

Física 2 – Ciências Moleculares

Pedro N. O. Júnior

AULA 03 – 10/03/2025

pedronunes@usp.br



Cronograma

CRONOGRAMA TENTATIVO - FÍSICA II - CCM					
DATA	aula n°	Segundas (16h - 18h)	aula n°	Quartas (09h - 12h)	DATA
24/2	1	Apresentação do curso	2	Projeto - Definição	26/2
3/3	Feriado	Carnaval	Feriado	Carnaval	5/3
10/3	3	Revisão matemática	4	Projeto - Ideação	12/3
17/3	5	DEMO 1 - Pressão	6	Estática dos Fluidos	19/3
24/3	7	DEMO 2 - Hidrodinâmica	8	Hidrodinâmica	26/3
31/3	9	DEMO 3 - Hidrodinâmica II	10	Hidrodinâmica	2/4
7/4	11	Revisão - P1	12	PROVA 1	9/4
14/4	Feriado	Semana Santa	Feriado	Semana Santa	16/4
21/4	Feriado	Tiradentes	13	Oscilações I	23/4
28/4	14	DEMO 4 - Corda vibrante / Molas / Ondulatória	15	Oscilações II	30/4
5/5	16	Ondas	17	Ondas	7/5
12/5	18	DEMO 5 - Barulhinho bom	19	Som	14/5
19/5	20	Revisão - P2	21	PROVA 2	21/5
26/5	22	DEMO 6 - Fenômenos Térmicos e Gases	23	Primeira Lei e Gases	28/5
2/6	24	DEMO 7 - Máquinas térmicas	25	Segunda Lei	4/6
9/6	26	DEMO 8 - Cinética & Mecânica Estatística	27	Cinética dos Gases e Mecânica Estatística	11/6
16/6	Feriado	Corpus Christi	Feriado	Corpus Christi	18/6
23/6	28	Projeto	29	Apresentações	25/6
30/6	30	PROVA SUB	31	VISTA	2/7

ENTREGA 1

ENTREGA 2

ENTREGA 3

Primeiro, vetores...

Como descrever a posição

Para descrever essa a posição de um certo corpo, temos que lançar mão de um conceito matemático novo (em certa medida) o vetor. Para nossos propósitos, nos deteremos numa interpretação geométrica do vetor, dizemos que algo é um "vetor" se puder ser representado por um segmento de linha determinado, com direção, sentido e módulo bem definidos



- COMUTATIVIDADE;
- ASSOCIATIVIDADE;
- DISTRIBUTIVIDADE;
- NORMA, PRODUTO ESCALAR, SOMA DE VETORES E PRODUTO VETORIAL.

Primeiro, vetores...

Como descrever a posição

Para descrever essa a posição de um certo corpo, temos que lançar mão de um conceito matemático novo (em certa medida) o vetor. Para nossos propósitos, nos deteremos numa interpretação geométrica do vetor, dizemos que algo é um "vetor" se puder ser representado por um segmento de linha determinado, com direção, sentido e módulo bem definidos



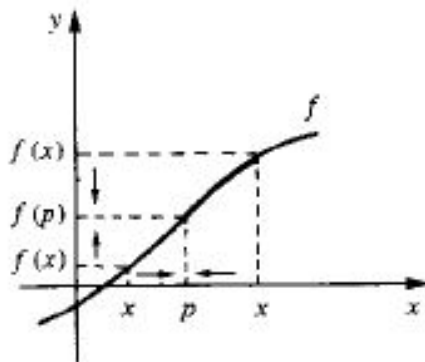
- COMUTATIVIDADE; $A + B = B + A$
- ASSOCIATIVIDADE; $A + (B + C) = (A + B) + C$
- DISTRIBUTIVIDADE; $c(A+B) = cA + cB$
- NORMA, PRODUTO ESCALAR, SOMA DE VETORES E PRODUTO VETORIAL.

Limite:

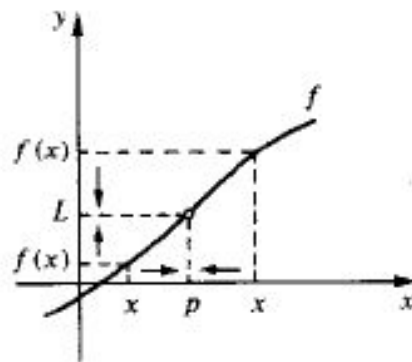
Intuitivamente, dizer que o *limite de $f(x)$, quando x tende a p , é igual a L* que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

significa que quando x tende a p , $f(x)$ tende a L .



Quando x tende a p , $f(x)$
tende a $f(p)$: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$



Quando x tende a p , $f(x)$ tende
a L : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$

Limite - exemplo:

EXEMPLO 3. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

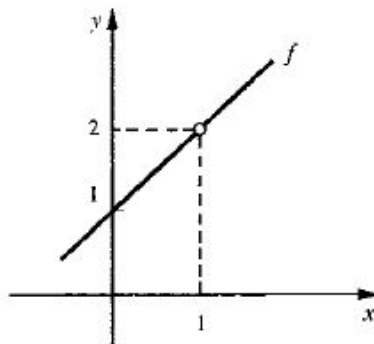
Solução

Seja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$; f não está definida em $x = 1$.

Para $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

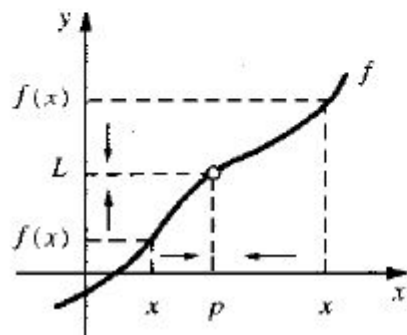
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$



Continuidade:

$$f \text{ contínua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Veremos, ainda, que se $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e se f não for contínua em p , então L será aquele valor que f *deveria* ter em p para ser contínua neste ponto.

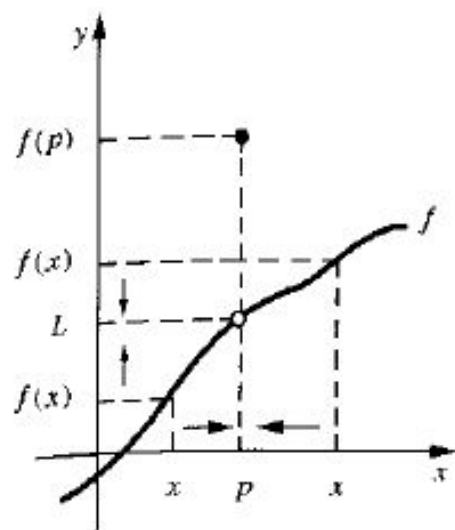


f não está definida em p .

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L.$$

L é o valor que f *deveria* ter em p para ser contínua em p .

Continuidade:



$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. f está definida em p , mas $L \neq f(p)$.
 L é o valor que f *deveria* ter em p , para ser contínua em p .

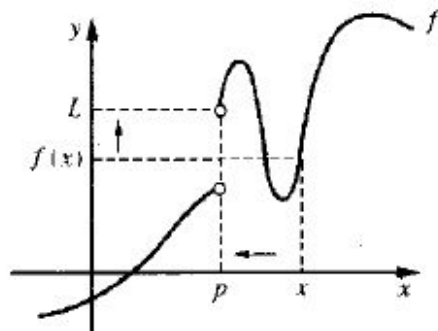
Limites laterais:

3.4. LIMITES LATERAIS

Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existe b tal que $]p, b[\subset D_f$.
Definimos:

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que} \\ p < x < p + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon. \end{cases}$$

O número L , quando existe, denomina-se *limite lateral à direita de f , em p* .



Teorema. Sejam f uma função, p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f . Então,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \\ \text{e } \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Quando x tende a p , pela direita, $f(x)$ tende a L : $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L$

Limites função composta:

3.5. LIMITE DE FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im}f \subset D_g$ onde $\text{Im}f$ é a *imagem de f* , ou seja, $\text{Im}f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)).$$

Supondo que $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = a$ é razoável esperar que

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow p} g(\overbrace{f(x)}^u) = \lim_{u \rightarrow a} g(u)$$

Limites função composta:

EXEMPLO 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$.

Solução

$$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}} = \sqrt{u} \quad \text{onde } u = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x > -1, x \neq 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \text{ e } g(u) = \sqrt{u} \text{ é contínua em } 2.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}} = \lim_{u \rightarrow 2} \sqrt{u} = \sqrt{2}.$$

Teorema do confronto:

3.6. TEOREMA DO CONFRONTO

Teorema (do confronto). Sejam f, g, h três funções e suponhamos que exista $r > 0$ tal que

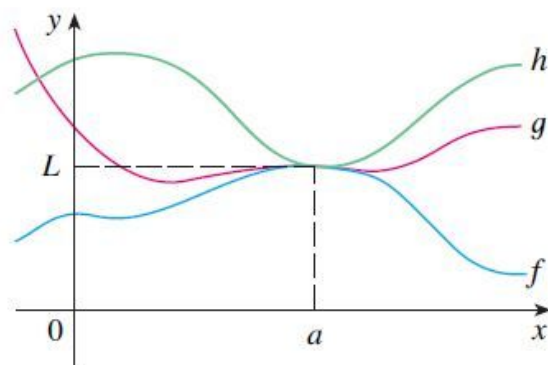
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$$

então

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L.$$



a) $|f(x)| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq f(x) \leq x^2.$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2$ segue do teorema do confronto que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

3.8. O LIMITE FUNDAMENTAL $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Propriedades:

Teorema. Se k for uma constante, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_1$, então

a) $\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)] = L + L_1 = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x).$

b) $\lim_{x \rightarrow p} kf(x) = kL = k \lim_{x \rightarrow p} f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) g(x) = LL_1 = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \lim_{x \rightarrow p} g(x).$

d) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L_1}$ desde que $L_1 \neq 0.$

Limites infinitos:

Teorema

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = +\infty \end{cases} \\
 b) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, L \text{ real}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = +\infty & \text{se } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases} \\
 c) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = -\infty \\
 d) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, L \text{ real}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\
 e) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, L \text{ real}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = +\infty \end{cases} \\
 g) \quad & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L, L \text{ real}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = -\infty & \text{se } L > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = +\infty & \text{se } L < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Demonstração. Para as demonstrações de (a) e (b), veja os Exemplos 13 e 14. As demonstrações dos demais itens ficam a cargo do leitor. ■

Observamos que o teorema anterior continua válido se substituirmos " $x \rightarrow +\infty$ " por " $x \rightarrow -\infty$ " ou por " $x \rightarrow p^+$ " ou por " $x \rightarrow p^-$ " ou por " $x \rightarrow p$ ".

Observação. O teorema anterior sugere-nos como operar com os símbolos $+\infty$ e $-\infty$: $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$, $L \cdot (+\infty) = +\infty$ se $L > 0$, $L \cdot (+\infty) = -\infty$ se $L < 0$, $L \cdot (-\infty) = -\infty$ se $L > 0$, $L \cdot (-\infty) = +\infty$ se $L < 0$, $L + (+\infty) = +\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $L + (-\infty) = -\infty$ se $L \in \mathbb{R}$, $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$ e $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Indeterminações

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Logaritmo e exponencial:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(1) a^x a^y = a^{x+y}.$$

$$(2) (a^x)^y = a^{xy}.$$

$$(3) (ab)^x = a^x b^x.$$

$$(4) \text{ Se } a > 1 \text{ e } x < y, \text{ então } a^x < a^y.$$

$$(5) \text{ Se } 0 < a < 1 \text{ e } x < y, \text{ então } a^x > a^y.$$

$$a^{\log_a \beta} = \beta$$

O logaritmo de β na base a é o expoente que se deve atribuir à base a para reproduzir β .

O logaritmo na base e é indicado por $\ln$, assim, $\ln = \log_e$. Temos então

$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Da observação acima, segue que, para todo $x > 0$,

$$e^{\ln x} = x.$$

Sejam $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, \alpha > 0$ e $\beta > 0$ reais quaisquer. São válidas as seguintes propriedades:

(4) (Mudança de base)

$$(1) \log_a \alpha \beta = \log_a \alpha + \log_a \beta.$$

$$(2) \log_a \alpha^\beta = \beta \log_a \alpha.$$

$$(3) \log_a \frac{\alpha}{\beta} = \log_a \alpha - \log_a \beta.$$

$$\log_a \alpha = \frac{\log_b \alpha}{\log_b a}.$$

$$(5) \text{ Se } a > 1 \text{ e } \alpha < \beta, \text{ então } \log_a \alpha < \log_a \beta.$$

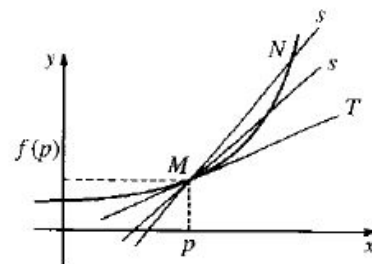
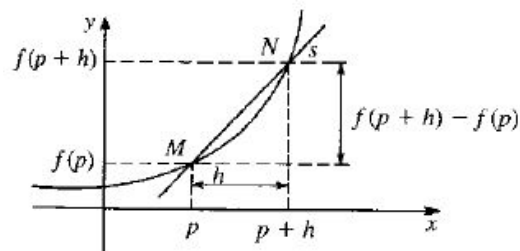
$$(6) \text{ Se } 0 < a < 1 \text{ e } \alpha < \beta, \text{ então } \log_a \alpha > \log_a \beta.$$

$$\gamma = \log_a \beta \Leftrightarrow a^\gamma = \beta$$

Derivada:

Este limite aparece de forma *natural* quando se procura definir reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. O quociente $\frac{f(p+h) - f(p)}{h}$, chamado às vezes de *razão incremental*, nada mais é do que o coeficiente angular da reta s que passa pelos pontos $M = (p, f(p))$ e $N = (p+h, f(p+h))$ do gráfico de $y = f(x)$

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$



Observe que a equação da reta s é

$$y - f(p) = m_s (x - p)$$

onde $m_s = \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$. Quando h tende a zero, o ponto N vai se aproximando cada vez mais de M , e a reta s vai *tendendo* para a posição da reta T de equação

$$y - f(p) = f'(p) (x - p).$$

Derivada:

EXEMPLO 5. Seja $f(x) = x^2$. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule $f'(x)$.

Solução

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h \quad (h \neq 0)$$

Segue que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Ou seja, a derivada, em x , de $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$. ■

Como veremos, um outro modo de expressar $f'(p)$ é através do limite

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

(Observe: fazendo $x - p = h$ recaímos no limite anterior.)

Derivada:

7.2. DERIVADA DE UMA FUNÇÃO

Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p , então diremos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p .

Derivada:

7.3. DERIVADAS DE x^n e $\sqrt[n]{x}$

Teorema. Seja $n \neq 0$ um natural. São válidas as fórmulas de derivação:

$$a) f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$$

$$b) f(x) = x^{-n} \Rightarrow f'(x) = -nx^{-n-1}, x \neq 0.$$

$$c) f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \text{ onde } x > 0 \text{ se } n \text{ for par e } x \neq 0 \text{ se } n \text{ for ímpar } (n \geq 2).$$

7.4. DERIVADAS DE e^x e $\ln x$

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação

$$a) f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

$$b) g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0.$$

Derivada:

7.5. DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Teorema. São válidas as fórmulas de derivação.

- a) $\text{sen}'x = \cos x$.
- b) $\cos'x = -\text{sen } x$.
- c) $\text{tg}'x = \sec^2 x$.
- d) $\sec'x = \sec x \text{ tg } x$.
- e) $\cotg'x = -\text{cosec}^2 x$.
- f) $\text{cosec}'x = -\text{cosec } x \cotg x$.

Teorema. Se f for derivável em p , então f será contínua em p .

Derivada:

7.7. REGRAS DE DERIVAÇÃO

Teorema 1. Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então as funções $f + g$, kf e $f \cdot g$ são deriváveis em p e têm-se

$$(D1) (f + g)'(p) = f'(p) + g'(p).$$

$$(D2) (kf)'(p) = kf'(p).$$

$$(D3) (f \cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

Teorema 2. (Regra do quociente). Se f e g forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ será derivável em p e

$$(D4) \left(\frac{f}{g} \right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{[g(p)]^2}.$$

(Em palavras: a derivada de um quociente é igual à derivada do numerador multiplicado pelo denominador menos o numerador multiplicado pela derivada do denominador, sobre o quadrado do denominador.)

Derivada:

7.11. APLICAÇÕES DA REGRA DA CADEIA

Pelo que vimos na seção anterior, sendo $y = f(u)$ e $u = g(x)$ deriváveis, com $\text{Im}g \subset D_f$, então a derivada da composta $y = f(g(x))$ é dada por

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) g'(x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) g'(x), \text{ onde } u = g(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

onde $\frac{dy}{du}$ deve ser calculada em $u = g(x)$.

Derivada:

9.2. INTERVALOS DE CRESCIMENTO E DE DECRESCIMENTO

Como consequência do TVM temos o seguinte teorema.

Teorema. Seja f contínua no intervalo I .

- a) Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I , então f será estritamente crescente em I .
- b) Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I , então f será estritamente decrescente em I .

Derivada:

9.3. CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

Seja f derivável no intervalo aberto I e seja p um ponto de I . A reta tangente em $(p, f(p))$ ao gráfico de f é

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \quad \text{ou} \quad y = f(p) + f'(p)(x - p).$$

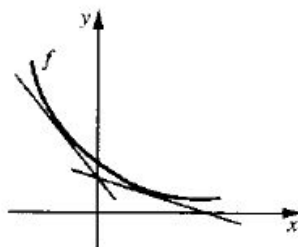
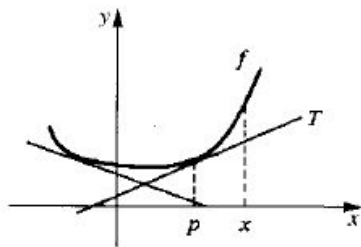
Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função T dada por

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p).$$

Definição 1. Dizemos que f tem a *concavidade para cima* no intervalo aberto I se

$$f(x) > T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

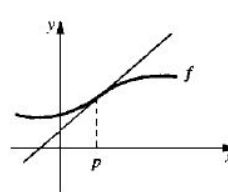


Definição 2. Dizemos que f tem a *concavidade para baixo* no intervalo aberto I se

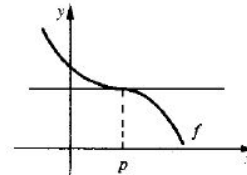
$$f(x) < T(x)$$

quaisquer que sejam x e p em I , com $x \neq p$.

Definição 3. Sejam f uma função e $p \in D_f$, com f contínua em p . Dizemos que p é *ponto de inflexão* de f se existirem números reais a e b , com $p \in]a, b[\subset D_f$, tal que f tenha concavidades de nomes contrários em $]a, p[$ e em $]p, b[$.



p é ponto de inflexão de f
(ponto de inflexão oblíquo)



p é ponto de inflexão de f
(ponto de inflexão horizontal)

Teorema. Seja f uma função que admite derivada até a 2.ª ordem no intervalo aberto I .

- a) Se $f''(x) > 0$ em I , então f terá a concavidade para cima em I .
- b) Se $f''(x) < 0$ em I , então f terá a concavidade para baixo em I .

Derivada:

9.4. REGRAS DE L'HOSPITAL

As regras de L'Hospital, que vamos enunciar a seguir e cujas demonstrações são deixadas para o final da seção, aplicam-se a cálculos de limites que apresentam indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

1.ª REGRA DE L'HOSPITAL. Sejam f e g deriváveis em $]p - r, p[$ e em $]p, p + r[$ ($r > 0$), com $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x - p| < r$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$$

e se $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observamos que a 1.ª regra de L'Hospital continua válida se substituirmos " $x \rightarrow p$ " por " $x \rightarrow p^+$ " ou por " $x \rightarrow p^-$ " ou por " $x \rightarrow \pm\infty$ ".

2.ª REGRA DE L'HOSPITAL. Sejam f e g deriváveis em $]m, p[$, com $g'(x) \neq 0$ em $]m, p[$. Nestas condições, se

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow p^-} g(x) = +\infty$$

e se $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (finito ou infinito) então $\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

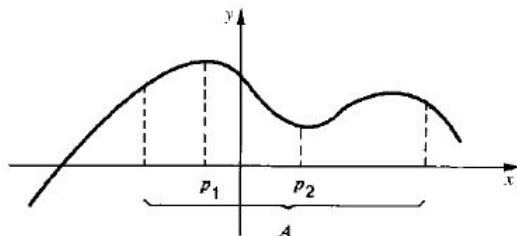
$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observamos que a 2.ª regra continua válida se substituirmos " $x \rightarrow p^-$ " por " $x \rightarrow p^+$ " ou por " $x \rightarrow p$ " ou por " $x \rightarrow \pm\infty$ ". A regra permanece válida se substituirmos um dos símbolos $+\infty$, ou ambos, por $-\infty$.

Derivada:

9.6. MÁXIMOS E MÍNIMOS

Definição 1. Sejam f uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o *valor máximo* de f em A ou que p um *ponto de máximo* de f em A se $f(x) \leq f(p)$ para todo x em A . Se $f(x) \geq f(p)$ para todo x em A , dizemos então que $f(p)$ é o *valor mínimo* de f em A ou que p é um *ponto de mínimo* de f em A .



$f(p_1)$ valor máximo de f em A
 $f(p_2)$ valor mínimo de f em A

Definição 2. Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que $f(p)$ é o *valor máximo global* de f ou que p é um *ponto de máximo global* de f se, para todo x em D_f , $f(x) \leq f(p)$. Se, para todo x em D_f , $f(x) \geq f(p)$, diremos então que $f(p)$ é o *valor mínimo global* de f ou que p é um *ponto de mínimo global* de f .

Teorema 1. Seja f uma função derivável em p , onde p é um ponto interior a D_f . Uma *condição necessária* para que p seja ponto de máximo ou de mínimo local é que $f'(p) = 0$.

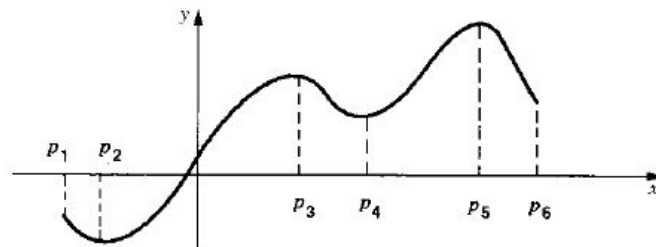
Definição 3. Sejam f uma função e $p \in D_f$. Dizemos que p é *ponto de máximo local* de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$. Por outro lado, dizemos que p é *ponto de mínimo local* de f se existir $r > 0$ tal que

$$f(x) \geq f(p)$$

para todo x em $]p - r, p + r[\cap D_f$.



p_1, p_3 e p_5 são pontos de máximo local; $f(p_5)$ é o valor máximo global de f
 p_2, p_4 e p_6 são pontos de mínimo local; $f(p_2)$ é o valor mínimo global de f

Teorema 2. Sejam f uma função que admite derivada de 2.ª ordem contínua no intervalo aberto I e $p \in I$.

- a) $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0 \Rightarrow p$ é ponto de mínimo local.
- b) $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0 \Rightarrow p$ é ponto de máximo local.

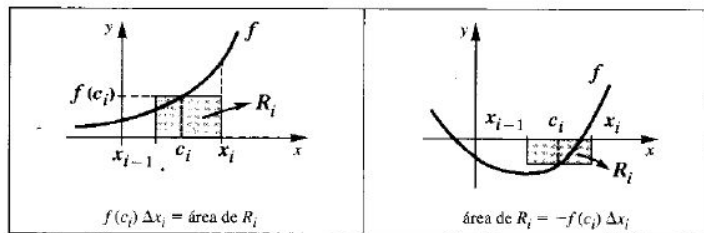
Integral:

Pois bem, o número

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$$

denomina-se *soma de Riemann* de f , relativa à partição P e aos números c_i .

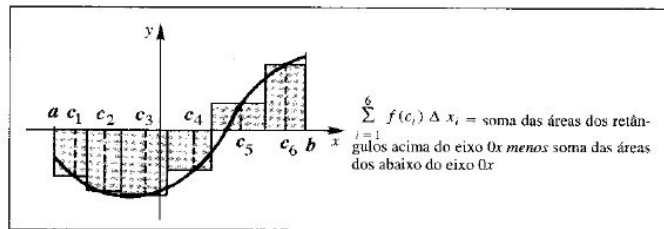
Observe que, se $f(c_i) > 0$, $f(c_i) \Delta x_i$ será então a área do retângulo R_i determinado pelas retas $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = 0$ e $y = f(c_i)$; se $f(c_i) < 0$, a área de tal retângulo será $-f(c_i) \Delta x_i$.



Geometricamente, podemos então interpretar a soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

como a *diferença* entre a soma das áreas dos retângulos R_i que estão acima do eixo x e a soma das áreas dos que estão abaixo do eixo x .



Seja F uma função definida em $[a, b]$ e seja $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ uma partição de $[a, b]$. O acréscimo $F(b) - F(a)$ que a F sofre quando se passa de $x = a$ para $x = b$ é igual à soma dos acréscimos $F(x_i) - F(x_{i-1})$ para i variando de 1 a 4:

$$F(b) - F(a) = F(x_4) - F(x_0) = [F(x_4) - F(x_3)] + [F(x_3) - F(x_2)] + [F(x_2) - F(x_1)] + [F(x_1) - F(x_0)].$$

Isto é:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^4 [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

De modo geral, se $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ for uma partição de $[a, b]$, então

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Integral:

11.3. INTEGRAL DE RIEMANN: DEFINIÇÃO

Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real. Dizemos que $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ tende a L , quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, e escrevemos

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ϵ mas não da particular escolha dos c_i , tal que

$$\left| \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

para toda partição P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$.

Tal número L , que quando existe é único (verifique), denomina-se *integral* (de Riemann) de f em $[a, b]$ e indica-se por $\int_a^b f(x) dx$. Então, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i.$$

11.4. PROPRIEDADES DA INTEGRAL

Teorema. Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então

a) $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

b) kf é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

c) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

d) Se $c \in]a, b[$ e f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

1.º teorema fundamental do cálculo

Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Integral:

EXEMPLO 1. Calcule $\int_1^2 x^2 dx$.

Solução

$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ e f é contínua em $[1, 2]$, assim

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

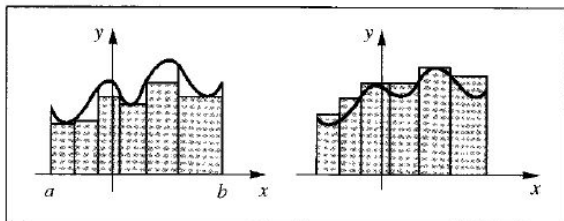
ou seja,

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}.$$

Integral:

Uma boa definição para *área de A* deverá implicar que a soma de Riemann $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação por *falta* da área de A e que $\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$ seja uma aproximação por excesso, isto é

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i$$



Como as somas de Riemann mencionadas tendem a $\int_a^b f(x) dx$, quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, nada mais natural do que definir a *área de A* por

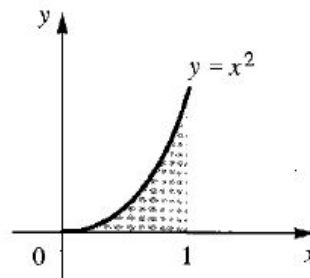
$$\text{área } A = \int_a^b f(x) dx.$$

Da mesma forma define-se área de A no caso em que f é uma função integrável qualquer, com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$.

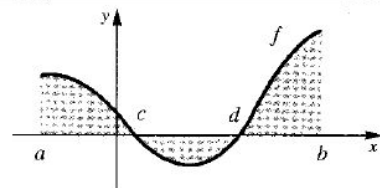
EXEMPLO 1. Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e pelo gráfico de $f(x) = x^2$.

Solução

$$\text{área } A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



Integral:



Seja A o conjunto hachurado.

$$\text{Área} = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

Observe:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx = \text{soma das áreas dos conjuntos acima do eixo } Ox \text{ menos soma das áreas dos conjuntos abaixo do eixo } Ox.$$

11.7. MUDANÇA DE VARIÁVEL NA INTEGRAL

Veremos, no Vol. 2, que toda *função contínua* num intervalo I admite, neste intervalo, uma primitiva. Por ora, vamos admitir tal resultado e usá-lo na demonstração do próximo teorema.

Teorema. Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois reais quaisquer em I . Seja $g : [c, d] \rightarrow I$, com g' contínua em $[c, d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nestas condições

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du.$$

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

$$\begin{cases} x = g(u) ; dx = g'(u) du \\ x = a & ; u = c \text{ onde } g(c) = a \\ x = b & ; u = d \text{ onde } g(d) = b \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u)) g'(u) du$$

Integral:

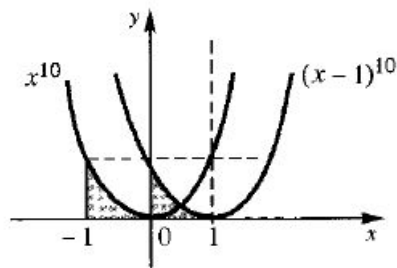
EXEMPLO 1. Calcule $\int_0^1 (x-1)^{10} dx$.

Solução

Façamos $x - 1 = u$, ou seja, $x = u + 1$.

$$\begin{cases} x = u + 1; dx = (u + 1)' du & \text{ou } dx = du \\ x = 0 & ; u = -1 \\ x = 1 & ; u = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x-1)^{10} dx = \int_{-1}^0 u^{10} du = \left[\frac{u^{11}}{11} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{11}.$$



EXEMPLO 3. Calcule $\int_0^1 e^{3x} dx$.

Solução

Multiplicando o integrando por 3 e dividindo a integral por 3, nada muda:

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 e^{\textcircled{3x}} \underbrace{3 dx}_{du}$$

$$\begin{cases} u = 3x & ; du = 3dx \\ x = 0 & ; u = 0 \\ x = 1 & ; u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 e^u du = \frac{1}{3} [e^u]_0^3 = \frac{1}{3} [e^3 - 1]$$

Integral:

TÉCNICAS DE PRIMITIVAÇÃO

12.1. PRIMITIVAS IMEDIATAS

Sejam $\alpha \neq 0$ e c constantes reais. Das fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes de primitivação:

$$a) \int c \, dx = cx + k \qquad b) \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \quad (\alpha \neq -1)$$

$$c) \int e^x \, dx = e^x + k \qquad d) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + k \quad (x > 0)$$

$$e) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln(-x) + k \quad (x < 0) \qquad f) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + k$$

$$g) \int \cos x \, dx = \sin x + k \qquad h) \int \sin x \, dx = -\cos x + k$$

$$i) \int \sec^2 x \, dx = \tan x + k \qquad j) \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + k$$

$$l) \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + k \qquad m) \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + k$$

$$n) \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + k \qquad o) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + k$$

Integral:

12.2. TÉCNICA PARA CÁLCULO DE INTEGRAL INDEFINIDA DA

FORMA $\int f(g(x)) g'(x) dx$

Sejam f e g tais que $\text{Im } g \subset D_f$ com g derivável. Suponhamos que F seja uma primitiva de f , isto é, $F' = f$. Segue que $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)) g'(x)$, de fato,

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x).$$

Deste modo, de

$$\int f(u) du = F(u) + k$$

segue

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + k.$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = ?$$

$$u = g(x) \quad ; \quad du = g'(x) dx$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + k = F(g(x)) + k$$

EXEMPLO 1. Calcule $\int x \cos x^2 dx$.

Solução

Fazendo

$$u = x^2, \quad du = 2x dx.$$

Então,

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 (2x dx) = \frac{1}{2} \int \cos u du.$$

Como

$$\frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + k,$$

resulta

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sin x^2 + k.$$

Integral:

12.3. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Suponhamos f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I . Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ou

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Supondo, então, que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando que $f(x)g'(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ também admitirá primitiva em I e

$$\textcircled{1} \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

que é a regra de *integração por partes*.

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, o que nos permite escrever a regra $\textcircled{1}$ na seguinte forma usual:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Suponha, agora, que se tenha que calcular $\int \alpha(x)\beta(x)dx$. Se você perceber que, multiplicando a derivada de uma das funções do integrando por uma primitiva da outra, chegue-se a uma função que possui primitiva imediata, então aplique a regra de integração por partes.

EXEMPLO 1. Calcule $\int x \cos x dx$.

Solução

A derivada de x é 1; $\sin x$ é uma primitiva de $\cos x$. Como $1 \cdot \sin x$ tem primitiva imediata, a regra de integração por partes resolve o problema.

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\ \uparrow \quad \uparrow \\ f \quad g' &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx. \end{aligned}$$

Assim:

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$$

ou seja,

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + k. \quad \blacksquare$$

Integral:

12.4. MUDANÇA DE VARIÁVEL

Seja f definida num intervalo I . Suponhamos que $x = \varphi(u)$ seja inversível, com inversa $u = \theta(x)$, $x \in I$, sendo φ e θ deriváveis.

$$\textcircled{1} \quad \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = F(u) + k \quad (u \in D_\varphi)$$

então,

$$\int f(x) dx = F(\theta(x)) + k.$$

De fato, de $\textcircled{1}$

$$F'(u) = f(\varphi(u)) \varphi'(u)$$

então,

$$\begin{aligned} (F(\theta(x)))' &= F'(\theta(x)) \theta'(x) \\ &= f(\varphi(\theta(x))) \varphi'(\theta(x)) \theta'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

pois, $\varphi(\theta(x)) = x$ e $\varphi'(\theta(x)) \theta'(x) = (\varphi(\theta(x)))' = 1$.

$$\int f(x) dx = ?$$

$$x = \varphi(u) \quad ; \quad dx = \varphi'(u) du$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

observando que, após calcular a integral indefinida do 2.º membro, deve-se voltar à variável x através da inversa de φ .

EXEMPLO 1. Calcule $\int x^2 \sqrt{x+1} dx$.

Solução

$$\int x^2 \sqrt{x+1} dx = ?$$

$$x+1 = u \Leftrightarrow x = \overbrace{u-1}^{\varphi(u)}; dx = du \quad (\varphi'(u) = 1)$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{x+1} dx &= \int (u-1)^2 \sqrt{u} du = \int (u^2 - 2u + 1) u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - 2 \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k \\ &= \frac{2}{7} \sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5} \sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + k \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int x^2 \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{7} \sqrt{(x+1)^7} - \frac{4}{5} \sqrt{(x+1)^5} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + k. \quad \blacksquare$$

Observação. A mudança $x+1 = u^2$, $u > 0$, também é interessante; veja que esta mudança elimina a raiz do integrando. Faça os cálculos adotando esta mudança.

Derivada para múltiplas variáveis:

10.1. DERIVADAS PARCIAIS

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0 , podemos considerar a função g de uma variável dada por

$$g(x) = f(x, y_0).$$

A derivada desta função no ponto $x = x_0$ (caso exista) denomina-se *derivada parcial de f , em relação a x , no ponto (x_0, y_0)* e indica-se com uma das notações:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}.$$

Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. De acordo com a definição de derivada temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}$$

Derivada para múltiplas variáveis:

ou, ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Seja A o subconjunto de D_f formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe; fica assim definida uma nova função, indicada por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e definida em A , que a cada $(x, y) \in A$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Tal função denomina-se *função derivada parcial de 1.ª ordem de f , em relação a x* , ou, simplesmente, *derivada parcial de f em relação a x* .

De modo análogo, define-se *derivada parcial de f , em relação a y , no ponto (x_0, y_0)* que se indica por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{y=y_0}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Derivada para múltiplas variáveis:

ou

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Para se calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ fixa-se $y = y_0$ em $z = f(x, y)$ e calcula-se a derivada de $g(x) = f(x, y_0)$ em $x = x_0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$. Da mesma forma, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é a derivada, em relação a x , de $f(x, y)$, mantendo-se y constante. Por outro lado, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ é a derivada, em relação a y , de $f(x, y)$, mantendo-se x constante.

Derivada para múltiplas variáveis:

EXEMPLO 1. Seja $f(x, y) = 2xy - 4y$. Calcule:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$

Solução

a) Devemos olhar y como constante e derivar em relação a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 4y) = 2y$$

pois

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}(-4y) = 0.$$

Por limite:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)y - 4y - 2xy + 4y}{\Delta x} \\ &= 2y.\end{aligned}$$

Derivada para múltiplas variáveis:

10.2. DERIVADAS PARCIAIS DE FUNÇÕES DE TRÊS OU MAIS VARIÁVEIS REAIS

Sejam $w = f(x, y, z)$ e $(x_0, y_0, z_0) \in D_f$. Mantendo-se y_0 e z_0 constantes, podemos considerar para função $g(x) = f(x, y_0, z_0)$. A derivada desta função, em $x = x_0$ (caso exista), denomina-se *derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0, z_0)* e indica-se por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}$.

De modo análogo, definem-se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$. Tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.\end{aligned}$$

Da mesma forma, definem-se as derivadas parciais de uma função de mais de três variáveis reais.

Operador nabla/vetor del:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Repare que “**f**” se trata de uma função ou um campo escalar, e “**F**” de um campo vetorial:

$$\vec{\nabla} f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \text{ (Gradiente),}$$

Um campo escalar $f(x)$ associa um número real a cada ponto do espaço. Exemplo: temperatura em uma região do espaço.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \text{ (Divergente),}$$

Um campo vetorial $F(x)$ associa um vetor a cada ponto do espaço. Exemplo: velocidade do vento em um ponto da atmosfera.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \text{ (Rotacional).}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Operador nabla/vetor del:

$f(x,y,z)$ pode ser derivado em todas as direções, permitindo calcular ∇f .

$F(x,y,z)$ pode ser derivado em todas as direções, permitindo calcular $\nabla \cdot F$ e $\nabla \times F$.

Gradiente ∇f (age em campos escalares e produz um campo vetorial).

Divergente $\nabla \cdot F$ (age em campos vetoriais e produz um campo escalar).

Rotacional $\nabla \times F$ (age em campos vetoriais e produz um novo campo vetorial).

Campo escalar:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

Campo vetorial:

$$F(z,y,z) = (y, -x, 0)$$

Campo	Fenômeno	Equação
Escalar $f(x, y, z)$	Temperatura em um metal esférico	$f(x, y, z) = T_0 e^{-\alpha r}$
Vetorial $\mathbf{F}(x, y)$	Velocidade do vento em um furacão	$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{Ay}{x^2+y^2}, \frac{Ax}{x^2+y^2}\right)$

Operador nabla/vetor del:

EXEMPLO 2. Faça a representação geométrica do campo vetorial

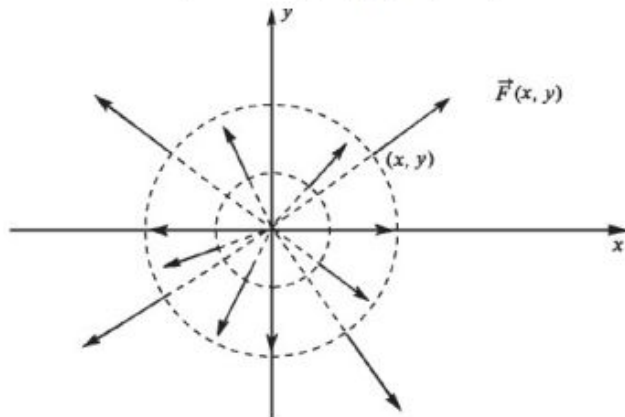
$$\vec{F}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j}.$$

Solução

$$\|\vec{F}(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}; \text{ segue que a}$$

intensidade do campo é a mesma nos pontos de uma mesma circunferência de

centro na origem. Observe que a intensidade do campo no ponto (x, y) é igual ao raio da circunferência, de centro na origem, que passa por este ponto.



Operador nabla/vetor del:

$$\vec{\nabla} f = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} (\textit{Gradiente})$$

Mede a taxa de variação de uma função em cada direção da coordenada.

Exemplo: No caso de uma superfície topográfica (como um mapa de elevação), o gradiente aponta para a direção mais íngreme da subida.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} (\textit{Divergente})$$

Mede quanto um campo vetorial está “saindo” ou “entrando” em um ponto, em outras palavras:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} > 0 \rightarrow$ trata-se de uma fonte no ponto;

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} < 0 \rightarrow$ trata-se de um sumidouro no ponto;

Exemplo: No fluxo de um fluido, um ponto com divergente positivo representa uma área onde o fluido está se expandindo (como uma torneira aberta), enquanto um ponto com divergente negativo representa uma área onde o fluido está sendo sugado (como um ralo).

Operador nabla/vetor del:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) (\text{Rotacional}).$$

Mede a tendência de um campo vetorial girar em torno de um ponto.

Se $\nabla \times F = 0$, o campo não tem rotação, ou seja, não há vórtices.

Se $\nabla \times F \neq 0$, o campo tem tendência a girar, e o vetor resultante aponta na direção do eixo de rotação.

Exemplo: No fluxo de um rio, se a água forma redemoinhos, o rotacional será diferente de zero naquela região.

Se $\nabla \times F = 0$ e definido em um espaço simplesmente conexo, é conservativo. Portanto, pode ser escrito como $F = \nabla \phi$

Exemplo: O campo gravitacional g e o campo elétrico de uma carga pontual E são irrotacionais, pois ambos podem ser escritos como o gradiente de um potencial escalar (V ou ϕ).

Operador nãbla/vetor

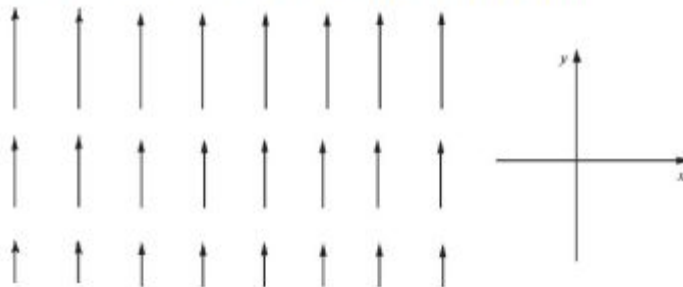
EXEMPLO 2. Seja $\vec{F}(x, y) = Q(x, y) \vec{j}$. Suponha que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$.

a) Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas.

b) Calcule $\text{rot} \vec{F}$.

Solução

a) Como, para todo (x, y) , $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$, segue que Q não depende de x , isto é, Q é constante sobre cada reta paralela ao eixo x .



O campo acima satisfaz as condições dadas. Sugerimos ao leitor desenhar outros campos que satisfaçam as condições dadas.

b) $\text{rot} \vec{F}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \vec{k} = \vec{0}$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aplicações:

Operador	Mede o quê?	Exemplo físico
Gradiente ∇f	Direção e intensidade da variação de uma função escalar	Inclinação de um terreno
Divergente $\nabla \cdot \mathbf{F}$	Expansão ou contração de um campo vetorial	Fluxo de água saindo de uma torneira
Rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$	Tendência de um campo girar	Redemoinho em um rio
Laplaciano $\nabla^2 f$	Dispersão da variação da função no espaço	Difusão de calor