

Noções Básicas

Topologia de espaços métricos*

IME USP

MAP 0217 MAP 0311 - 2025

Resumo

Introduz-se a linguagem básica sobre espaços métricos e apresentam-se alguns exemplos.

1 Definições Básicas e Propriedades Iniciais

Nestas notas de aula $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais com as operações e definições usuais que o tornam um corpo ordenado completo. Vai-se considerar que o conjunto dos naturais, $\mathbb{N}$ tem 0 como seu menor elemento e $\mathbb{N}^*$ será o conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Além disso, $\mathbb{R}^+$ representará o conjunto dos reais positivos, i.e., $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbb{R}^{++}$ denotará o conjunto dos reais estritamente positivos, i.e., $\mathbb{R}^{++} = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Definição 1 *Seja M um conjunto, $M \neq \emptyset$, uma **distância** em M é uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- (i) *Para todo par $(x, y) \in M \times M$ tem-se $d(x, y) \geq 0$.*
- (ii) *Para todo $x \in M$ tem-se $d(x, x) = 0$.*
- (iii) *Para todo par $(x, y) \in M \times M$ tem-se $d(x, y) = d(y, x)$.*
- (iv) *Para todos os x, y e z em M tem-se $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*
- (v) *Se $d(x, y) = 0$ então $x = y$.*

*Culpa destas notas existirem? A pandemia do Covid-19...

Observação 1 Uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades de (i) a (iv) da definição anterior (mas não necessariamente (v)) é chamada pseudodistância em M .

Por exemplo, se M é o conjunto das funções $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que são Riemann integráveis no sentido próprio, então $d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$ é uma pseudodistância em M , mas não é uma distância nesse conjunto (prove estas afirmações como um exercício).

A respeito de pseudodistâncias em M veja o apêndice final destas notas de aula.

Exemplo 1 EM $\mathbb{R}$ A FUNÇÃO $d(x, y) = |x - y|$ É UMA DISTÂNCIA (PROVE COMO EXERCÍCIO). A MENOS DE MENÇÃO EXPLÍCITA EM CONTRÁRIO, VAI-SE SUPOR SEMPRE QUE O CONJUNTO DOS REAIS ESTÁ MUNIDO DESSA DISTÂNCIA.

Exemplo 2 CONSIDERE $p \in \mathbb{N}$ E SEJA

$$\mathbb{R}^p = \{(x_1, \dots, x_p) : x_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, \dots, p\}\}.$$

A FUNÇÃO $d_1 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ DEFINIDA POR

$$d_1((x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)) = \sum_{j=1}^p |x_j - y_j|$$

É UMA DISTÂNCIA EM $\mathbb{R}^p$. ISTO DECORRE DE FORMA IMEDIATA DAS PROPRIEDADES DA FUNÇÃO VALOR ABSOLUTO EM $\mathbb{R}$.

SEGUE-SE TAMBÉM, DE MODO SIMPLES, DESSAS PROPRIEDADES QUE $d_\infty : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ DEFINIDA POR

$$d_\infty((x_1, \dots, x_p), (y_1, \dots, y_p)) = \sup\{|x_j - y_j|, j \in \{1, \dots, p\}\}$$

É OUTRA DISTÂNCIA EM $\mathbb{R}^p$.

Exercício 1 *Demonstre que d_1 e d_∞ definidas no exemplo 2 de fato são distâncias em $\mathbb{R}^p$.*

Exemplo 3 CONSIDERE UM CONJUNTO $M \neq \emptyset$. É TRIVIAL VER QUE $d_0 : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ DADA POR $d_0(x, x) = 0$ E, SE $x \neq y$, $d_0(x, y) = 1$ É UMA DISTÂNCIA EM M . DIZ-SE QUE d_0 É A DISTÂNCIA DISCRETA EM M .

Definição 2 Um espaço métrico é, por definição, um par ordenado (M, d) em que M é um conjunto diferente do conjunto vazio e d é uma distância em M .

Note que pode haver mais de uma distância definida em um determinado conjunto M , de fato a distância discreta d_0 , definida no exemplo 3, torna o par (M, d_0) , em que $M \neq \emptyset$, um espaço métrico. Mais interessante é notar que $(\mathbb{R}^p, d_1)$ e $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ também são espaços métricos diferentes.

Em espaços normados há uma maneira simples de definir uma distância relacionada com a norma. Para ver como, relembre a definição de norma¹.

Definição 3 Uma norma em um espaço vetorial real V é, por definição, uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\mathbf{N1} \quad \|w\| \geq 0, \forall w \in V.$$

$$\mathbf{N2} \quad \|\lambda w\| = |\lambda| \|w\|, \forall (w, \lambda) \in V \times \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{N3} \quad \|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|, \forall (u, w) \in V \times V.$$

$$\mathbf{N4} \quad \|w\| = 0 \iff w = O.$$

Se $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz **N1**, **N2**, **N3** ela é chamada seminorma.

Um espaço normado é, por definição, um par ordenado $(V, \|\cdot\|)$, em que V é um espaço vetorial (real ou complexo) e $\|\cdot\|$ é uma norma em V .

Como já foi afirmado, uma norma permite definir uma distância em V , como se vê no resultado a seguir:

Fato 1 Seja $\|\cdot\|$ uma norma no espaço vetorial V . Então $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $d(x, y) = \|x - y\|$ é uma distância em V .

Se $\|\cdot\|$ é uma seminorma em V então a função d é uma pseudodistância em V .

Exercício 2 Demonstre o fato 1.

Exemplo 4 AS DISTÂNCIAS d_1 E d_∞ VISTAS NO EXEMPLO 2 ESTÃO DE FATO ASSOCIADAS ÀS NORMAS $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_\infty$ DE $\mathbb{R}^p$ DEFINIDAS RESPECTIVAMENTE POR:

¹De um ponto de vista formal, as definições de norma e seminorma apresentadas na definição 3 são redundantes pois **N1** é consequência de **N2** e **N3**. Para ver isso aplique **N2**, com $\lambda = 0$, para obter $\|O\| = 0$ e, ainda de **N2**, agora com $\lambda = -1$, conclua que, para todo w em V , tem-se $\|-w\| = \|w\|$. Então para todo w de V , por **N3**, $0 = \|O\| = \|w + (-w)\| \leq 2\|w\|$ e obtém-se **N1**. Apesar disto, a definição 3 é quase uma unanimidade nos textos de matemática.

$$\|(x_1, \dots, x_p)\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j| \text{ e } \|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty = \sup\{|x_j|, j = 1, \dots, p\}.$$

DEIXA-SE AO LEITOR A TAREFA DE VERIFICAR QUE, DE FATO, $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_\infty$ SÃO NORMAS EM $\mathbb{R}^p$, É UMA TAREFA SIMPLES.

Exemplo 5 CONSIDERE $\ell_\infty(\mathbb{N})$ O ESPAÇO DAS SEQUÊNCIAS DE REAIS, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ LIMITADAS (I.E. AQUELAS PARA AS QUAIS EXISTE $M \in \mathbb{R}$ TAL QUE, PARA TODO j , TEM-SE $|x_j| \leq M$) COM A SOMA E O PRODUTO POR ESCALARES REAIS HABITUAIS.

A FUNÇÃO $\|x\|_\infty = \sup\{|x_j|, j \in \mathbb{N}^*\}$ DEFINE UMA NORMA EM $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

DE FATO, COMO x É LIMITADA, $\{|x_j|, j \in \mathbb{N}\}$ TEM SUPREMO O QUE MOSTRA ESTAR $\|\cdot\|_\infty$ BEM DEFINIDA. ALÉM DISSO, SÃO DE VERIFICAÇÃO IMEDIATA AS PROPRIEDADES **N1**, **N2** E **N4**.

PARA VER QUE **N3** VALE, TOME SEQUÊNCIAS LIMITADAS $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E NOTE QUE $\|x + y\|_\infty = \sup\{|x_j + y_j|, j \in \mathbb{N}\}$. COMO PARA TODO j TEM-SE $|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, RESULTA DE PRONTO QUE $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ É UM MAJORANTE DE $\{|x_j + y_j|, j \in \mathbb{N}\}$ O QUE IMPLICA EM **N3**.

A DISTÂNCIA ASSOCIADA A $\|\cdot\|_\infty$ É $d_\infty(x, y) = \sup\{|x_j - y_j|, j \in \mathbb{N}\}$.

ASSIM, SE $j \in \mathbb{N}$ E e_j É A SEQUÊNCIA $(x_1^j, \dots, x_n^j, \dots)$ DEFINIDA POR $x_n^j = 0$ SE $n \neq j$ E $x_j^j = 1$, ENTÃO $\|e_j\|_\infty = 1$ E, SE $i \neq j$, TEM-SE $d_\infty(e_i, e_j) = 1$.

Exemplo 6 CONSIDERE $\ell_1(\mathbb{N})$ O ESPAÇO VETORIAL DAS SEQUÊNCIAS DE REAIS, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ABSOLUTAMENTE SOMÁVEIS (I.E., TAIS QUE $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ CONVERGE) COM A SOMA E O PRODUTO POR ESCALARES REAIS USUAIS.

NESSE ESPAÇO A FUNÇÃO $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ DEFINE UMA NORMA.

Distâncias associadas a normas tem algumas propriedades geométricas interessantes, duas delas são explicitadas no exercício a seguir.

Exercício 3 Considere em um espaço vetorial real V , uma norma $\|\cdot\|$ e d a distância associada a essa norma. Prove que:

(i) Para todos $(x, y) \in V \times V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$.

(ii) Se x, y e z são pontos de V então $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.

A noção de convexidade em espaços vetoriais, básica para muitos problemas, será introduzida a seguir.

Começa-se por notar que em um espaço vetorial real a noção de segmento de reta é algo natural.

Definição 4 *Seja V um espaço vetorial real. Se x e y são pontos de V o segmento de reta de extremidades x e y , representado por $\overline{xy}$, é, por definição, o subconjunto de V dado por $\{z \in V : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}$*

A trivialidade a seguir mostra uma outra maneira de considerar $\overline{xy}$.

Exercício 4 *Mostre que se x e y são pontos do espaço vetorial real V então $\overline{xy} = \{z \in V : z = x + \lambda(y - x), \lambda \in [0, 1]\}$.*

Um resultado, já esperado, é enunciado no exercício a seguir.

Exercício 5 *Se d é uma distância no espaço vetorial real V associada a uma norma $\|\cdot\|$ então, para todo par (x, y) em $V \times V$ e todo $z \in \overline{xy}$, tem-se $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.*

Apesar do apelo geométrico evidente das propriedades enunciadas no exercício anterior, não é verdade que essa propriedade vale para todas as distâncias em V , de fato é imediato que a distância discreta não tem a propriedade enunciada no exercício 5, se você quiser um exemplo menos “radical” veja o que se segue:

Exercício 6 *Considere d uma distância qualquer em M e $f : M \rightarrow M$ uma função injetora.*

(a) *Prove que $d_f : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_f(x, y) = d(f(x), f(y))$ é uma distância em M .*

(b) *Mostre que*

$$d(x, y) = \begin{cases} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ \left| \frac{1}{x} \right|, & \text{se } x \neq 0 \text{ e } y = 0, \\ \left| \frac{1}{y} \right|, & \text{se } x = 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

é a distância induzida em $\mathbb{R}$ pela função $f(x) = \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

(c) *Mostre que na distância definida no item anterior tem-se $d(0, 1) = 1$, mas $d(0, \frac{1}{2}) = 2$. Conclua que então essa distância não satisfaz a propriedade enunciada no exercício 5 (em consequência tem-se que d não está associada a nenhuma norma em $\mathbb{R}$).*

Agora a prometida definição de convexidade

Definição 5 *Um subconjunto K de um espaço vetorial real V é convexo se, por definição, para todos os x e y em K , tem-se $\overline{xy} \subset K$.*

Observe que a noção de convexidade independe da noção de distância, em um certo sentido pode dizer-se que o conceito de convexidade é o mais geométrico que há em espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Talvez não surpreenda que seja um dos conceitos de maior relevância em matemática, tanto em termos de “aplicações”, como em questões “abstratas”.

Nesta disciplina não será feito um estudo aprofundado sobre convexidade, nem mesmo no contexto dos espaços $\mathbb{R}^p$, o assunto é tratado, com muito detalhe e profundidade em textos de análise convexa, por exemplo, no icônico livro *Convex Analysis* de R. Rockafellar, uma abordagem diferente do assunto, com destaque a aspectos ligados a tópicos geométricos em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ pode ser encontrada no texto de H. Eggleston, *Problems in Euclidean Space: Application of Convexity*.

Para os objetivos desta disciplina, convexidade aparecerá com destaque ao estudar a desigualdade do valor médio para funções diferenciáveis de $\mathbb{R}^p$ em $\mathbb{R}^q$, os seguintes exercícios serão úteis ali.

Exercício 7 *Prove que um subconjunto de $\mathbb{R}$ é convexo se, e apenas se, for um intervalo.*

Exercício 8 *Seja $\|\cdot\|$ uma norma no espaço vetorial real V . Prove que se $x \in V$ e $r > 0$ então $\{y \in V : \|y - x\| < r\}$ é um subconjunto convexo de V .*

Uma classe importante de espaços normados é a formada pelos espaços com produto interno, definida a seguir.

Definição 6 *Um produto interno em um espaço vetorial real V é, por definição, uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

PI1 $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall (x, y, z) \in V \times V \times V.$

PI2 $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall (x, y, \lambda) \in V \times V \times \mathbb{R}.$

PI3 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall (x, y) \in V \times V.$

PI4 $\langle x, x \rangle > 0, \forall x \in V \setminus \{O\}.$

É imediato perceber que $\langle O, x \rangle = 0$, para todo $x \in V$.

Exemplo 7 UMA MATRIZ REAL M DE ORDEM $p \times p$, SIMÉTRICA, É CHAMADA DEFINIDA POSITIVA SE, POR DEFINIÇÃO, $x^t M x > 0$, PARA TODO VETOR (COLUNA) $x \in \mathbb{R}^p$.

SE M É UMA MATRIZ DEFINIDA POSITIVA DE ORDEM $p \times p$ ENTÃO

$$\langle x, y \rangle_M = y^t M x, \forall (x, y) \in V \times V$$

DEFINE UM PRODUTO INTERNO EM $\mathbb{R}^p$.

A VERIFICAÇÃO QUE $\langle x, y \rangle_M$ SATISFAZ AS PROPRIEDADES DE PRODUTO INTERNO É SIMPLES E DEIXADA A CARGO DO LEITOR.

O exemplo anterior representa todos os possíveis produtos internos em $\mathbb{R}^p$ no seguinte sentido, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^p$, então existe uma matriz M simétrica, de ordem $p \times p$, definida positiva tal que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, tem-se $\langle x, y \rangle = y^t M x$.

Para ver isto, tome um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{R}^p$, considere a base canônica $\{e_1, \dots, e_p\}$ de $\mathbb{R}^p$, e defina $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Um cálculo direto mostra que, se $M = [g_{ij}]$, então M é simétrica, definida positiva e $\langle x, y \rangle = y^t M x$. Por exemplo, o produto interno usual em $\mathbb{R}^p$ corresponde à matriz identidade.

Todo produto interno define uma norma, como se vê no resultado a seguir.

Fato 2 *Sejam V um espaço vetorial real e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V , então a função $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, $v \in V$, define uma norma em V .*

O ponto central para provar este resultado é a célebre desigualdade de Cauchy–Schwarz.

Fato 3 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz) *Com as notações usadas no enunciado do fato 2 tem-se*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall (x, y) \in V \times V. \quad (1)$$

Além disso, a igualdade acontece em (1) se, e apenas se, $\{x, y\}$ é um subconjunto linearmente dependente de V .

Demonstração: (Do fato 3)

Como $|\langle x, y \rangle|$ e $\|x\| \|y\|$ são reais maiores ou iguais a zero, para provar (1) basta demonstrar que $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$, $\forall (x, y) \in V \times V$.

Se $x = O$, é imediato que a desigualdade (1) torna-se uma igualdade.

Agora, fixe $x \in V \setminus \{O\}$, $y \in V$ e defina $p(\lambda) = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pelas propriedades (PI1), (PI2) e (PI3) de produto interno vem que $p(\lambda) = \|x\|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + \|y\|^2$, ou seja $p(\cdot)$ é um polinômio de grau dois em $\mathbb{R}$ (pois $\|x\| > 0$) e, de (P4), segue-se de pronto que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $p(\lambda) \geq 0$.

Portanto, $\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$, o discriminante de $p(\cdot)$, deve ser menor ou igual a zero, mas $\Delta \leq 0$ é equivalente a $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$, o que, como já observado, implica a desigualdade desejada.

Suponha agora que $(x, y) \in V \times V$ e vale a igualdade em (1), se $x = O$, claro que $\{x, y\}$ é um subconjunto linearmente dependente de V . Se $x \neq O$, então o polinômio de grau dois $p(\cdot)$ considerado acima tem discriminante igual a zero, então existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que $p(\bar{\lambda}) = 0$, portanto $\bar{\lambda}x + y = O$ e, mais uma vez, tem-se que $\{x, y\}$ é linearmente dependente.

Deixa-se ao leitor a tarefa de provar que, se x e y são linearmente dependentes, então vale a igualdade em (1). ■

Exercício 9 *Faça a demonstração do fato 1.*

Exemplo 8 CONSIDERE EM $\mathbb{R}^p$ AO PRODUTO INTERNO USUAL, I.E. PARA $x = (x_1, \dots, x_p)$ E $y = (y_1, \dots, y_p)$, DEFINA $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^p x_j y_j$.

A ESTE PRODUTO INTERNO FICA ASSOCIADA A NORMA PITAGÓRICA EM $\mathbb{R}^p$, DADA POR $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^p |x_j|^2}$.

Neste exemplo a desigualdade de Cauchy-Schwarz toma a forma particular²
 $\sum_{j=1}^p |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^p |x_j|^2 \sum_{j=1}^p |y_j|^2}$, para todos os reais $x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p$.

As normas apresentadas até aqui em $\mathbb{R}^p$ relacionam-se entre si de modo simples, como será visto no próximo exercício.

Exercício 10 *Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}^p$ tem-se:*

- (i) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$ (equivalente a $\frac{1}{p}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$).
- (ii) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{p}\|x\|_\infty$ (equivalente a $\frac{\sqrt{p}}{p}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$).
- (iii) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p}\|x\|_2$ (equivalente a $\frac{\sqrt{p}}{p}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$).

²Às vezes esta desigualdade aparece na forma $(\sum_{j=1}^p |x_j y_j|)^2 \leq \sum_{j=1}^p |x_j|^2 \sum_{j=1}^p |y_j|^2$.

Exercício 11 *Faça um esboço dos subconjuntos do plano*

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 \leq 1\}, \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}, \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\}$$

e mostre que as desigualdades obtidas no exercício 10 não podem ser melhoradas (p. ex. se $a > 0$ e $b > 0$ são tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^p$ tem-se $a\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_\infty$, então $a \leq 1$ e $b \geq p$).

Exemplo 9 SEJA $\mathcal{C} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é CONTÍNUA}\}$ E CONSIDERE MESSE ESPAÇO VETORIAL O PRODUTO INTERNO

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Com esse produto interno o espaço acima é representado pelo símbolo $\mathcal{C}_{L_2}([a, b])$, a norma introduzida nele é $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz expressa que, para todo par de funções contínuas (f, g) vale que

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt}$$

(ou, de modo equivalente, $(\int_a^b |f(t)g(t)|dt)^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt$).

A geometria de espaços com produto interno é um assunto interessante e com vastas aplicações, nesta disciplina serão vistas algumas, em especial no contexto de $\mathbb{R}^p$ com o produto interno usual (veja o exemplo 8), o exercício a seguir mostra algumas propriedades básicas desse tema em um espaço qualquer.

Exercício 12 *Considere V um espaço vetorial real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\|\cdot\|_\diamond$ a norma associada a esse produto interno. Prove que, para todo $(x, y) \in V \times V$, tem-se*

(i) **[Teorema de Pitágoras]:**

$$\|x + y\|_\diamond^2 = \|x\|_\diamond^2 + \|y\|_\diamond^2 \iff \langle x, y \rangle = 0.$$

(ii) **[Identidade do Paralelogramo]:**

$$\|x + y\|_\diamond^2 + \|x - y\|_\diamond^2 = 2(\|x\|_\diamond^2 + \|y\|_\diamond^2).$$

As duas propriedades enunciadas no exercício 12 têm ampla aplicação, o Teorema de Pitágoras dispensa comentários, a segunda propriedade pode ser enunciada como em um espaço com produto interno a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos seus lados.

A identidade do paralelogramo caracteriza normas associadas a produtos internos, pois vale o seguinte resultado:

Fato 4 *Suponha que $\|\cdot\|$ é uma norma no espaço vetorial real V que satisfaz a identidade do paralelogramo, i.e., para todo par $(x, y) \in V \times V$, tem-se $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, então $\|\cdot\|$ é a norma associada a um produto interno definido em V .*

Demonstração: Considere $(x, y) \in V \times V$ e defina $p(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$.

A ideia é provar que p tem todas as propriedades de um produto interno.

Veja que:

- (i) $2p(x, x) = \|2x\|^2 - 2\|x\|^2 = 2\|x\|^2 > 0, \forall x \in V \setminus \{O\}$.
- (ii) $p(x, y) = p(y, x), \forall (x, y) \in V \times V$.
- (iii) $p(x, O) = 0, \forall x \in V$
- (iv) $p(x, y) = 2p(\frac{x}{2}, y)$, de fato, $p(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y\|^2 - \|\frac{x}{2}\|^2 - \|y\|^2}{2}$, agora faça $u = \frac{x}{2} + y, v = \frac{x}{2}$ e use a identidade do paralelogramo para ver que $\|\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y\|^2 = 2(\|y + \frac{x}{2}\|^2 + \|\frac{x}{2}\|^2) - \|y\|^2$, portanto tem-se

$$p(x, y) = \|y + \frac{x}{2}\|^2 + \|\frac{x}{2}\|^2 - \|y\|^2 - \frac{\|x\|^2}{2} = 2p(\frac{x}{2}, y).$$

- (v) A prova da propriedade aditiva de p , i.e., $p(x, y + z) = p(x, y) + p(x, z)$ pode ser feita a partir de (iv), use que $p(x, y) = 2p(\frac{x}{2}, y)$ e $p(x, z) = 2p(\frac{x}{2}, z)$, some estas identidades e, com o auxílio da identidade do paralelogramo, obtenha a propriedade desejada (os detalhes são deixados a cargo do leitor como exercício).

Resta então demonstrar a homogeneidade de p , i.e. $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$, para todo $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times V \times V$.

Isto será feito em etapas, a maior parte simples, mas a ideia geral é interessante.

Fixe $(x, y) \in V \times V$ e veja que:

- (I) Da aditividade, segue-se de pronto que $p(2x, y) = 2p(x, y)$. Então, um procedimento direto por indução mostra que, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $p(nx, y) = np(x, y)$.
- (II) Tome agora $q \in \mathbb{N}^*$ e use (I) com $\frac{x}{q}$ no lugar de x para concluir que $p(\frac{n}{q}x, y) = \frac{n}{q}p(x, y)$, para todo $(n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ e todo $(x, y) \in V \times V$.
- (III) Como $p(O, y) = 0$ e vale a aditividade tem-se que $0 = p(x - x, y) = p(x, y) + p(-x, y)$, i.e. $p(-x, y) = -p(x, y)$, para todo $(x, y) \in V \times V$.
- (IV) De (III) e (II) vem que, se $(r, x, y) \in \mathbb{Q} \times V \times V$, então $p(rx, y) = rp(x, y)$. Isto mostra a homogeneidade desejada para escalares racionais, para concluir a demonstração pode-se usar agora a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e um argumento de continuidade da função $\lambda \mapsto p(\lambda x, y)$. O que se fará a seguir (em (V)) pode ser visto como uma prova da continuidade dessa função.
- (V) A desigualdade de Cauchy-Schwarz: Será provado neste ponto que, se $(x, y) \in V \times V$ então $|p(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$. Isso é óbvio se $x = O$ então, considere $x \neq O$ e defina $f(\lambda) = p(\lambda x + y, \lambda x + y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pela positividade de p , tem-se que $f(\lambda) \geq 0$, além disso, pela aditividade e de p e pela homogeneidade dessa função para escalares racionais, segue-se de imediato que, para $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $f(r) = p(x, x)r^2 + 2rp(x, y) + p(y, y)$. Assim, para todo $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $g(r) = p(x, x)r^2 + 2rp(x, y) + p(y, y) \geq 0$. Como $x \neq O$ então $p(x, x) = \|x\|^2 > 0$, portanto g é um polinômio de grau 2 e $g(r) \geq 0$, para todo racional r . Isso mostra que $g(t) \geq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, segue-se que o discriminante de g é menor ou igual a zero. Agora, basta ver que $p(y, y) = \|y\|^2$ para concluir a desigualdade desejada.
- (VI) Por fim, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para concluir que, se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{Q}$, tem-se, para todo par $(x, y) \in V \times V$, que

$$|p(\lambda x, y) - p(rx, y)| = |p((\lambda - r)x, y)| \leq |\lambda - r| \|x\| \|y\|.$$

Isso mostra que, se r_n é uma sequência de racionais com limite λ , então $p(r_n x, y) \rightarrow p(\lambda x, y)$, como $p(r_n x, y) = r_n p(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda p(x, y)$, segue-se $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y)$. ■

A identidade do paralelogramo pode ser usada para demonstrar que uma certa norma não está associada a um produto interno, por exemplo, em $\mathbb{R}^p$ a norma $\|\cdot\|_\infty$ não provem de um produto interno, pois, caso contrário valeria a identidade do paralelogramo, e se $x = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $y = (0, 0, \dots, 0, 1)$, um cálculo imediato mostra que isso não acontece.

Os exercícios abaixo exploram essa ideia.

Exercício 13 *Mostre que em $\mathbb{R}^p$ a norma $\|\cdot\|_1$ não provem de um produto interno.*

Exercício 14 *Decida se no espaço normado $\ell_\infty(\mathbb{N})$ visto no exemplo 5 a norma está associada a um produto interno.*