PTC3424 - Processamento Digital de Sinais

Aula 3: Classificações de Sinais

Prof. Marcio Eisencraft

EPUSP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Março 2025

Sumário

Sumário

Bibliografia Básica

Principais referências:

- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S. *Sinais e Sistemas*, 2ª edição, Pearson, 2010.
  - Capítulo 1.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2007.
  - Capítulo 1.
- Colab para gerar as figuras da aula.

Outras fontes recomendadas:

- Documentações e tutoriais do `numpy`.

Sumário

Visão Geral

- Já vimos que um sinal é, de forma geral, uma função (contínua ou discreta) do tempo.
- Agora, classificaremos os sinais segundo alguns critérios:
  - Simetria (par/ímpar)
  - Periodicidade (periódico/aperiódico)
  - Energia e potência (sinais de energia e de potência)
- Nesta aula, vamos ver cada uma destas classificações tanto para sinais de tempo contínuo como para sinais de tempo discreto.

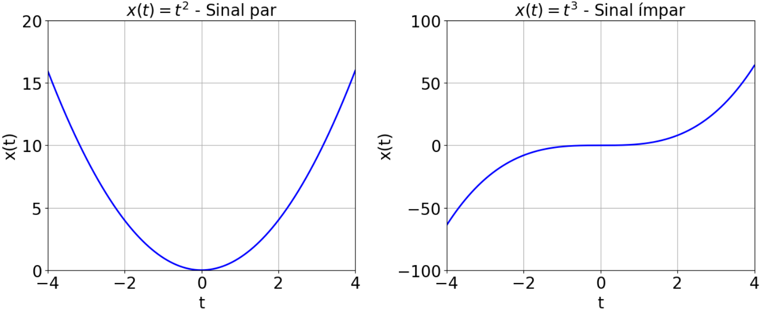
Sumário

Classificação baseada na Simetria

- Dois casos: sinais de tempo contínuo e sinais de tempo discreto.
- Sinal par: simétrico em relação ao eixo vertical.
- Sinal ímpar: antisimétrico em relação à origem dos tempos.
- Qualquer sinal pode ser decomposto em um sinal par (componente ou parte par) somado a um sinal ímpar (componente ou parte ímpar).

Simetria em sinais de tempo contínuo

- **Sinal Par**: satisfaz $x(t) = x(-t)$ para todo t.
  - Exemplo: $x(t) = t^2$ é par.
- **Sinal Ímpar**: satisfaz $x(t) = -x(-t)$ para todo t.
  - Exemplo: $x(t) = t^3$ é ímpar.



Decomposição par-ímpar

- **Decomposição** de qualquer $x(t)$ em parte par $x_p(t)$ e parte ímpar $x_i(t)$:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t).$$

$$\boxed{x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.}$$

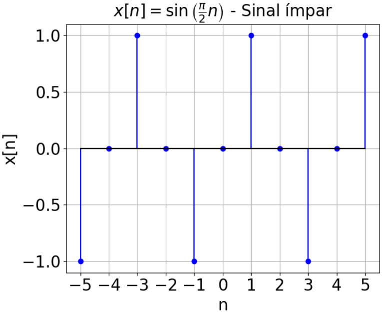
Exercício: Deduza a decomposição acima e mostre que, de fato, $x_p(t)$ é par e $x_i(t)$ é impar.

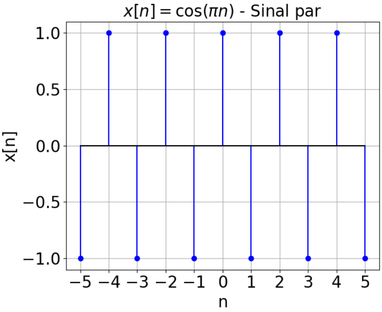
Simetria em sinais de tempo discreto

- **Sinal Par**: $x[n] = x[-n]$ para todo n no domínio de $x[n]$.
- **Sinal Ímpar**: $x[n] = -x[-n]$ para todo n no domínio de $x[n]$.
- **Decomposição**:

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n],$$

$$\boxed{x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}, \quad x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}.}$$





Exercício - Simetria

Determine a componente par e ímpar dos sinais a seguir:

1. $x[n] = \{2,\ 5,\ 4,\ \underset{\uparrow}{1},\ 0,\ 2,\ 3\}$
2. $y[n] = \{2,\ 9,\ 4,\ \underset{\uparrow}{3},\ 1,\ 7,\ 0\}$
3. $w[n] = \{1,\ 0,\ 5,\ \underset{\uparrow}{6},\ 3,\ 4,\ 5\}$

```
x = np.array([2,5,4,1,0,2,3])
xneg = x[-1::-1] #x[-n]
xpar = (x+xneg)/2
ximpar = (x-xneg)/2
print('x[n]  =', x)
print('x[-n] =', xneg)
print('x_p[n] =', xpar)
print('x_i[n] =', ximpar)
```

```
x[n]  = [2 5 4 1 0 2 3]
x[-n] = [3 2 0 1 4 5 2]
x_p[n] = [2.5 3.5 2.  1.  2.  3.5 2.5]
x_i[n] = [-0.5  1.5  2.   0.  -2.  -1.5  0.5]
```

Sumário

Classificação quanto à Periodicidade

- Sinal pode ser:
  - **Periódico**: assume os mesmos valores em intervalos de tempo fixos.
  - **Aperiódico**: não se repete em intervalos fixos.
- Definições são ligeiramente diferentes para tempo contínuo e tempo discreto.

Periodicidade para sinais de tempo contínuo

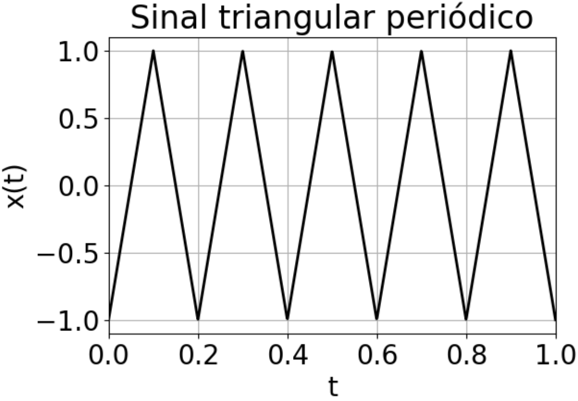
- $x(t)$ é **periódico** se existir $T > 0$ tal que:

$$\boxed{x(t+T) = x(t) \quad \text{para todo } t.} \tag{1}$$

- O menor valor que satisfaz (1) é chamado de período fundamental e será representado aqui por T_0.
- Frequência fundamental $f_0 = \frac{1}{T_0}$, dada em unidades de $[\text{tempo}]^{-1}$, ou hertz (Hz).
- Define-se também a frequência angular fundamental $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, dada em rad/s.
- Se não existe tal T, que satisfaça (1), $x(t)$ é **aperiódico**.

Exercício: período para sinais de tempo contínuo

A figura mostra um trecho de um sinal triangular de tempo contínuo. Qual a frequência fundamental em Hz e rad/s?



Periodicidade para sinais de tempo discreto

- $x[n]$ é **periódico** se existir um inteiro $N > 0$ tal que:

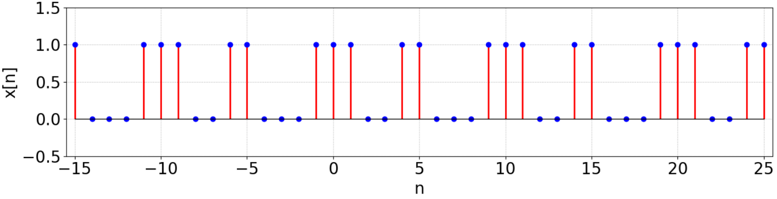
$$\boxed{x[n+N] = x[n], \quad \forall\, n \text{ e } N \in \mathbb{Z}} \tag{2}$$

- O menor inteiro que satisfaz (2) é chamado de período fundamental N_0, dado em amostras.
- A frequência angular fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$, dada em radianos.
- Se não existe N que satisfaz (2), $x[n]$ é aperiódico.
- Observação importante: em tempo discreto, o período deve ser obrigatoriamente um inteiro positivo. Assim, note que ω_0 não pode assumir qualquer valor. Mais ainda, ela tem um valor máximo (2π)

Exercício: período em tempo discreto

Determine se os sinais a seguir são periódicos. Se sim, encontre o período e a frequência angular fundamental.

1. $x[n] = (-1)^n$
2. O sinal $x[n]$ mostrado a seguir.



Sumário

Sinais de Energia e Potência - Tempo contínuo

- Motivação elétrica: potência instantânea $p(t) = \frac{v^2(t)}{R}$ ou $p(t) = Ri^2(t)$. Assim, para um resistor de $R = 1\,\Omega$, a potência é proporcional ao quadrado de uma grandeza medida.
- Em análise de sinais, definimos então a potência instantânea de um sinal $x(t)$ como
$$p(t) = |x(t)|^2$$
. Daí, seguem também as definições:
- Energia total:
$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt}$$
- Potência média
$$\boxed{P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2\ dt.}$$

Observações:

1. Se $x(t)$ é periódico de período T_0, então fica mais fácil o cálculo da potência média
$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 \, dt.$$
2. A raiz quadrada da potência média P_x é chamada de valor eficaz ou valor rms do sinal.

Sinais de Energia e Potência - Tempo discreto

Definições equivalentes para tempo discreto:

- Potência instantânea: $p[n] = |x[n]|^2$
- Energia total

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, x[n] \,|^2}$$

.

- Potência média

$$\boxed{P_x = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |\, x[n] \,|^2}$$

.

- Para um sinal periódico de período N:

$$\boxed{P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\, x[n] \,|^2.}$$

Classificação: sinais de energia ou potência

- Um sinal é chamado de *sinal de energia* se e somente se a energia total do sinal satisfizer a condição

$$\boxed{0 < E_x < \infty.}$$

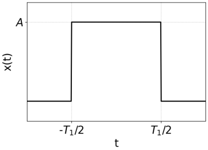
- Um sinal é chamado de *sinal de potência* se e somente se a potência média do sinal satisfizer a condição

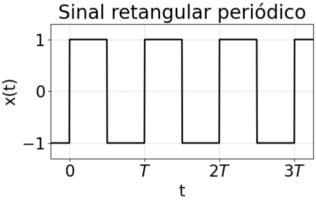
$$\boxed{0 < P_x < \infty.}$$

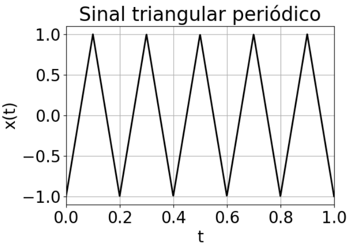
- É fácil mostrar que as classificações de energia e potência de sinais são mutuamente exclusivas. Em especial, um sinal de energia tem potência média zero enquanto que um sinal de potência tem energia infinita.

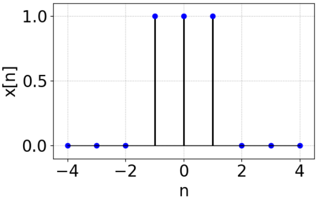
Exercícios - Energia e Potência

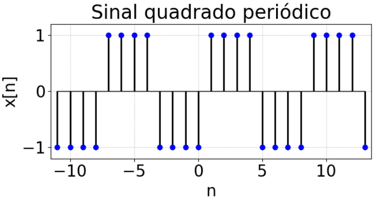
Para cada um dos sinais a seguir, calcule a energia e a potência e classifique-os.











Sumário

Conclusões da Aula 3

- Revisamos a **classificação** de sinais:
    - Par/ímpar
    - Periódico/aperiódico
    - Energia/potência
- Vimos exemplos em tempo contínuo e tempo discreto.
- Exercícios para fixar a prática de cada classificação.
- Apesar de relativamente simples, estes conceitos serão muito úteis mais a frente quando estudarmos transformadas e suas propriedades.