Lista 1: Métodos estatísticos

SFI5704 - Mecânica Estatística (1/2025)

Prof. Victor L. Quito

5 de março de 2025

Entregar somente os itens ou exercícios com asterisco (*).

1 Considere os problemas seguintes de passeio aleatório:

(i) Um andarilho começa em um poste de luz no meio de uma rua, dando passos de igual comprimento para a direita ou para a esquerda, com igual probabilidade. Qual é a probabilidade de que ele esteja novamente no poste de luz após N passos, se

(a) N for par?

(b) N for ímpar?

(ii *) Dois andarilhos começam juntos na origem, cada um tendo igual probabilidade de dar um passo para a esquerda ou para a direita ao longo do eixo x. Encontre a probabilidade de que eles se encontrem novamente após N passos. Considere que os dois fazem seus passos simultaneamente. (Dica: pode ser útil considerar o movimento relativo entre eles.)

2 (a) Uma partícula tem a mesma probabilidade de estar em qualquer lugar em uma circunferência (perímetro de um círculo). Considere como o eixo z qualquer linha reta no plano do círculo e passando pelo seu centro. Denote por θ o ângulo entre esse eixo z e a linha reta que conecta o centro do círculo à partícula. Qual é a probabilidade de que esse ângulo esteja entre θ e $\theta + d\theta$?

(b *) Uma partícula tem a mesma probabilidade de estar em qualquer lugar na superfície de uma esfera. Considere como o eixo z qualquer linha através do centro desta esfera como o eixo z. Denote por θ o ângulo entre esse eixo z e a linha reta conectando o centro da esfera à partícula. Qual é a probabilidade de que esse ângulo esteja entre θ e $\theta + d\theta$?

3 Considere uma amostra de poliacristalina de $CaSO_4{\cdot}2H_2O$ em um campo magnético externo $\mathbf{H}$ na direção z. O campo magnético interno (na direção z) produzido na posição de um próton dado na molécula de H_2O pelo próton vizinho é dado por $(\mu/a^3)(3\cos^2\theta - 1)$ se o spin deste próton vizinho aponta ao longo do campo aplicado; é dado por $-(\mu/a^3)(3\cos^2\theta -$

1) se este spin vizinho aponta em direção oposta ao campo aplicado. Aqui μ é o momento magnético do próton e a é a distância entre os dois prótons, enquanto θ denota o ângulo entre a linha que une os prótons e o eixo z. Nesta amostra de cristais orientados aleatoriamente, o próton vizinho tem a mesma probabilidade de estar localizado em qualquer ponto na esfera de raio a ao redor do próton dado.

(a) Qual é a probabilidade $W(b)db$ de que o campo interno b esteja entre b e $b + db$ se o spin do próton vizinho é paralelo a B?

(b) Qual é a probabilidade $W(b)db$ de que o spin do próton vizinho seja orientado de maneira antiparalela a B? Desenhe um gráfico de $W(b)$ como uma função de b. Em experimentos de ressonância magnética nuclear, a frequência na qual a energia é absorvida de um campo magnético de radiofrequência é proporcional ao campo magnético local existente na posição de um próton. Esse item fornece, portanto, o formato da linha de absorção observada nos experimentos.

4 * Uma variável estocástica X pode ter valores $x = 1$ e $x = 3$. Uma variável estocástica Y pode ter valores $y = 2$ e $y = 4$. Denote a densidade de probabilidade conjunta $P_{X,Y}(x, y) = \sum_{i=1,3} \sum_{j=2,4} p_{ij}\delta(x - i)\delta(y - j)$. Calcule a covariância de X e Y para os dois casos seguintes e decida se X e Y são independentes:

(a) $p_{1,2} = p_{1,4} = p_{3,2} = p_{3,4} = \frac{1}{4}$.

(b) $p_{1,2} = p_{3,4} = 0$ e $p_{1,4} = p_{3,2} = \frac{1}{2}$.

5 As variáveis estocásticas X e Y são independentes e gaussianas, com primeiro momento $\langle X\rangle = \langle Y\rangle = 0$ e desvios padrão $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Encontre a função característica para a variável aleatória $Z = X^2 + Y^2$ e calcule os momentos $\langle Z\rangle$, $\langle Z^2\rangle$ e $\langle Z^3\rangle$. Encontre os três primeiros cumulantes.

6 Considere um passeio aleatório em uma dimensão. Em um único passo, a probabilidade de um deslocamento entre x e $x + dx$ é dada por

$$P(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx. \tag{1}$$

Após N passos, o deslocamento do andarilho é $S = X_1 + \cdots + X_N$, onde X_i é o deslocamento durante o i-ésimo passo. Suponha que os passos sejam independentes uns dos outros. Após N passos:

(a) Qual é a densidade de probabilidade para o deslocamento S do andarilho?

(b) Qual é o deslocamento médio, $\langle S \rangle$, e o desvio padrão do andarilho?

7 * Considere um passeio aleatório em uma dimensão no qual, em cada passo, o andarilho tem a mesma probabilidade de dar um passo com deslocamento em qualquer lugar no intervalo $d - a \leq x \leq d + a$, onde $a < d$. Cada passo é independente dos outros. Após N passos, o deslocamento do andarilho é $S = X_1 + \cdots + X_N$, onde X_i é o deslocamento durante o i-ésimo passo. Após N passos:

(a) Qual é o deslocamento médio, $\langle S \rangle$?

(b) Qual é o desvio padrão do andarilho?

8 * Considere o problema do passeio aleatório em uma dimensão e suponha que a probabilidade de um único deslocamento entre s e $s + ds$ seja dada por

$$w(s)ds = \frac{1}{\pi} \frac{b}{s^2 + b^2} ds.$$

Calcule a probabilidade $P(z)dz$ de que o deslocamento total após N passos esteja entre z e $z + dz$. $P(z)$ se torna Gaussiana quando N se torna grande? Caso contrário, isso viola o teorema do limite central?

9 * Considere um passeio aleatório unidimensional muito geral, onde a densidade de probabilidade $w_i(s_i)ds_i$, caracterizando cada passo, pode ser diferente e, portanto, dependente de i. Ainda é verdade, no entanto, que os deslocamentos diferentes são estatisticamente independentes, ou seja, w_i para qualquer um dos passos não depende dos deslocamentos realizados pela partícula em qualquer outro passo. Mostre que, quando o número N de deslocamentos se torna grande, a probabilidade $P(x)dx$ de que o deslocamento total esteja entre x e $x + dx$ tenderá a se aproximar da forma Gaussiana com um valor médio $\langle x \rangle = \Sigma_i \langle s_i \rangle$ e uma dispersão $\left\langle (\Delta x)^2 \right\rangle = \Sigma_i \left\langle (\Delta s_i)^2 \right\rangle$. Este resultado constitui uma forma muito geral do teorema do limite central.

10 Considere o passeio aleatório de uma partícula em três dimensões e seja $w(\mathbf{s})d^3\mathbf{s}$ a probabilidade de que seu deslocamento esteja no intervalo entre $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$. Seja $P(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$ a

probabilidade de que o deslocamento total $\mathbf{r}$ após N passos esteja entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$. Mostre que

$$P(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} Q^N(\mathbf{k}), \tag{2}$$

onde

$$Q(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{s}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{s}} w(\mathbf{s}). \tag{3}$$

11

(a) Usando uma função delta de Dirac apropriada, encontre a densidade de probabilidade $w(\mathbf{s})$ para deslocamentos de comprimento uniforme l, mas em qualquer direção aleatória em um espaço tridimensional. Certifique-se que a função $w(\mathbf{s})$ esteja normalizada, isto é, que $\int d\mathbf{s} w(\mathbf{s}) = 1$ quando integrada por todo o espaço.

(b) Use o resultado da parte (a) para calcular $Q(\mathbf{k})$.

(c) Usando este valor de $Q(\mathbf{k})$, calcule $P(\mathbf{r})$ para $N = 3$, resolvendo assim o problema do passeio aleatório em três dimensões para o caso de três passos.