

2. Aeroelasticidade Estática 1

Carlos De Marqui Junior

Departamento de Engenharia Aeronáutica

Escola de Engenharia de São Carlos

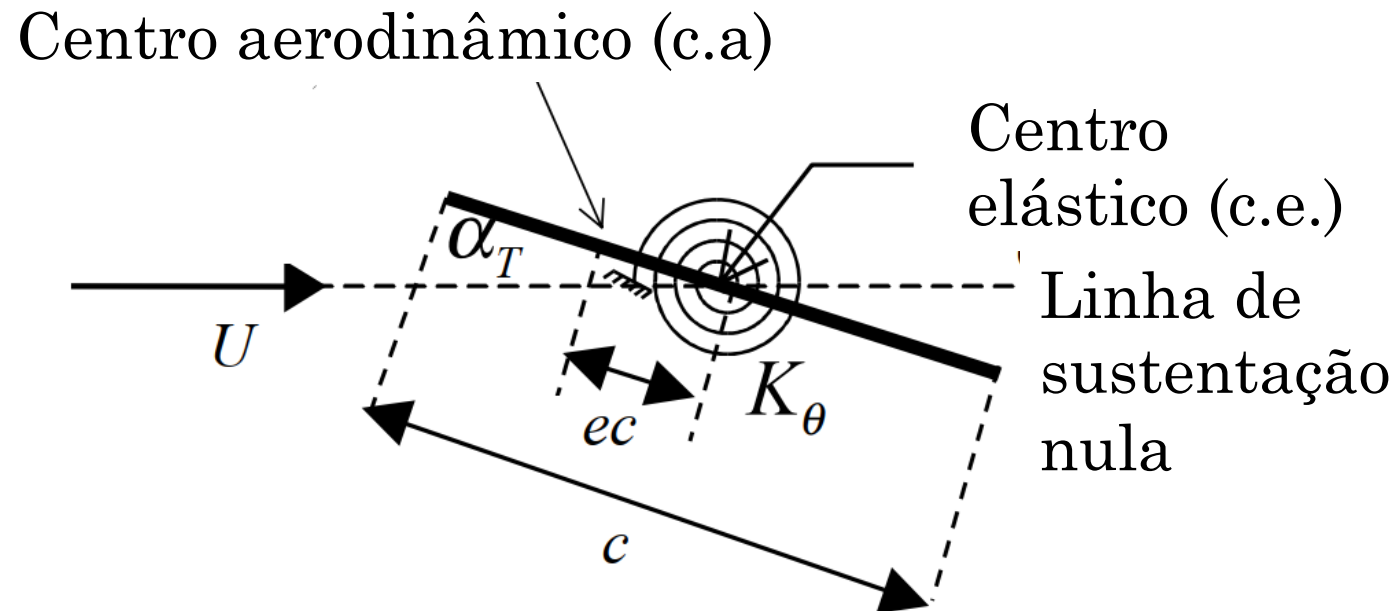
Universidade de São Paulo

2.1 Divergência de uma Seção Típica

- Instabilidade aeroelástica estática onde forças aerodinâmicas e elásticas desempenham um papel relevante (Diagrama de Collar da aula passada).
- Se considerarmos uma seção típica em velocidade constante do escoamento e submetida a uma pequena variação de sua posição de equilíbrio, um momento aerodinâmico, que será contrabalançado por um momento elástico restaurador, é induzido.
- O momento elástico é independente da velocidade do escoamento, enquanto que o momento aerodinâmico é proporcional ao quadrado da velocidade.
- Haverá, portanto, uma velocidade para a qual o equilíbrio (entre momento aerodinâmico e elástico) não pode ser mantido e, portanto, grandes deslocamentos torcionais são gerados, levando a uma falha estrutural.
- Esta velocidade é conhecida como velocidade crítica de divergência.



- O caso tratado aqui é de um aerofólio vinculado a uma mola de torção no seu centro elástico (c.e.) e submetido a velocidade U .
- O ponto de fixação é o centro elástico, que pode ser identificado como o centro de cisalhamento da seção transversal da asa.
- A distância entre o centro aerodinâmico (onde a sustentação e momento aerodinâmicos são calculados) e o centro elástico é medido como uma fração (e) da corda do aerofólio (c).



- O ângulo total de ataque (medido entre a velocidade do escoamento e linha de sustentação nula) é a soma de um ângulo de ataque "rígido" inicial mais um incremento devido à torção elástica da mola:

$$\alpha_T = \alpha + \theta$$

- Portanto, a sustentação e o momento de arfagem, por unidade de comprimento (indicado pelos apóstrofes), atuando no centro aerodinâmico são, respectivamente:

$$L' = qC_\ell c = qc \frac{\partial C_\ell}{\partial \alpha} (\alpha + \theta)$$

$$M'_0 = qC_{m0} c^2$$

onde

$\partial C_\ell / \partial \alpha \equiv C_{\ell_\alpha}$ inclinação da curva de sustentação do perfil (2D)

$q = \rho U^2 / 2$ pressão dinâmica; ρ é a densidade do ar

C_{m0} coeficiente de momento de arfagem do aerofólio em torno do centro aerodinâmico (independente do ângulo de ataque para pequenos ângulos).

O momento aerodinâmico, por unidade de comprimento (em N.m / m), em torno do centro elástico se torna:

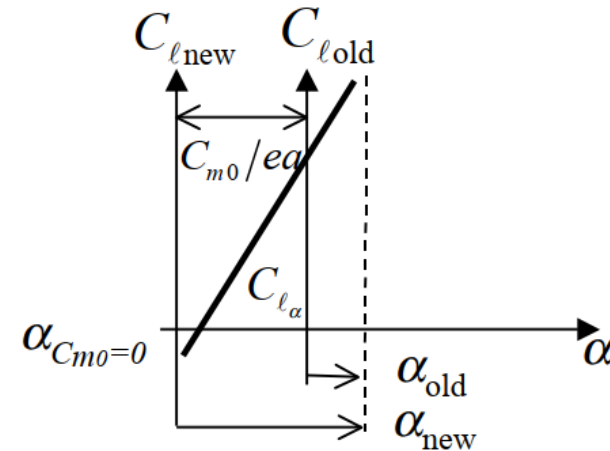
$$M'_a = M'_0 + L'ec = qc^2 C_{m0} + qec^2 C_{\ell_\alpha} (\alpha + \theta)$$

$$M'_a = qec^2 C_{\ell_\alpha} \theta + qec^2 C_{\ell_\alpha} \left(\alpha + \frac{C_{m0}}{ea} \right)$$

- Se definirmos um novo ângulo de ataque de referência:

$$\alpha_{\text{old}} + \frac{C_{m0}}{ea} \rightarrow \alpha_{\text{new}}$$

$$\alpha_{C_{m0}=0} = -\frac{C_{m0}}{ea}$$



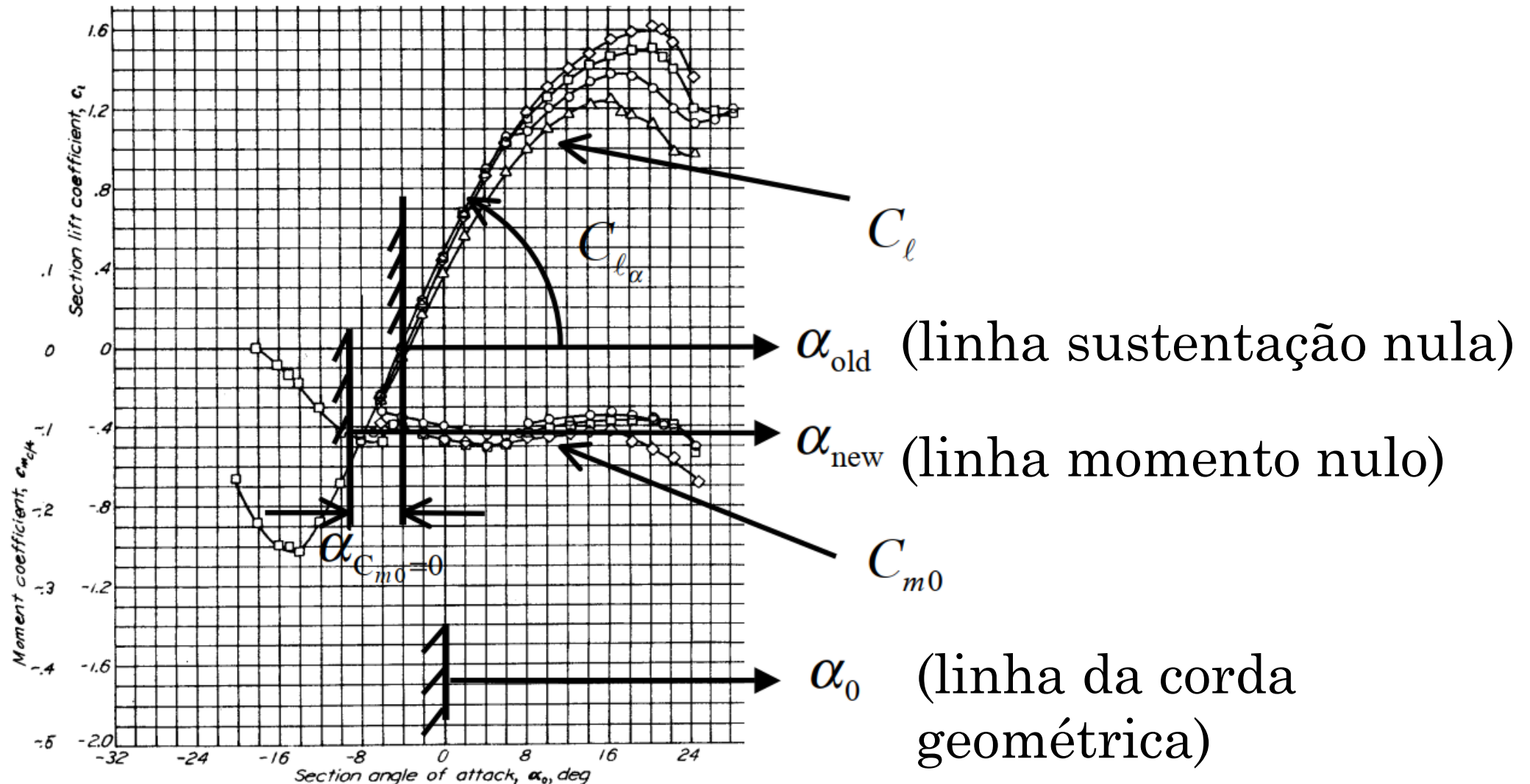
O momento em torno do eixo elástico se torna:

$$M'_a = qec^2 C_{l_\alpha} (\alpha + \theta)$$

Isso corresponde ao pressuposto de que o ângulo de ataque passa a ser medido a partir de uma linha de "momento zero", definida pelo ângulo $\alpha_{C_{m0}=0}$, como pode ser visto na próxima página (dados do aerofólio).

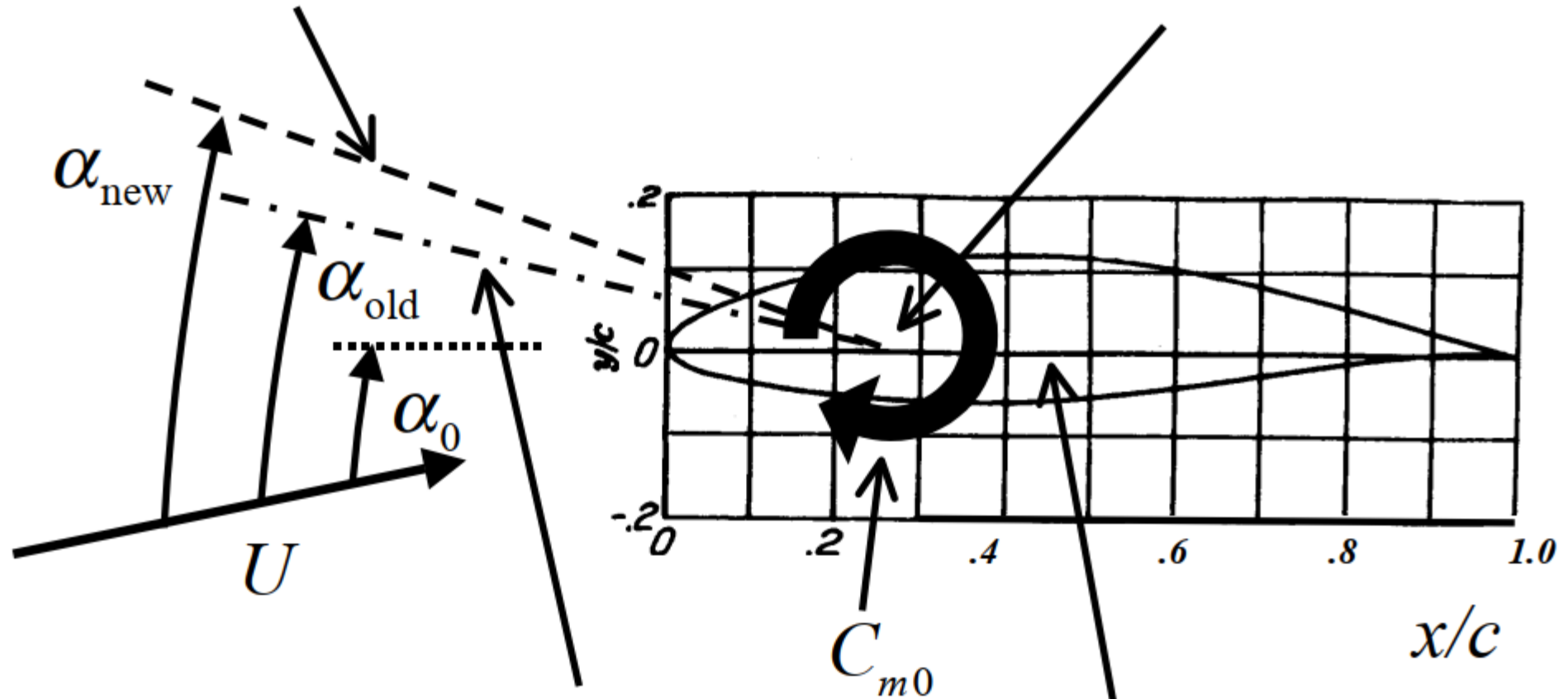
Dados do NACA 65,3-618

(dados mostrados para diferentes números de Reynolds)



linha momento nulo

Centro aerodinâmico



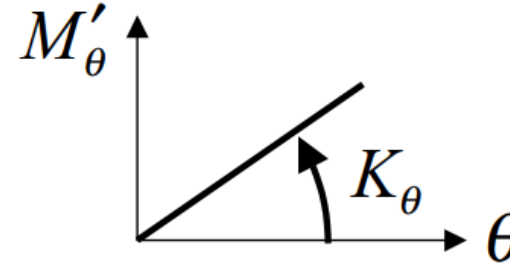
linha sustentação nula

corda geométrica

$$\alpha_{\text{old}} + \frac{C_{m0}}{ea} \rightarrow \alpha_{\text{new}}$$

- Agora considere o momento elástico restaurador, por unidade de comprimento (N.m/m):

$$M'_\theta = K_\theta \theta$$

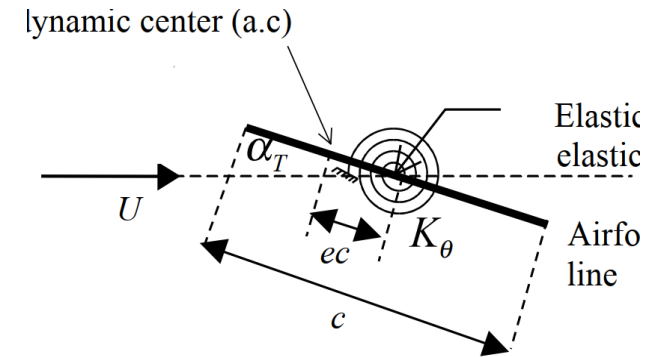


- O equilíbrio é verificado se:

$$M'_a = M'_\theta$$

- Resolvendo para a torção elástica:

$$\theta = \frac{qec^2 a}{K_\theta - qec^2 a} \alpha$$

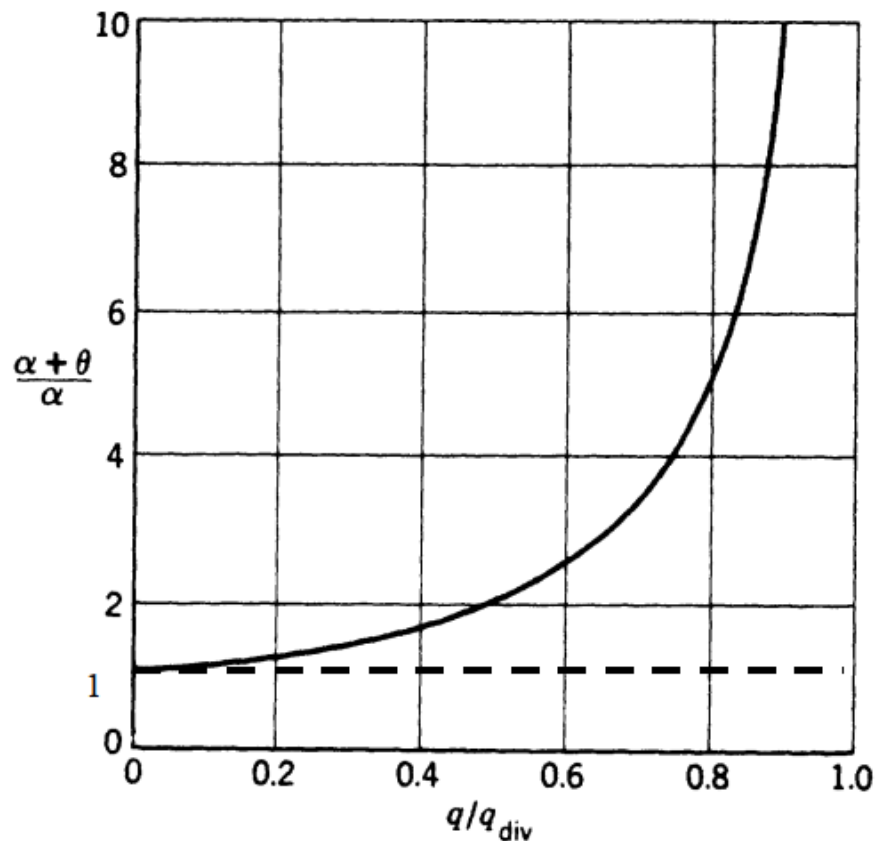


(2.1)



- A deformação elástica se torna infinitamente alta quando o denominador é igual a zero (*condição de divergência*).

Fenômeno da
Divergência/Efeito
elástico:



- A velocidade de divergência é obtida:

$$K_{\theta} - q_{div} ec^2 C_{l_{\alpha}} = 0$$

$$\therefore q_{div} = \frac{K_{\theta}}{ec^2 C_{l_{\alpha}}} \quad (2.2)$$

$$\therefore U_{div} = \sqrt{\frac{2K_{\theta}}{\rho ec^2 C_{l_{\alpha}}}}$$

- Use (2.1) e (2.2) para obter:

$$\frac{\alpha + \theta}{\alpha} = \frac{1}{1 - q/q_{div}}$$



- A equação (2.1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$(K_{\theta} - qec^2 C_{\ell_{\alpha}}) \theta = qec^2 C_{\ell_{\alpha}} \alpha$$

- Inspeccionando esta equação, os operadores aerodinâmicos e estruturais são identificados (operadores algébricos, neste caso):

$$A \equiv qec^2 C_{\ell_{\alpha}}$$

$$E \equiv K_{\theta}$$

- O termo no lado direito da mesma equação pode ser visto como uma função de carregamento. Tornando-a zero, é obtida a seguinte equação algébrica homogênea:

$$(K_{\theta} - qec^2 C_{\ell_{\alpha}}) \theta = 0$$



- A última equação homogênea representa um problema de autovalor. Os problemas de autovalores normalmente estão associados ao critério de estabilidade na física matemática.
- As duas soluções possíveis da equação homogênea são:

$$\theta = 0 \quad \text{solução trivial}$$

$$K_\theta - qec^2 C_{\ell_\alpha} = 0 \quad \text{define os autovalores:} \quad q_{\text{div}} = \frac{K_\theta}{ec^2 C_{\ell_\alpha}}$$

- Tome a equação (2.1), divida o lado direito por K_θ para obter:

$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{\frac{qec^2 C_{\ell_\alpha}}{K_\theta}}{1 - \frac{qec^2 C_{\ell_\alpha}}{K_\theta}} = \frac{G}{1 - G}$$

Função de
transferência entre a
entrada α e a saída θ

onde

$$\frac{qec^2 C_{\ell_\alpha}}{K_\theta} = \frac{q}{q_{\text{div}}} \equiv G \geq 0$$

De fato,

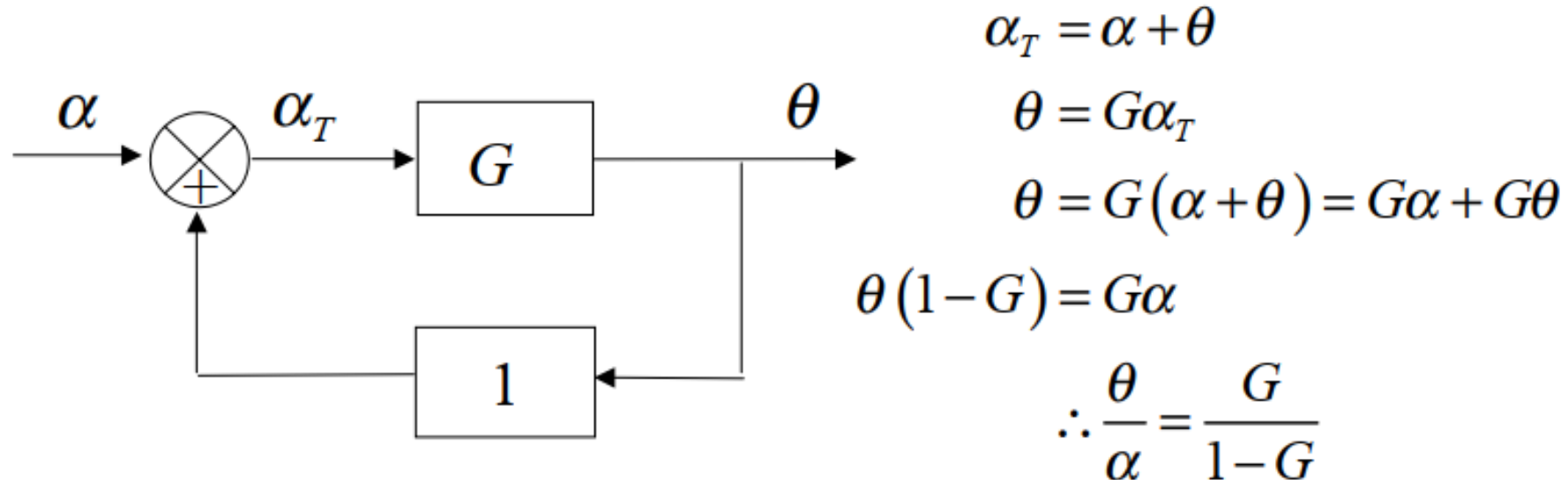
$$\frac{\theta}{\alpha} = \frac{\frac{qec^2 C_{\ell_\alpha}}{K_\theta}}{1 - \frac{qec^2 C_{\ell_\alpha}}{K_\theta}} = \frac{\frac{q}{q_{\text{div}}}}{1 - \frac{q}{q_{\text{div}}}} = G(1 - G)^{-1}$$

Onde a expansão da série $(1 - G)^{-1} \equiv 1 + G + G^2 + G^3 + \dots$

é conhecida por ser convergente para $|G| < 1$ e divergente para $|G| \geq 1$, o que significa que a torção elástica se torna infinitamente grande para velocidades além da divergência



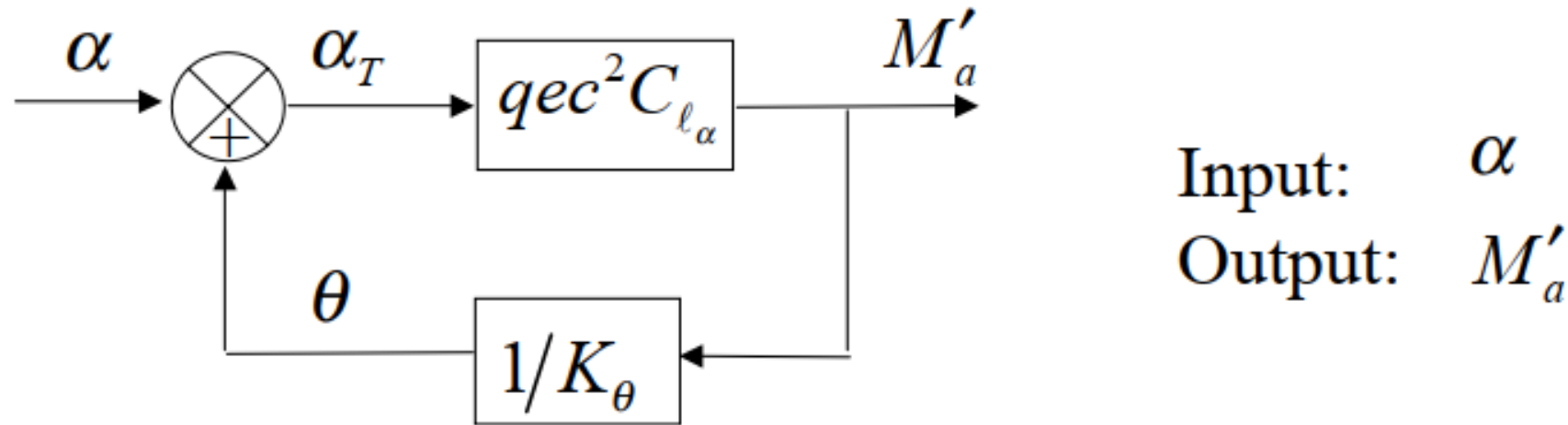
- A última equação tem um significado particular na teoria de controle. Ela representa a função de transferência de um sistema de feedback, em que a torção elástica introduz uma realimentação unitária positiva:



- Quando a função de transferência de malha aberta, G , excede a unidade, o sistema se torna instável (ou seja, atinge divergência):

$$G = \frac{qec^2 C_{\ell_\alpha}}{K_\theta} > 1 \Leftrightarrow q > q_{\text{div}}$$

- O loop de feedback pode ser dividido em dois componentes. Observe também que a pressão dinâmica é o ganho do sistema de malha fechada:



- onde a função de transferência feed-forward é agora identificada como o operador aerodinâmico e a função de transferência de feedback é o inverso do operador estrutural:

$$A = qec^2 C_{l_\alpha} \quad \text{e} \quad G = qec^2 C_{l_\alpha} / K_\theta$$

$$E^{-1} = 1/K_\theta$$



Referências

1 - An Introduction to the Theory of Aeroelasticity

Y.C. Fung

- A leitura do Capítulo 3 (item 3.1) é recomendada.

2 - Introduction to structural dynamics and aeroelasticity

D. Hodges and A. Pierce

- Leitura do Capítulo 4 (até o item 4.1.3) e solução dos problemas 1 até 5 no final do capítulo.