as matrizes são diagonais!)

O Movimento “Natural” (Conclusão)

- As novas coordenadas são chamadas de coordenadas "naturais" ou modais. Quando expresso em termos de coordenadas generalizadas, QUALQUER sistema dinâmico é DESACOPLADO
- Resposta à pergunta anterior: O acoplamento dinâmico NÃO é uma propriedade fundamental de um sistema linear; é uma função apenas das coordenadas generalizadas!
- Somente a transformação linear definida pela matriz modal é capaz de desacoplar simultaneamente as matrizes de massa e rigidez

Coordenadas “Naturais” Normalizadas

- A equação (***) pode ser escrita como:

$$\boxed{\{\ddot{\eta}\} + \text{diag}^{-1}(m_r) \text{diag}(k_r) \{\eta\} = \text{diag}^{-1}(m_r) \{N\}}$$

- O segundo termo do lado esquerdo é simplificado:

(matriz diagonal com o quadrado das frequências naturais)

$$\text{diag}^{-1}(m_r) \text{diag}(k_r) = \text{diag}\left(\frac{k_r}{m_r}\right) = \text{diag}(\omega_r^2)$$

- Então:

$$\boxed{\{\ddot{\eta}\} + \text{diag}(\omega_r^2) \{\eta\} = \text{diag}^{-1}(m_r) \{N\}}$$

(forma mais simples
de descrever o
movimento de um
sistema com MDOF)

- O resultado anterior é equivalente a normalizar os autovetores pelo inverso da raiz quadrada da massa generalizada:

$$\{\bar{u}\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{u\}_r$$

$$[\bar{u}] = \text{diag}^{-1/2}(m_r)[u]$$

 $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} [\bar{u}]^T [m] [\bar{u}] &= \text{diag}(1) = [I] \\ [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}] &= \text{diag}(\omega_r^2) \end{aligned}}$$

 $\Rightarrow$

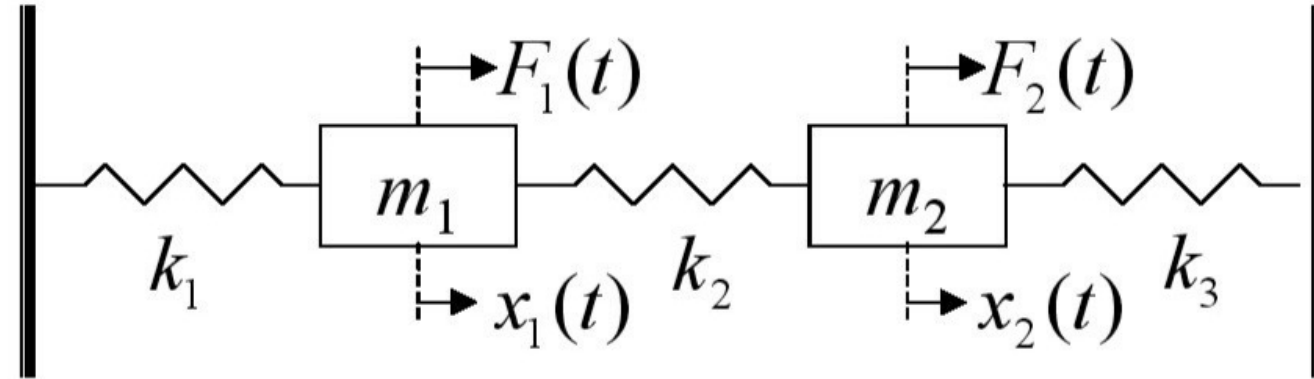
$$[\bar{u}]^T [m] [\bar{u}] = [I] = [\bar{u}]^{-1} [\bar{u}]$$

$$\therefore \boxed{[\bar{u}]^{-1} = [\bar{u}]^T [m]}$$



Exemplo MDOF (continua)

(simplifique
para 2 DOF)



$$m_1 = m_2 = m$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [k] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema de autovalor: $([k] - \omega^2 [m])\{u\} = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 - \bar{\omega}^2 & -1 \\ -1 & 2 - \bar{\omega}^2 \end{vmatrix} = (2 - \bar{\omega}^2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \bar{\omega}_1^2 = 1 \\ \bar{\omega}_2^2 = 3 \end{matrix} \quad \bar{\omega} \doteq \omega \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Então, as duas frequências naturais são

$$\omega_1 = \sqrt{k/m}$$

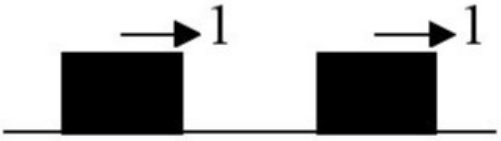
$$\omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

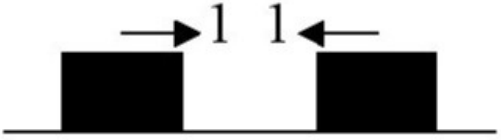
Os dois autovetores são encontradas substituindo os dois autovalores no problema de autovalor e notando que as duas equações são redundantes. Usando a primeira para resolver para o autovetor:

$$\bar{\omega}_1^2 = 1 \Rightarrow (2-1)u_1^{r=1} - u_2^{r=1} = 0 \Rightarrow \boxed{u_1^{r=1} = u_2^{r=1}}$$

$$\bar{\omega}_2^2 = 3 \Rightarrow (2-3)u_1^{r=2} - u_2^{r=2} = 0 \Rightarrow \boxed{u_1^{r=2} = -u_2^{r=2}}$$

resultando nos pares:

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \Leftrightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$


$$\omega_2 = \sqrt{3k/m} \Leftrightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$


$$\therefore [u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[u]^T [m][u] = m \begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 \end{bmatrix} \quad \left| \quad m \begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & \\ & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + F_2 \\ F_1 - F_2 \end{Bmatrix} \right.$$

$$[u]^T [k][u] = k \begin{bmatrix} 2 & \\ & 6 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \therefore \begin{array}{c} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}}_{\text{diag}(\omega_r^2)} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} F_1 + F_2 \\ F_1 - F_2 \end{Bmatrix} \end{array} \right.$$



O mesmo resultado seria obtido usando diretamente as coordenadas naturais normalizadas:

$$\left. \begin{aligned} m_{r=1} &= m_{r=2} = 2m \\ \{\bar{u}\}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \{\bar{u}\}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ [\bar{u}] &= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right| \begin{aligned} [\bar{u}]^T [m] [\bar{u}] &= [1] \\ [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}] &= \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix} = \text{diag}(\omega_r^2) \\ \boxed{\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} F_1 + F_2 \\ F_1 - F_2 \end{Bmatrix}} \end{aligned}$$



Análise Modal (conclusão)

- Procedimento geral para solução de vibração forçada de um sistema com MDOF (o melhor para n grande!)

1) Dadas as condições iniciais e as funções de força

$$\{q(0)\}; \quad \{\dot{q}(0)\}; \quad \{Q(t)\}$$

$$\boxed{[\bar{u}]^{-1} = [\bar{u}]^T [m]}$$

2) Mapeie nas coordenadas naturais

$$\{\eta(0)\} = [\bar{u}]^{-1} \{q(0)\}; \quad \{\dot{\eta}(0)\} = [\bar{u}]^{-1} \{\dot{q}(0)\}; \quad \{N(t)\} = [\bar{u}]^T \{Q(t)\}$$

3) Solucione o problema em coordenadas naturais (conjunto de EDOs de 2ª ordem desacopladas) – use a transformada de Laplace, por exemplo

$$\{\ddot{\eta}\} + \text{diag}(\omega_r^2) \{\eta\} = \text{diag}^{-1}(m_r) \{N(t)\}$$

4) Retorne a solução para as coordenadas originais

$$\{q(t)\} = [\bar{u}] \{\eta(t)\}$$

Teste Modal

- Na prática, as propriedades de massa e rigidez do sistema não são completamente conhecidas, especialmente em sistemas de vários graus de liberdade muito complicados ou sistemas contínuos.
- Testes modais (trabalho experimental) tornam-se necessários para determinar e / ou validar as previsões teóricas sobre a natureza e extensão dos níveis de vibração e / ou estabilidade de sistemas dinâmicos.
- Em geral, o comportamento do sistema dinâmico pode ser completamente conhecido depois que as “ressonâncias” ou frequências naturais, as formas dos modos correspondentes e as massas generalizadas são obtidas nos testes de vibração no solo (GVT).



Referências

Engineering Vibrations – Daniel J. Inman

Elements of Vibration Analysis – Leonard Meirovitch