

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier
de $y(t)$ a uma frequência f :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{2\pi i f t} dt$$

Transformada inversa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{-2\pi i f t} df$$

Dimensão de f : Hz (s^{-1})

Em termos de $\omega = 2\pi f$
(mais usual em Física)

$$Y(\omega/2\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{i\omega t} dt$$

Dimensão de ω : rad/s

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega/2\pi) e^{-i\omega t} d\omega$$

Transformada de Fourier discreta

Função $y(t)$ discreta: $y(t) \rightarrow y(t_n) \equiv y(n)$

$$t_n = (n - 1) \Delta t \quad \begin{cases} t_n = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N_t - 1)\Delta t \\ n = 1, 2, \dots, N_t \end{cases}$$

Discretização da integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{2\pi i f t} dt \rightarrow \sum_{n=1}^{N_t} y(n) e^{2\pi i f_k t_n}$$

onde

$$t_n = (n - 1) \Delta t \quad \text{e definimos:} \quad f_k \equiv \frac{(k - 1)}{N_t \Delta t}$$

Transformada de Fourier discreta

Função $y(t)$ discreta: $y(t) \rightarrow y(t_n) \equiv y(n)$

$$t_n = (n - 1) \Delta t \quad \begin{cases} t_n = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N_t - 1)\Delta t \\ n = 1, 2, \dots, N_t \end{cases}$$

Transformada de Fourier: $Y(f) \rightarrow Y(f_k) \equiv Y(k)$ onde

$$Y(k) = \sum_{n=1}^{N_t} y(n) e^{2\pi i (k-1)(n-1)/N_t}$$

$$f_k \equiv \frac{(k-1)}{N_t \Delta t} \quad \begin{cases} f_k = 0, \frac{1}{N_t \Delta t}, \frac{2}{N_t \Delta t}, \dots, \frac{(N_t - 1)}{N_t \Delta t} \\ k = 1, 2, \dots, N_t \end{cases}$$

Aula 12 – Tarefa (Fazer upload!)

Adapte o script escrito na aula anterior [onda ideal que se propaga com velocidade $c=50\text{m/s}$ em uma corda com extremos em $x_0=0$ e $x_1=1\text{m}$] e

- Calcule $y(x,t)$ de $t=0$ a $t=0,05\text{s}$ com passo $\Delta t=0,0001$ e $r=c(\Delta t/\Delta x)=1$ (determine o Δx) usando uma condição inicial do tipo:

$$y(x, t = 0) = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- Calcule o módulo quadrado da transformada de Fourier $|Y(f)|^2$ de $y(x=0,3,t)$ e faça um gráfico em função da frequência f .
- Faça primeiro apenas um valor de n (modo normal) e pergunte-se: Qual a frequência deste modo? (Lembre-se da relação entre k e ω) Isso é consistente com o gráfico que estou obtendo?

Aula 12 – Tarefa - Dicas

- *Debug: segue o gráfico $|Y(f)|^2$ vs f para a condição inicial*

$$y(x, t \leq 0) = 0.5 [\sin(3\pi x/L) + \sin(9\pi x/L) + \sin(15\pi x/L)]$$

