

3 Princípios de dinâmica e análise modal

Carlos De Marqui Junior

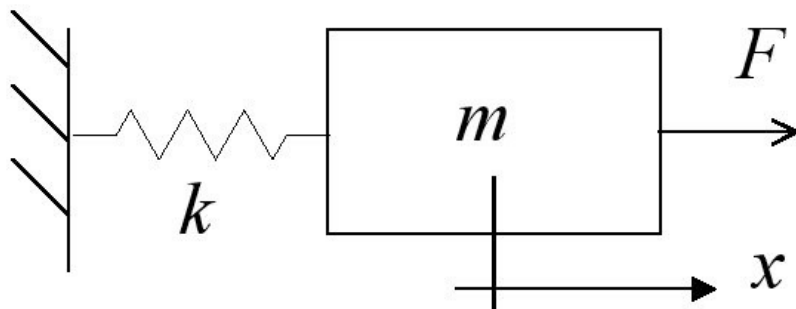
Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

Universidade de São Paulo

3.1 Oscilador harmônico

Sem dissipação de energia



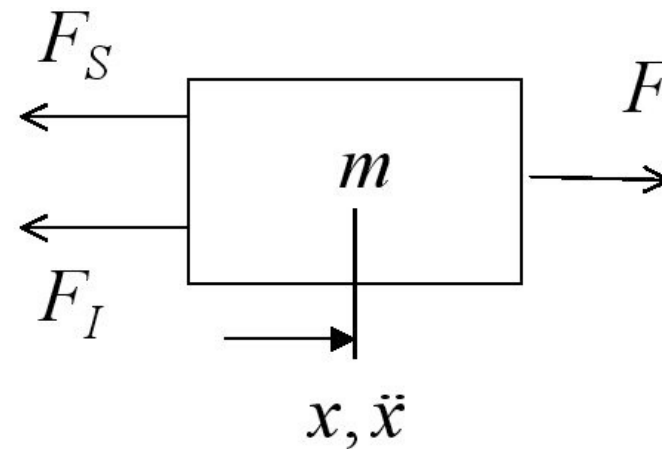
(da posição de equilíbrio)

$$F_S + F_I = F \Rightarrow kx + m\ddot{x} = F$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f \quad (3.1)$$

Diagrama de corpo livre



$$\omega_n \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \left[\sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{kg}}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Frequência de ressonância

Transformada de Laplace (e a inversa)

$$X(s) \equiv \mathcal{P}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt$$

s tem dimensões de frequência – variável de Laplace

$$[s] \times [t] = 1$$

$$x(t) = \mathcal{P}^{-1}\{X(s)\}$$

Propriedades importantes:

1) Deslocamento $\mathcal{P}\{e^{at} x(t)\} = X(s - a)$

2) Derivada $\mathcal{P}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$

$$\mathcal{P}\{\ddot{x}(t)\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

3) Linearidade $\mathcal{P}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(s) + bX_2(s)$

$$\mathcal{P}^{-1}\{aX_1(s) + bX_2(s)\} = ax_1(t) + bx_2(t)$$

Exemplos de transformadas

$$\frac{x(t)}{1}$$

$$\frac{X(s)}{1/s}$$

$$t$$

$$1/s^2$$

$$e^{at}$$

$$1/(s-a)$$

$$\sin(at)$$

$$a/(s^2 + a^2)$$

$$\cos(at)$$

$$s/(s^2 + a^2)$$

$$\delta(t)$$

$$1$$

- Solução de (3.1): $\ddot{x} + \omega_n^2 x = f$

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + \omega_n^2 X(s) = F(s)$$

$$(s^2 + \omega_n^2) X(s) = sx(0) + \dot{x}(0) + F(s)$$

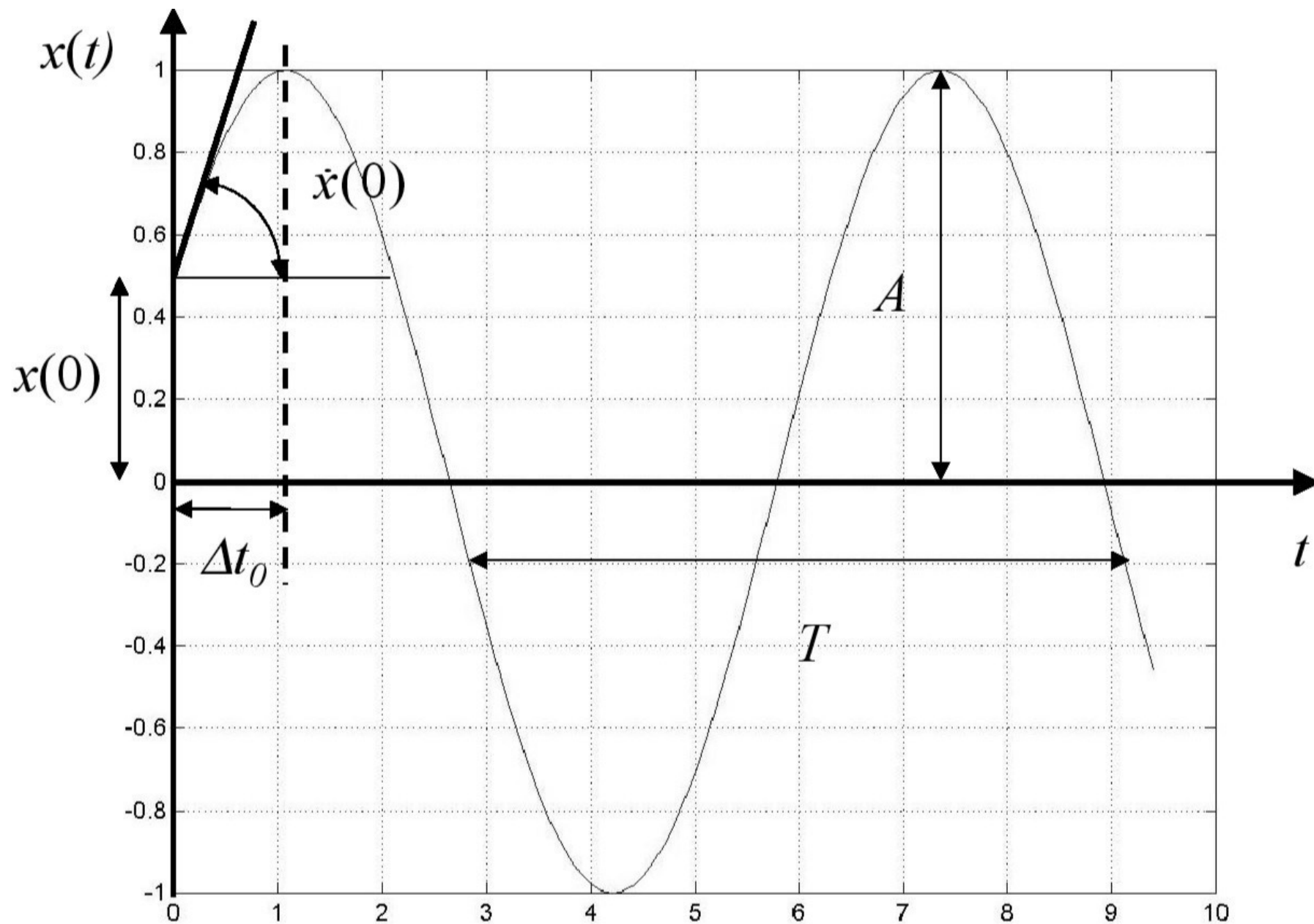
$$X(s) = \frac{sx(0)}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{F(s)}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$x(t) = x(0)\mathcal{O}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \right\} + \dot{x}(0)\mathcal{O}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \right\} + \mathcal{O}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{s^2 + \omega_n^2} \right\}$$

- A solução para $F(s) = 0$ (equação homogênea) é:

$$x(t) = x(0)\cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}\sin(\omega_n t) \quad (3.2)$$

$x(0), \dot{x}(0)$ são o deslocamento e velocidade iniciais, respectivamente



- Definições:

1) Período (s): $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$

2) Frequência angular (rad/s): $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

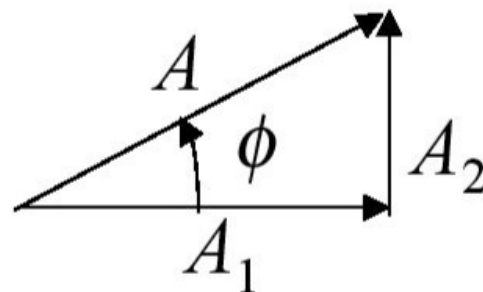
3) Frequência natural (Hz): $f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi}$

4) Amplitude do movimento (m): A

- De (3.2):

$$A_1 = x(0) = A \cos \phi$$

$$A_2 = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} = A \sin \phi$$



$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} = \tan^{-1} \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n x(0)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{x^2(0) + \frac{\dot{x}^2(0)}{\omega_n^2}}$$



Então, (3.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \\x(t) &= A[\cos \phi \cos(\omega_n t) + \sin \phi \sin(\omega_n t)] \\x(t) &= A \cos(\omega_n t - \phi) \quad (3.3)\end{aligned}$$

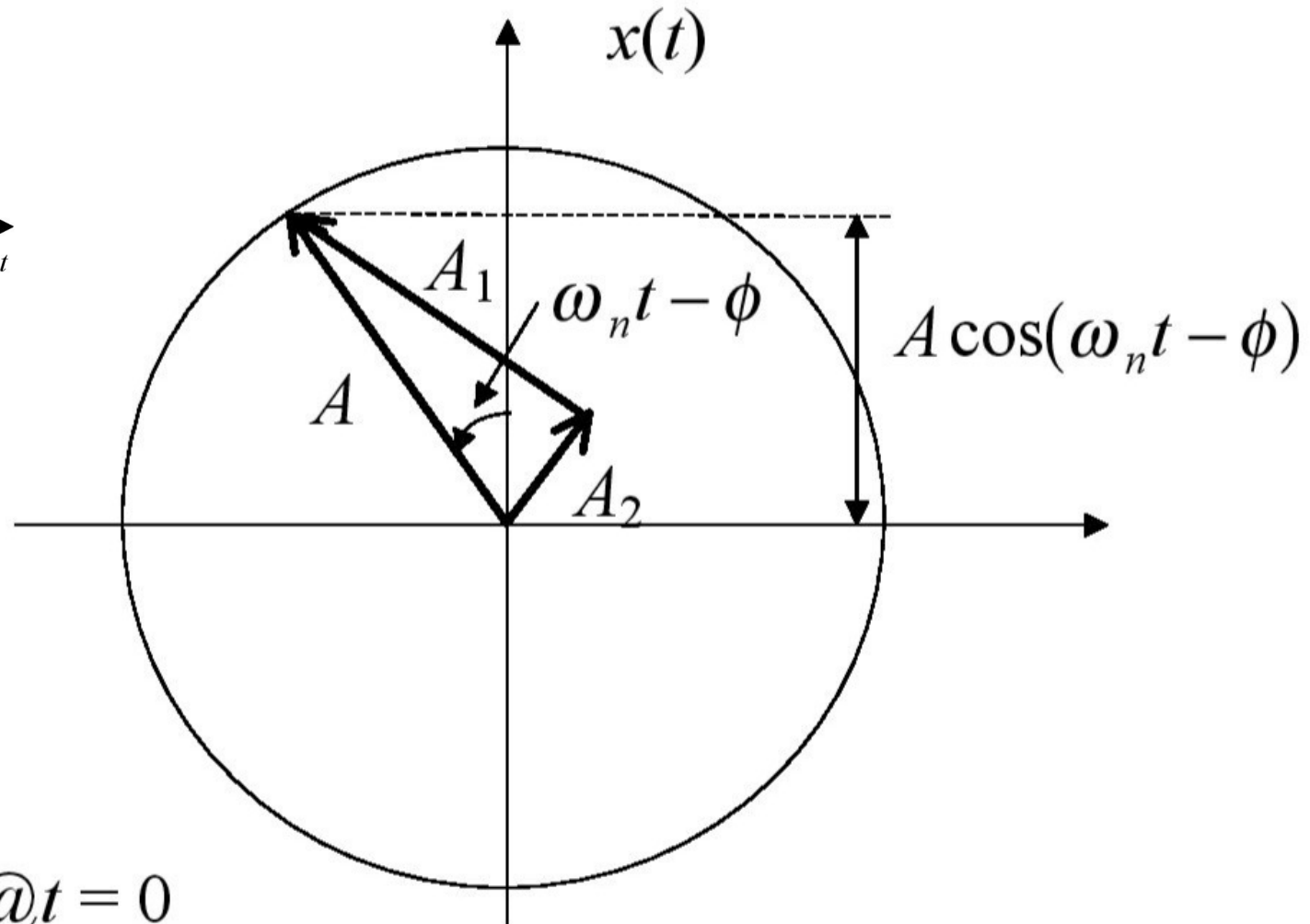
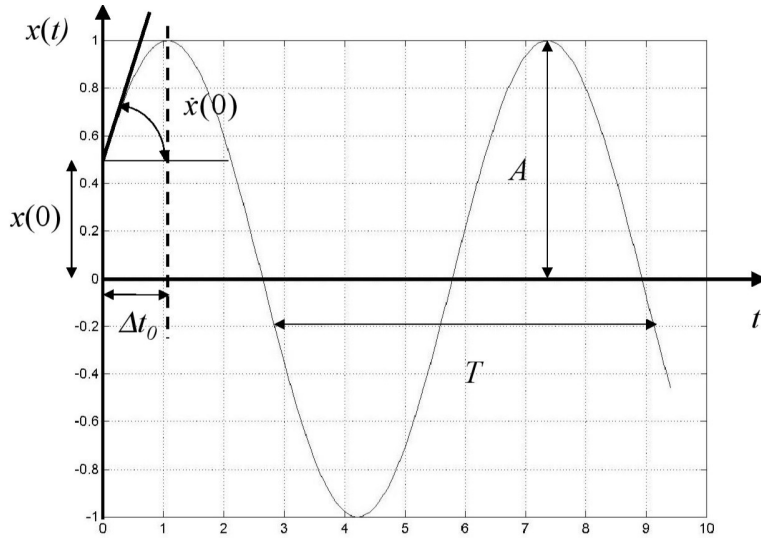
Onde ϕ é identificado como a fase do oscilador harmônico. O primeiro máximo ocorre quando

$$\cos(\omega_n \Delta t_0 - \phi) = 1 \Rightarrow \omega_n \Delta t_0 = \phi$$

$$\therefore \Delta t_0 = \frac{\phi}{\omega_n}$$

(o valor na figura da página 6)

O movimento pode ser descrito por um fasor A girando a uma velocidade angular constante (a frequência angular)



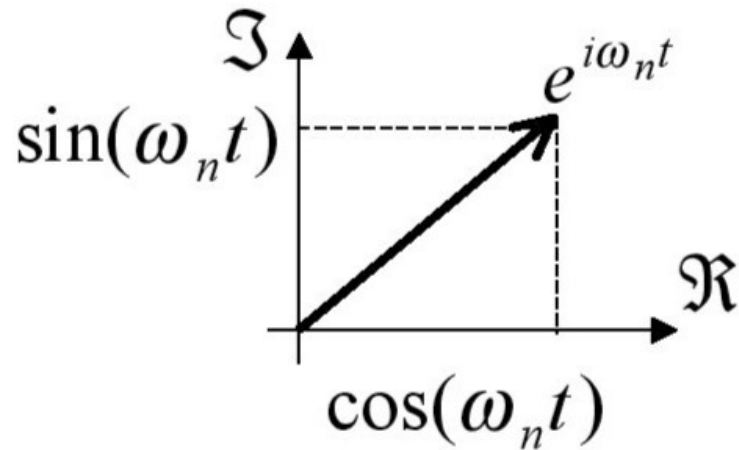
$$A = |\mathbf{A}|$$

$$\phi = \arg(\mathbf{A}) \quad @t = 0$$



Outra solução para (3.1): $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

A solução homogênea é obtida fazendo $f(t) = 0$, assumindo a solução exponencial e substituindo na equação diferencial:



$$x_h(t) = e^{st}$$

$$\therefore s^2 e^{st} + \omega_n^2 e^{st} = 0$$

$$\therefore s^2 + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm i\omega_n$$

$$\therefore x_h(t) = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t}$$

$$\therefore x_h(t) = c_1 [\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t] + c_2 [\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t]$$

$$\therefore x_h(t) = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{A_1} \cos \omega_n t + i \underbrace{(c_1 - c_2)}_{A_2} \sin \omega_n t$$

A solução particular é associada à função de carregamento. É qualquer solução que satisfaça a equação diferencial completa:

Assuma excitação harmônica: $f(t) = f_0 \cos \omega t$

Tente $x_p(t) = c \cos \omega t$ e substitua na E.D.:

$$-\omega^2 c \cos \omega t + \omega_n^2 c \cos \omega t = f_0 \cos \omega t$$

$$\therefore c = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

$$\therefore x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

A solução completa é:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \overbrace{\frac{f_0 \cos \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2}}^{f(t)} \quad \underline{\text{Domínio do tempo}}$$

De antes:

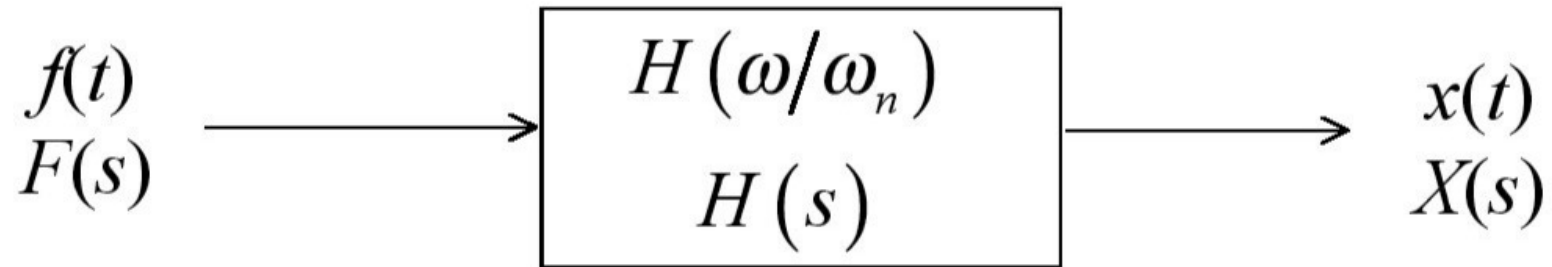
$$X(s) = \frac{sx(0)}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{F(s)}{s^2 + \omega_n^2} \quad \underline{\text{Domínio da frequência}}$$

Para condições iniciais nulas cada fórmula resulta:

$$\frac{x(t)}{f(t)} = \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

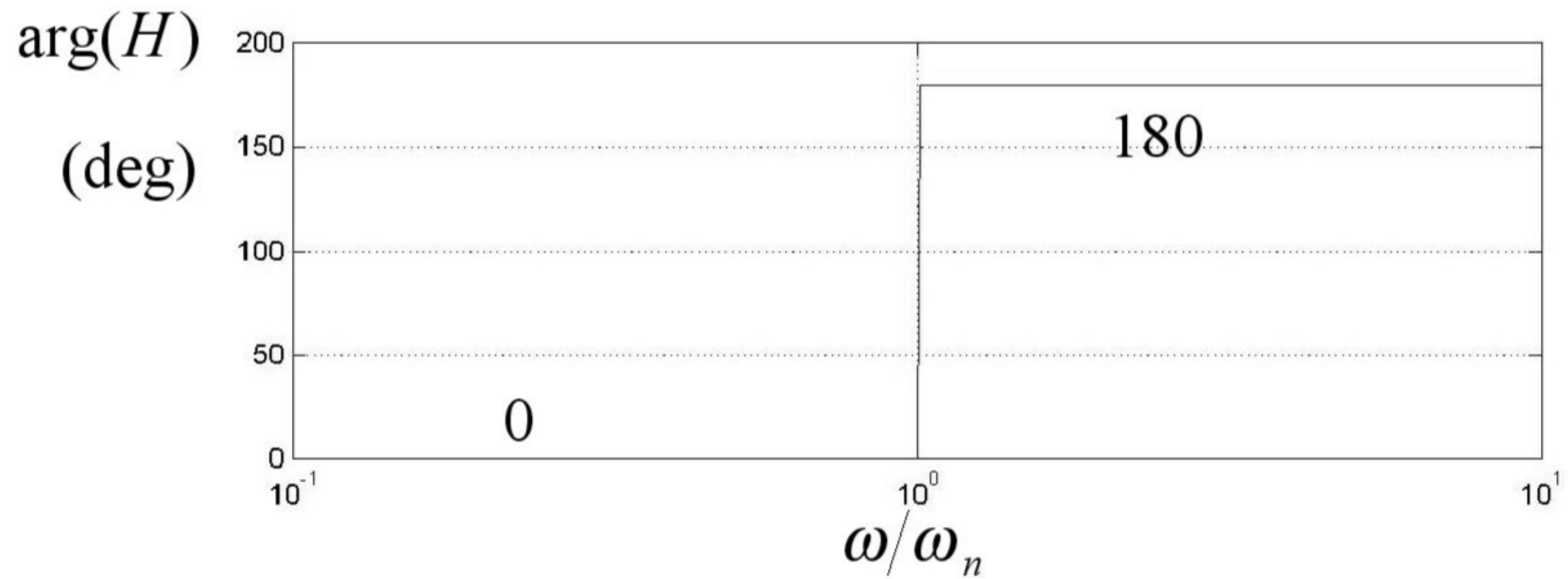
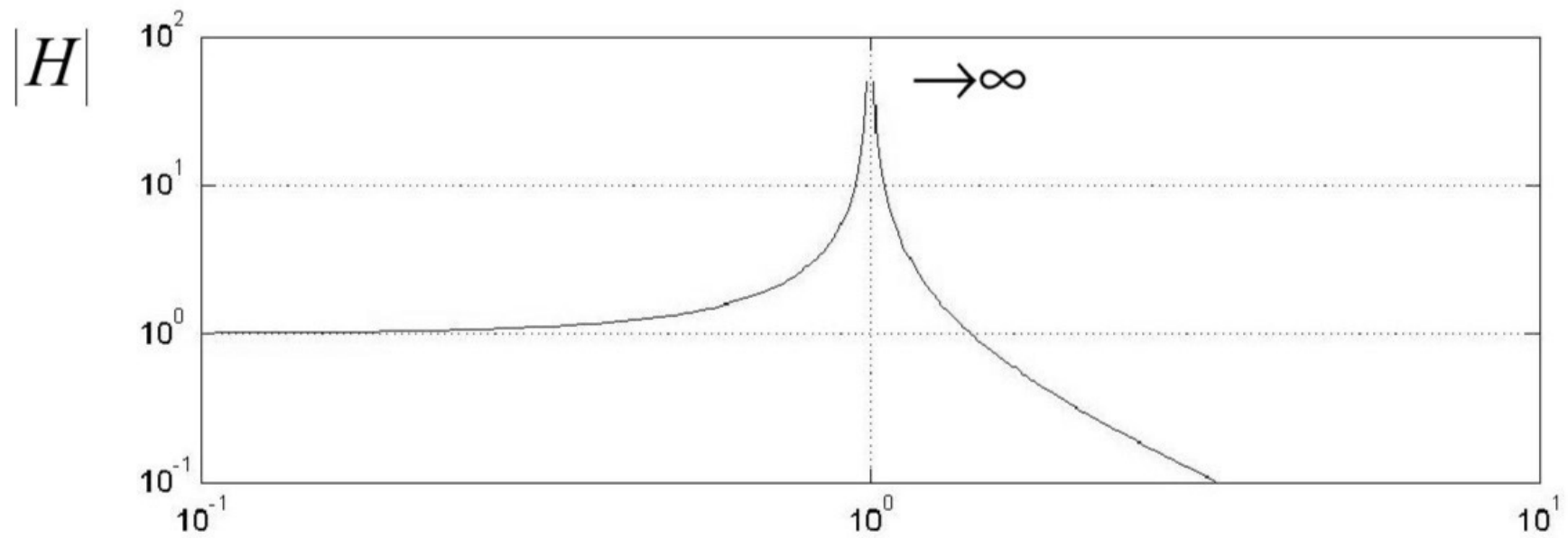
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$$

As duas são chamadas de resposta em frequência complexa e função de transferência do sistema, respectivamente, que relacionam a saída e entrada do sistema (no domínio do tempo e da frequência, respectivamente):

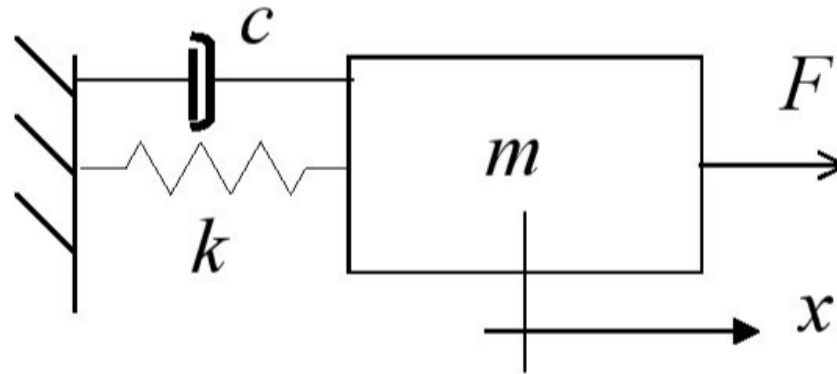


$$H(\omega/\omega_n) \equiv \frac{x(t)}{f(t)/\omega_n^2} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

$$H(s) \equiv \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$$



3.2 Vibração amortecida



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}$$

$$\frac{c}{m} \equiv 2\zeta\omega_n \quad \left[\frac{\frac{N}{m/s}}{kg} = \frac{1}{s} \right]$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f \quad (3.4)$$

ζ é o fator de amortecimento (parâmetro adimensional)

A solução prossegue como anteriormente:

$$x_h(t) = e^{st}$$

$$\therefore s^2 e^{st} + 2\zeta\omega_n s e^{st} + \omega_n^2 e^{st} = 0$$

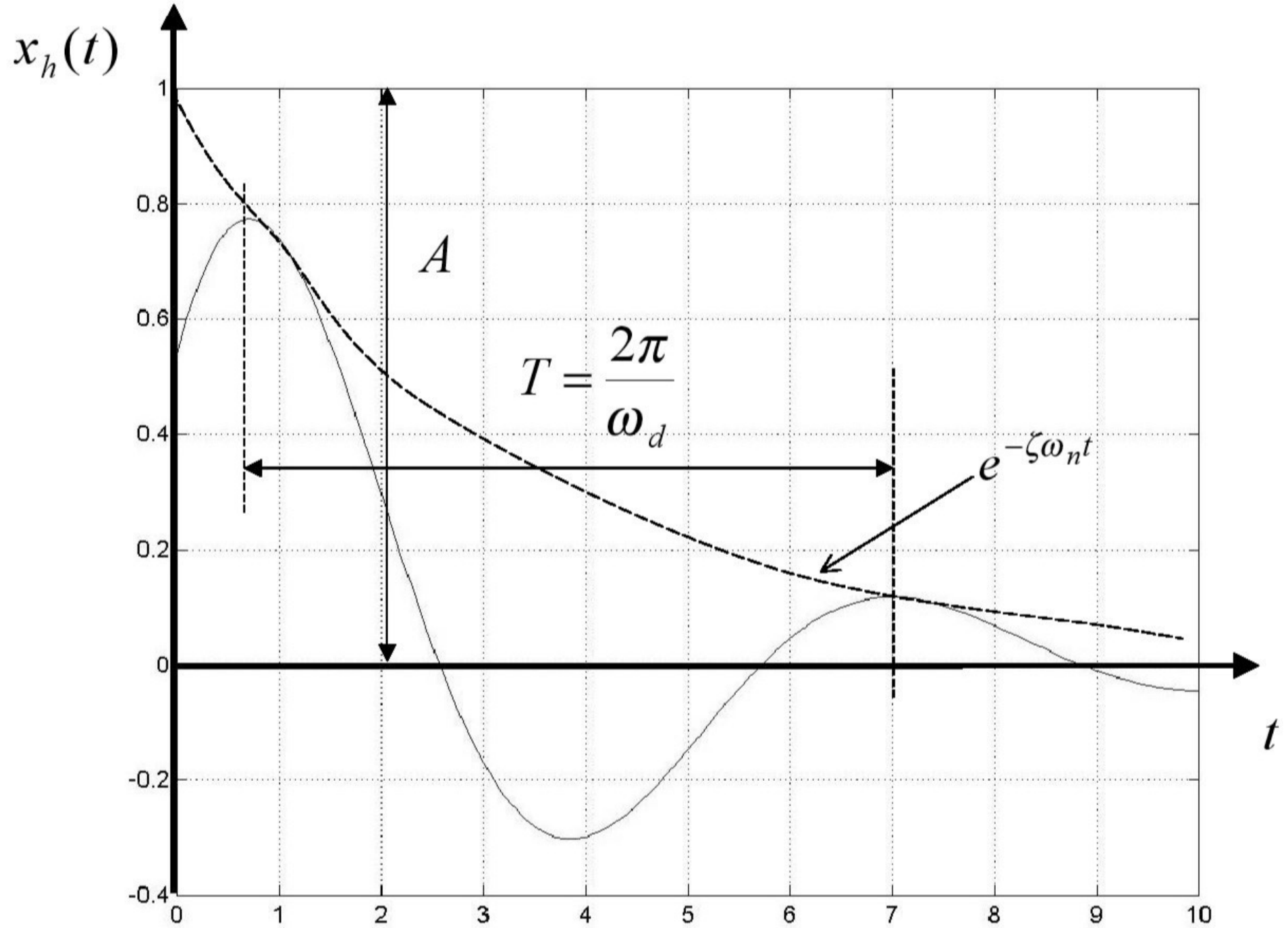
$$\therefore s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2 (\zeta^2 - 1)}}{2}$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \equiv -\zeta\omega_n \pm i\omega_d$$

$$\therefore x_h(t) = c_1 e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)t} + c_2 e^{(-\zeta\omega_n - i\omega_d)t} = e^{-\zeta\omega_n t} (c_1 e^{i\omega_d t} + c_2 e^{-i\omega_d t})$$

$$\therefore x_h(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad (3.5)$$

Note que a “frequência angular amortecida”, ω_d , substitui a frequência angular neste caso



Com o passar do tempo, a solução homogênea aproxima-se de zero. Então, ela é também chamada de solução transiente, associada com as condições iniciais aplicadas ao sistema.

A solução particular é, para excitação harmônica, $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$

Tente $x_p(t) = ce^{i\omega t}$:

$$-\omega^2 ce^{i\omega t} + 2i\zeta\omega\omega_n ce^{i\omega t} + \omega_n^2 ce^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\therefore c = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_n}$$

$$\therefore x_p(t) = \Re \left[\frac{f(t)}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_n} \right] \quad (3.6)$$

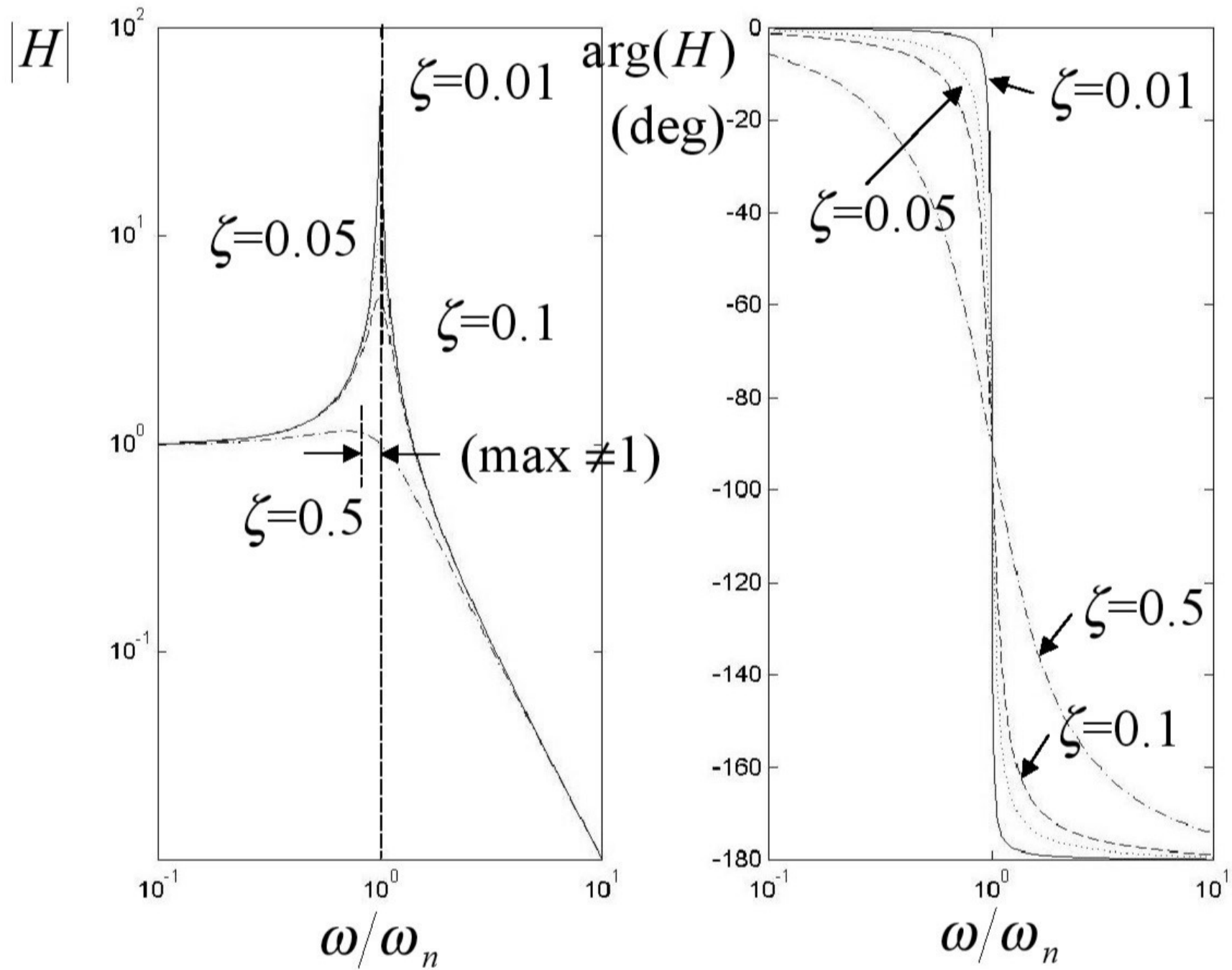
A solução particular também é chamada de solução em regime permanente, pois é a única que permanece conforme $t \rightarrow \infty$

Então, a resposta em frequência complexa e a função de transferência associadas com o sistema amortecido são, respectivamente:

$$H(\omega/\omega_n) \equiv \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + 2i\zeta (\omega/\omega_n)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \omega_n^2 + 2\zeta s\omega_n}$$

Note que, se o fator de amortecimento tende a zero, a solução para o oscilador harmônico é obtida. Além disso, na ressonância do caso amortecido, a resposta não tende a infinito.



Referências

Introductory Aeroelasticity

Fred Nitzsche

Mechanical and Aerospace Engineering

Carleton University