Discussão Geral das Novas Idéias Formuladas*

5º CONGRESSO DE SOLVAY (1927)**

[248]
Causalidade, Determinismo, Probabilidade

[I]

SR. LORENTZ. – Eu gostaria de chamar atenção para as dificuldades que se encontram nas teorias antigas.

Queremos nos fazer uma representação dos fenômenos, formar uma imagem deles em nosso espírito. Até aqui, sempre quisemos formar essas imagens por meio das noções ordinárias de tempo e espaço. Estas noções talvez sejam inatas; em todo caso, elas se desenvolveram através de nossa experiência pessoal, de nossas observações cotidianas. Para mim, essas noções são nítidas e reconheço que não posso fazer uma idéia da física sem essas noções. A imagem que quero formar dos fenômenos deve ser absolutamente nítida e definida, e parece-me que só podemos formar uma semelhante imagem dentro desse sistema de espaço e de tempo.

* Tradução de "Discussion Générale des Idées Nouvelles Émises", in INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY (org.): *Électrons et Photons - Rapports et Discussions de Cinquième Conseil de Physique*, Gauthier-Villars, Paris, 1928, pp. 248-89. Tradução de Osvaldo Pessoa Jr. O 5º Congresso de Solvay foi realizado em Bruxelas, de 24 a 29 de outubro de 1927. Apresentaram palestras W.L. Bragg, A.H. Compton, L. de Broglie, M. Born & W. Heisenberg e E. Schrödinger. A sessão da "Discussão Geral" se iniciou com uma exposição de Bohr sobre suas novas idéias a respeito da complementaridade, que apareceram nos anais do Congresso na forma de um artigo, cuja tradução apresentamos no *Fundamentos da Física 1 – Simpósio David Bohm*, pp. 135-59. Os números no texto (**[248]** etc.) indicam o início das páginas do original, e os algarismos romanos à esquerda (**[I]** etc.) se referem a uma divisão esquemática do texto que apresentamos no final, para facilitar o uso do texto em sala de aula. Trechos entre colchetes "[...]" são esclarecimentos introduzidos pelo tradutor. (N.T.)

** Falaram nesta discussão os seguintes físicos: M. Born (Göttingen), L. Brillouin (Paris), A.H. Compton (Chicago), L.V. de Broglie (Paris), T. de Donder (Bruxelas), P.A.M. Dirac (Cambridge), P. Ehrenfest (Leiden), A. Einstein (Berlim), R.H. Fowler (Cambridge), W. Heisenberg (Copenhague), H.A. Kramers (Utrecht), P. Langevin (Paris), I. Langmuir (Schenectady, N.Y.), H.A. Lorentz (presidente do Congresso) (Harlem), W. Pauli (Hamburgo), A. Piccard (Bruxelas), O.W. Richardson (Londres) e E. Schrödinger (Berlim). Outros físicos que participaram desse congresso, além de N. Bohr (Copenhague), foram: W.L. Bragg (Manchester), P. Debye (Leipzig), C.E. Guye (Genebra), E. Henriot (Bruxelas), E. Herzen (Bruxelas), M. Knudsen (Copenhague), M. Planck (Berlim) e C.T.R. Wilson (Cambridge). (N.T.)

Fundamentos da Física 2 – Simpósio David Bohm,
org. O. Pessoa Jr., Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2001, pp. 139-172.

Para mim, um elétron é um corpúsculo que, em um dado instante, se encontra em um ponto determinado do espaço, e se tive a idéia de que em um momento seguinte esse corpúsculo se encontra em outro lugar, devo pensar em sua trajetória, que é uma linha no espaço. E se esse elétron encontra um átomo e o penetra, e após várias aventuras ele deixa este átomo, eu me invento uma teoria na qual esse elétron conserva a sua individualidade; ou seja, imagino uma linha que esse elétron segue ao passar através desse átomo. Pode ser, evidentemente, que essa teoria seja bastante difícil de desenvolver, mas *a priori* isso não me parece impossível.

Imagino que, na nova teoria, ainda haja esses elétrons. É possível, evidentemente, que na nova teoria – bem desenvolvida – seja necessário supor que esses elétrons sofram transformações. Digno-me de admitir que o elétron se funda em uma nuvem. Mas nesse caso investigarei em que ocasião esta transformação se produz. Se quiserem me impedir **[249]** de fazer semelhante pesquisa invocando um princípio, isso me incomodaria bastante. Parece-me que se pode sempre esperar que mais tarde far-se-á aquilo que não podemos ainda fazer neste momento. Mesmo que as idéias antigas sejam abandonadas, pode-se sempre conservar as denominações antigas. Gostaria de conservar este ideal de outrora, de descrever tudo o que se passa no mundo através de imagens nítidas. Estou pronto para admitir outras teorias, sob a condição de que se possa traduzi-las por imagens claras e nítidas.

De minha parte, apesar de não estar ainda familiarizado com as novas idéias que agora escuto serem expressas, poderia representar-me essas idéias assim. Tomemos o caso de um elétron que encontra um átomo. Suponhamos que esse elétron deixe esse átomo e que ao mesmo tempo haja emissão de um quantum de luz. É preciso considerar, em primeiro lugar, os sistemas de ondas que correspondam ao elétron e ao átomo antes do choque. Após o choque teremos novos sistemas de ondas. Estes sistemas de ondas poderão ser descritos por uma função ψ definida em um espaço de um grande número de dimensões que satisfaz uma equação diferencial. A nova mecânica ondulatória operará com esta equação e determinará a função ψ antes e depois do choque.

Ora, há fenômenos que ensinam que há outra coisa além dessas ondas, particularmente os corpúsculos; pode-se fazer, por exemplo, um experimento com um cilindro de Faraday [um detector de elétrons]; deve-se portanto levar em conta a individualidade dos elétrons e também a dos fótons. Penso que encontraria que, para explicar os fenômenos, basta admitir que a expressão $\psi\psi^*$ fornece a probabilidade de esses elétrons e esses fótons existirem dentro de um volume determinado; isso me bastaria para explicar os experimentos. Mas os exemplos dados pelo Sr. Heisenberg me ensinam que eu teria alcançado assim tudo o que a experiência me permite alcançar. Ora, penso que essa noção de probabilidade deveria se colocar no final – e como conclusão – das considerações teóricas, e não como axioma *a priori*, ainda que me digne de admitir que essa indeterminação corresponda às possibilidades experimentais. Eu poderia sempre conservar minha fé determinista para os fenômenos fundamentais, dos quais não falei. Um espirito mais profundo não poderia se pôr ao par dos **[250]** movimentos desses elétrons? Não se poderia conservar o determinismo fazendo-o o objeto de uma crença? É preciso necessariamente erigir o indeterminismo como princípio?

[II] SR. BOHR expõe seu ponto de vista com relação aos problemas da teoria dos quanta (ver artigo precedente).

SR. BRILLOUIN. – Sr. Bohr insiste sobre a incerteza das medições simultâneas de posição e momento; seu ponto de vista se liga estreitamente à noção de *células no espaço de fase* introduzida por Planck há muito tempo [no 1º Cogresso de Solvay, em 1911]. Planck admitia que se o ponto representativo de um sistema se encontra dentro de uma célula (de tamanho $\Delta p \cdot \Delta q = h$), não se pode distingui-lo de um outro ponto situado dentro da mesma célula. Os exemplos fornecidos pelo Sr. Bohr tornam preciso, de maneira muito feliz, o sentido físico dessa noção bastante abstrata.

SR. DE DONDER. – As considerações que o Sr. Bohr acaba de desenvolver estão, penso eu, em correlação estreita com o seguinte fato: na gravitação einsteiniana(*) de um sistema contínuo ou de um sistema pontual, apresentam-se não as massas ou as cargas das partículas, mas as entidades $\tau^{(m)}$ e $\tau^{(e)}$ em *quatro* dimensões; notemos que estas massas e cargas *generalizadas*, localizadas no espaço-tempo, *se conservam* ao longo de suas linhas de universo.

[III] SR. BORN. – Sr. Einstein considerou o seguinte problema. Uma preparação radioativa emite em todas as direções partículas α; faz-se com que estas fiquem visíveis através do método da nuvem de Wilson. Ora, se se associar a cada processo de emissão uma onda esférica, como se pode compreender que o rastro de cada partícula α se mostra como uma linha (mais ou menos) reta? Em outros termos: como o caráter corpuscular do fenômeno pode ser conciliado aqui com a representação por ondas? **[251]**

Para fazê-lo, deve-se apelar à noção de "redução do pacote de probabilidade" desenvolvida por Heisenberg. A descrição da emissão através de uma onda esférica só é válida durante o tempo em que não se observa ionização alguma; depois que uma semelhante ionização for demonstrada pela aparição de gotículas de nuvem, deve-se, para descrever o que se passa em seguida, "reduzir" o pacote de ondas para a vizinhança imediata dessas gotículas. Obtém-se assim um pacote de ondas em forma de raio, que corresponde ao caráter corpuscular do fenômeno.

(*) Th. DE DONDER, *Théorie des Champs gravifiques* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 14, Paris, 1926). Ver especialmente as equações (184), (184') e (188), (188'). Poder-se-á também consultar nossas palestras: *The mathematical Theory of Relativity* (M.I.T.), Cambridge, Mass., 1927. Ver especialmente as equações (23), (24) e (28), (29).

Sr. Pauli me perguntou se é possível descrever o processo sem redução dos pacotes de ondas, recorrendo a um espaço polidimensional, no qual o número de dimensões é o triplo do número de todas as partículas presentes (partículas α e átomos atingidos pela radiação).

Isso é efetivamente possível e pode até ser representado de uma maneira muito intuitiva através de uma simplificação conveniente, mas isso não nos conduz adiante no que concerne às questões essenciais. Contudo, gostaria de expor aqui esse caso como um exemplo de tratamento polidimensional de semelhantes problemas.

[IV] Suponho, para simplificar, que haja apenas dois átomos que podem ser atingidos. Deve-se então distinguir dois casos: ou os dois átomos 1 e 2 se encontram no mesmo raio que parte da origem (o lugar onde se encontra a preparação), ou eles não se encontram no mesmo raio. Se representamos por ε a probabilidade de que um átomo seja atingido, temos o seguinte esquema de probabilidade:

I. Os pontos 1 e 2 estão situados sobre um mesmo raio partindo da origem.

Número de partículas atingidas.	Probabilidade.
0	$1 - \varepsilon$
1	0
2	ε

II. Os pontos 1 e 2 não estão sobre o mesmo raio.

Número de partículas atingidas.	Probabilidade.
0	$1 - 2\varepsilon$
1	ε
2	0

[252] Eis como se deve formular a probabilidade dos eventos na propagação retilínea.

Para possibilitar uma representação gráfica do fenômeno iremos simplificá-lo mais, admitindo que todos os movimentos têm lugar seguindo uma única linha reta, o eixo dos *x*. Devemos então distinguir os dois casos, [um] no qual os átomos se encontram do mesmo lado, e [outro no qual se encontram] de um lado e do outro da origem. As probabilidades correspondentes são as seguintes:

I. Os pontos 1 e 2 estão situados do mesmo lado.

Número de partículas atingidas.	Probabilidade.
0	½
1	0
2	½

II. Os pontos 1 e 2 estão situados em lados diferentes.

Número de partículas atingidas.	Probabilidade.
0	0
1	½
2	0

Ora, essas relações podem ser representadas pelo movimento de um pacote de ondas no espaço de três dimensões x_0, x_1, x_2. Ao estado inicial corresponde:

No caso I, o ponto $x_0 = 0,\ x_1 = a,\ x_2 = b$;
No caso II, o ponto $x_0 = 0,\ x_1 = a,\ x_2 = -b$,

onde a e b são números positivos. O pacote de ondas ocupa inicialmente o espaço em torno desses pontos e se move em seguida paralelamente ao eixo x_0, dividindo-se em dois pacotes de mesmo tamanho, indo em sentidos opostos. As colisões se produzem quando $x_0 = x_1$ ou $x_0 = x_2$, ou seja, sobre dois planos dos quais um, P_1, é paralelo ao eixo x_2 e corta o plano $x_0 x_1$ seguindo a bissetriz do quadrante positivo, enquanto que o segundo, P_2, é paralelo ao eixo x_1 e corta o plano x_0x_2 seguindo a bissetriz do quadrante positivo. Depois que o pacote de ondas atinge o plano P_1, sua trajetória **[253]** sofre uma pequena quebra na direção x_1; depois que ele atinge P_2, a trajetória sofre uma quebra na direção de x_2 (Fig. 1).

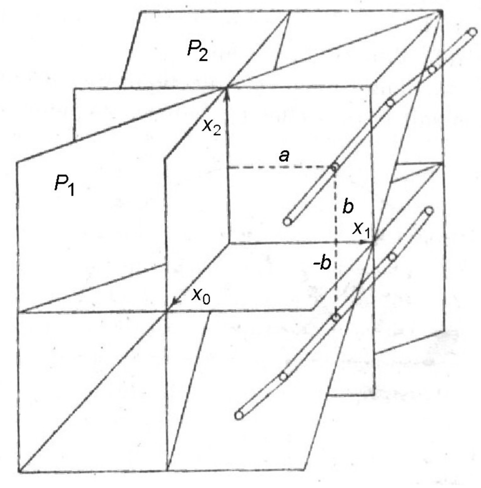

Figura 1

Ora, vê-se imediatamente na figura que a parte superior do pacote de ondas, que corresponde ao caso I, atinge os planos P_1, P_2 do mesmo lado do plano x_1x_2, enquanto que a parte inferior os atinge de lados diferentes. A figura fornece portanto uma representação intuitiva dos casos indicados no esquema acima. Ela permite reconhecer imediatamente se, para um dado tamanho do pacote de ondas, um estado determinado, ou seja um dado ponto $x_0 x_1 x_2$, pode ser atingido ou não.

À "redução" do pacote de ondas corresponde a escolha de uma das duas direções de propagação $+x_0$, $-x_0$, que deve-se tomar depois que se estabeleceu que um dos dois pontos 1 e 2 é atingido, ou seja, que a trajetória do pacote sofreu uma quebra. Este exemplo só serve para que se compreenda que uma descrição completa dos processos que se efetuam dentro de um sistema formado por várias moléculas só é possível em um espaço de várias dimensões.

[V] SR. EINSTEIN. – Devo pedir desculpas de não haver aprofundado **[254]** a mecânica dos quanta. Gostaria contudo de fazer algumas observações gerais.

Podemos nos colocar, em face da teoria, em dois pontos de vista com respeito ao postulado do domínio de validade, o que eu gostaria de caracterizar com o auxílio de um exemplo simples.

Seja *S* um anteparo no qual foi feito um pequeno orifício *O* (Fig. 2), e seja *P* uma película fotográfica em forma de semi-esfera de raio grande. Suponhamos que elétrons incidam sobre *S* na direção e sentido das flechas. Uma parte desses elétrons passa através de *O*; por causa da pequenez do orifício e da velocidade das partículas, eles se repartem uniformemente em todas as direções e vão agir sobre a película.

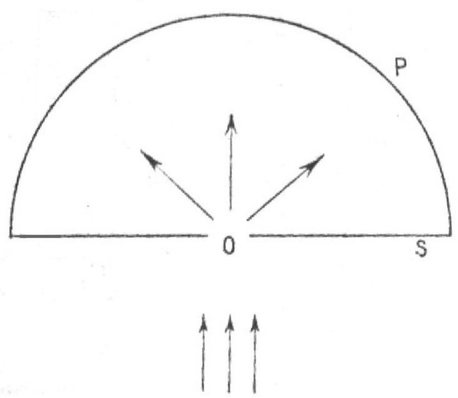

Figura 2

As considerações precedentes são comuns às duas maneiras de conceber a teoria. Há ondas de de Broglie que incidem mais ou menos normalmente sobre *S* e são difratadas em *O*. Do outro lado de *O* têm-se ondas esféricas que atingem a tela *P* e cuja intensidade em *P* fornece a medida do que se passa nesse lugar.

Podemos agora caracterizar da seguinte forma os dois pontos de vista.

1. *Concepção I.* – As ondas de de Broglie-Schrödinger não correspondem a um único elétron, mas a uma nuvem de elétrons distribuída no espaço. A teoria não dá nenhuma informação sobre os processos individuais, mas somente sobre o coletivo de uma infinidade de processos elementares. **[255]**
2. *Concepção II.* – A teoria tem a pretensão de ser uma teoria completa dos processos individuais. Cada partícula que se dirige ao anteparo, à medida que se possa determiná-la por sua posição e por sua velocidade, é descrita por um pacote de ondas de de Broglie-Schrödinger de pequeno comprimento e de pequena abertura angular. Este pacote de ondas é difratado e, após a difração, chega em parte ao filme P em um estado de resolução.

De acordo com o primeiro ponto de vista, puramente estatístico, $|\psi|^2$ exprime a probabilidade de que exista no lugar considerado *uma certa* partícula da nuvem, por exemplo em um determinado lugar na tela.

De acordo com a segunda, $|\psi|^2$ exprime a probabilidade de que em um instante considerado *a mesma* partícula se encontre em um determinado lugar (na tela, por exemplo). Aqui, a teoria se refere ao processo individual e pretende que se conheça tudo que seja regido por leis.

A segunda concepção vai mais longe do que a primeira, no sentido de que todas as informações que resultem de II [aliás, de I] resultam também da teoria em virtude de I [aliás, de II], mas a recíproca não é verdadeira. É só em virtude de II que a teoria tem como conseqüência que as leis de conservação são válidas para o processo elementar; é só de II que a teoria pode deduzir o resultado do experimento de Geiger e Bothe, e que ela pode explicar o fato de que na câmara de Wilson as gotículas provenientes de uma partícula α se encontram mais ou menos sobre linhas contínuas.

Mas, por outro lado, tenho objeções a fazer à concepção II. A onda espalhada [difratada] dirigida para *P* não apresenta uma direção privilegiada. Se $|\psi|^2$ fosse simplesmente encarada como a probabilidade de que em um certo lugar uma partícula determinada se encontre em um instante determinado, poderia acontecer que *um mesmo* processo elementar produzisse uma ação *em dois ou mais* lugares do anteparo. Porém, a interpretação, segundo a qual $|\psi|^2$ exprime a probabilidade de que *esta* partícula se encontre em um lugar determinado, supõe um mecanismo de ação à distância muito particular, que impede que a onda continuamente repartida no espaço produza uma ação em *dois* lugares da tela.

A meu ver, só se pode suprimir esta objeção da seguinte maneira, descrevendo o processo não somente através da onda de **[256]** Schrödinger, mas ao mesmo tempo localizando-se a partícula durante a propagação. Penso que o Sr. de Broglie tem razão ao procurar nesta direção. Se se opera unicamente com as ondas de Schrödinger, a interpretação II de $|\psi|^2$ implica, na minha opinião, uma contradição com o postulado da relatividade.

[VI] Gostaria ainda de chamar brevemente atenção para dois argumentos que me parecem pleitear contra o ponto de vista II. Este está essencialmente ligado a uma representação polidimensional (espaço de configuração), pois somente este modo de representação possibilita a interpretação de $|\psi|^2$ própria à concepção II. Ora, parece-me que objeções de princípio se opõem a esta representação polidimensional. Nesta representação, com efeito, duas configurações de um sistema, que só se distinguem pela permutação de duas partículas do mesmo tipo, são representadas por dois pontos diferentes (do espaço de configuração), o que não está de acordo com os novos resultados da estatística. Por outro lado, a particularidade das forças de só agirem a pequenas distâncias *espaciais* encontra no espaço de configuração uma expressão menos natural do que no espaço de três ou quatro dimensões.

[VII] SR. LORENTZ. – Para representar o movimento de um sistema de *n* pontos materiais, pode-se evidentemente servir-se de um espaço de 3 dimensões com *n* pontos ou de um espaço de 3*n* dimensões onde o sistema será representado por um só ponto. Isso deve dar exatamente na mesma; não pode haver aí uma diferença fundamental. Trata-se somente de saber qual das duas representações é mais conveniente, qual é a mais cômoda.

Mas compreendo que haja casos onde a coisa é difícil. Se tem-se uma representação em um espaço de 3*n* dimensões, só se pode retornar a um espaço de 3 dimensões se se puder separar razoavelmente as 3*n* coordenadas em *n* grupos de 3, correspondendo cada um a um ponto. E posso imaginar que possa haver casos onde isso não é nem natural, nem simples. Mas, em todo caso, parece-me que tudo isso concerne antes à forma do que ao fundamento da teoria.

SR. PAULI. – Sou inteiramente da mesma opinião que o Sr. Bohr, **[257]** quando ele diz que a introdução do espaço de muitas dimensões é somente um expediente técnico para se formular matematicamente as leis das ações mútuas entre várias partículas, ações que certamente não se deixam descrever simplesmente, do modo ordinário, no espaço e no tempo. Pode perfeitamente ser que este expediente técnico possa um dia ser substituído por um outro, e isso da seguinte maneira. Pode-se, por exemplo, quantificar pelo método de Dirac as vibrações características de um espaço vazio ocupado por radiação de corpo negro e introduzir uma função ψ dependente das amplitudes dessas vibrações características, em número ilimitado. Pode-se mesmo empregar, conforme o fazem Jordan e Klein, as amplitudes das ondas materiais quadridimensionais ordinárias como argumentos de uma função ψ polidimensional. Esta fornece, na linguagem da concepção corpuscular, a probabilidade de que em um determinado instante os números de partículas de cada tipo presente, que possuem certas propriedades cinemáticas (posição determinada ou quantidade de movimento determinada), assumam certos valores. Esse procedimento tem ainda a vantagem de que o defeito do método polidimensional ordinário, do qual o Sr. Einstein falou e que se apresenta quando permutam-se duas partículas do mesmo tipo, não existe mais. Assim como Jordan e Klein mostraram, fazendo suposições convenientes com respeito às equações às quais esta função ψ das amplitudes das ondas materiais deve satisfazer no espaço ordinário, chega-se exatamente aos mesmos resultados que os que se baseiam na teoria polidimensional de Schrödinger.

Em resumo, portanto, gostaria de dizer que o ponto de vista de Bohr, segundo o qual as propriedades dos objetos físicos de serem definidos e descritíveis no espaço e no tempo [, por um lado, e com momento e energia bem definidos, por outro,] são complementares, parece ser mais geral do que um expediente técnico especial. Mas, independentemente de um semelhante expediente, pode-se declarar em todo caso, de acordo com esta idéia, que as ações recíprocas de várias partículas certamente não podem ser descritas da maneira ordinária no espaço e no tempo.

[VIII] Para que se compreenda bem o estado de coisas do qual acabo de falar, permitam-me dar um exemplo particular. Imaginem dois átomos de hidrogênio no estado normal a uma grande distância um do outro, e suponham que se pergunte por sua energia de ação **[258]** mútua. Cada um dos dois átomos tem uma distribuição de eletricidade perfeitamente isotrópica, é nêutro no conjunto e ainda não emite radiação. De acordo com a descrição ordinária da ação mútua entre os átomos no espaço e no tempo, dever-se-ia portanto esperar que uma semelhante ação mútua não exista quando a distância entre as duas esferas nêutras for tão grande que não ocorra uma interpenetração sensível de suas atmosferas de carga. Mas quando se trata a mesma questão pelo método polidimensional, o resultado é totalmente diferente, em conformidade com a experiência.

A analogia clássica com este último resultado é a seguinte. Imaginem em cada átomo um oscilador clássico cujo momento p varia periodicamente. Este momento produz, no lugar onde se encontra o outro átomo, um campo cuja intensidade periodicamente variável é da ordem de $\varepsilon \sim p/r^3$, onde r denota a distância entre os dois átomos. Quando dois desses osciladores agem um sobre o outro, produz-se uma polarização com a seguinte energia potencial, correspondente a uma força atrativa entre os átomos,

$$-\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\varepsilon^2 \;\sim\; -\tfrac{1}{2}\,\alpha\, p^2/r^6 \;,$$

onde α representa a polarizabilidade do átomo.

Ao falar desses osciladores, eu só quis indicar uma analogia clássica com o efeito que se obtém como resultado da mecânica ondulatória polidimensional. Encontrei esse resultado por meio de matrizes, mas Wang o deduziu diretamente da equação das ondas em muitas dimensões. No trabalho de Heitler e London, que igualmente se ocupa deste problema, estes autores perderam de vista que, precisamente por causa da grande distância entre os átomos, a contribuição dos efeitos de polarização para a energia de ação mútua, contribuição que eles desprezaram, leva vantagem por sua ordem de grandeza sobre os efeitos que eles calcularam.

[IX] SR. DIRAC. – Gostaria de expor meu ponto de vista sobre esse assunto.

O primeiro ponto do qual gostaria de falar é a explicação que a teoria dos quanta fornece para o experimento de Bothe, descrita pelo Sr. Compton. Essa questão é, no fundo, a mesma que aquela que **[259]** acaba de ser descrita, e não tenho muito a lhe adicionar. A dificuldade provém unicamente de que a representação das ondas no espaço de três dimensões não convém. Esta imagem não estabelece uma distinção entre o caso em que há uma probabilidade p de que um fóton se encontre dentro de um certo volume, e em que há uma probabilidade ½p de que dois fótons se encontrem dentro desse volume e uma probabilidade nula de que apenas um se encontre. Em contraposição, a função de ondas no espaço de muitas dimensões estabelece uma distinção entre esses dois casos e é portanto capaz, quando aplicada ao experimento de Bothe, de mostrar que, enquanto há uma certa probabilidade de um só fóton aparecer em uma ou outra câmara de numeração, não há probabilidade nenhuma de que eles [dois fótons] se apresentem [cada um] nelas simultaneamente.

Atualmente, a teoria da função de ondas polidimensionais exige que se abandone a relatividade. Poder-se-ia, talvez, introduzir a relatividade da maneira indicada pelo Sr. Pauli, quantizando as ondas tridimensionais, mais isso não conduziria a uma intuição muito maior com respeito à explicação de resultados como aqueles de Bothe.

[X] Gostaria agora de mostrar como a expressão de Schrödinger para a densidade elétrica se apresenta na teoria das matrizes. Ver-se-á assim qual é o significado preciso da densidade e quais limitações devem-se impor ao seu uso. Considere um elétron se movendo em um campo arbitrário, como por exemplo aquele de um átomo de hidrogênio. Suas coordenadas x, y, z são matrizes. Divida o espaço em um grande número de pequenas células, e considere a função de três variáveis ξ, η, ζ que é igual a 1 quando o ponto ξ, η, ζ está dentro de uma célula determinada, e igual a 0 quando este ponto está em outro lugar. Essa função, aplicada às matrizes x, y, z, fornecerá uma outra matriz. Haverá uma única destas matrizes para cada célula, e os elementos destas matrizes serão funções de a, b, c, as coordenadas da célula, de maneira que a matriz poderá ser denotada por $A(a,b,c)$.

Cada uma dessas matrizes representa uma quantidade que, quando for medida experimentalmente, deve ter o valor 0 ou 1. Por conseguinte, cada uma dessas matrizes tem os valores caracteristicos 0 ou 1, e nenhum outro. Se forem consideradas as duas matrizes $A(a,b,c)$ **[260]** e $A(a',b',c')$, vê-se que elas devem comutar, já que pode-se dar um valor numérico aos dois simultaneamente; por exemplo, quando se sabe que o elétron encontra-se na célula a, b, c, ele certamente não se encontrará na célula a', b', c', de maneira que se o valor 1 for dado para $A(a,b,c)$, deve-se dar simultaneamente o valor 0 para $A(a',b',c')$.

Pode-se transformar cada uma das matrizes $A(a,b,c)$ em uma matriz diagonal $A^*(a,b,c)$, através de uma transformação canônica do tipo

$$A^*(a,b,c) \;=\; B\,A(a,b,c)\,B^{-1}\,.$$

Como todas as matrizes $A(a,b,c)$ mudam de valor, elas podem ser transformadas simultaneamente em matrizes diagonais através de uma transformação desta espécie. Os elementos diagonais de uma matriz qualquer $A^*(a,b,c)$ são os valores característicos, que são os mesmos que os valores característicos de $A(a,b,c)$, ou seja, exatamente 0 ou 1.

Do mesmo modo, duas matrizes diferentes $A^*(a,b,c)$ e $A^*(a',b',c')$ não podem ter ambas o mesmo elemento diagonal 1, pois um raciocínio simples mostra que $A^*(a,b,c) + A^*(a',b',c')$ também deve ter unicamente 0 e 1 como valores característicos ou elementos diagonais. Sem perda de generalidade, podemos supor que cada A^* possui precisamente um elemento diagonal igual a 1, todos os outros sendo 0. Transformando de volta por meio da fórmula

$$A(a,b,c) = B^{-1} A^*(a,b,c)\, B\ ,$$

encontramos portanto que os elementos da matriz $A(a,b,c)$ são da forma

$$A(a,b,c)_{mn} = B^{-1}{}_m\, B_n\ ,$$

ou seja, uma função do índice da linha multiplicado por uma função do índice da coluna.

Devo salientar que a prova deste resultado não depende das equações de movimento, nem das condições de quanta. Se levarmos em conta este fato, veremos que, abstraindo-se as constantes, $B^{-1}{}_m$ e B_n são precisamente as funções características $\overline{\psi}_m$ e ψ_n de Schrödinger no ponto a, b, c.

Assim, portanto, a função de densidade $\overline{\psi}_m(x,y,z)$, $\psi_n(x,y,z)$ de **[261]** Schrödinger é um elemento diagonal da matriz $A(x,y,z)$, referindo-se a uma célula em torno do ponto x, y, z. A verdadeira expressão da densidade em teoria dos quanta é a matriz inteira. Os elementos diagonais só fornecem a densidade média e não devem ser usados quando a densidade precisa ser multiplicada por uma variável dinâmica representada por uma matriz.

[XI] Gostaria agora de dar minha opinião com respeito ao determinismo e ao significado dos números que se apresentam nos cálculos da teoria dos quanta, tal qual ela se desenha em meu espírito após ter refletido sobre os comentários do Sr. Bohr. Na teoria clássica, parte-se de certos números que descrevem completamente o estado inicial do sistema, e deles se deduzem outros números que descrevem completamente o estado final. Esta teoria determinista só se aplica a um sistema isolado.

Ora, conforme o Sr. Bohr salientou, um sistema isolado é, por definição, inobservável. Só se pode observar um sistema provocando-se um distúrbio nele e examinando sua reação à perturbação. Por conseguinte, dado que a física só se ocupa de grandezas observáveis, a teoria clássica determinista é indefensável.

Também na teoria dos quanta parte-se de certos números e deles se deduzem outros números. Tratemos de penetrar a essência física dessas duas séries de números. As perturbações que um observador inflige a um sistema, para observá-lo, estão submetidos diretamente a seu controle e são atos da vontade livre. *São unicamente os números que descrevem estes atos de livre arbítrio que podem ser tomados como números iniciais para um cálculo na teoria dos quanta.* Outros números que descreveriam o estado inicial do sistema são essencialmente inobserváveis e não figuram no tratamento da teoria dos quanta.

Consideremos agora os números finais obtidos como resultado de um experimento. É essencial que o resultado de um experimento deva ser um registro durável. Os números que descrevem um semelhante resultado devem não só ajudar a descrever o estado do mundo no instante em que o experimento termina, mas devem também ajudar a descrever o mundo em todos os instantes seguintes. Estes números descrevem aquilo que é comum a todos os eventos de uma certa cadeia de fatos ligados entre si por elos **[262]** de causalidade e se estendendo ao infinito no porvir. Tome como exemplo um experimento de câmara de nuvem de Wilson.

O encadeamento causal consiste aqui na formação de gotículas de água em torno dos íons, o espalhamento da luz por estas gotículas e a ação desta luz sobre uma placa fotográfica, onde ela deixa uma marca permanente. Os números que constituem o resultado do experimento descrevem igualmente bem todos os eventos desta cadeia e servem para descrever o estado do mundo em um instante qualquer a partir daquele em que o encadeamento se iniciou.

Procura-se geralmente, através de considerações teóricas, prolongar a cadeia tão longe quanto possível para trás, no passado, afim de que os números obtidos como resultado do experimento se apliquem tão diretamente quanto possível ao processo submetido para exame. No exemplo que acabo de dar, poder-se-ia talvez atribuir a formação dos íons a uma partícula β, afim de que, como resultado do experimento, se obtenha números representando a trajetória de uma partícula β.

[XII] Esta idéia da natureza dos resultados de experimentos se ajusta perfeitamente bem com a nova teoria dos quanta. Esta teoria descreve o estado do mundo a um instante qualquer através de uma função de onda ψ, que normalmente varia de acordo com uma lei de causalidade, de maneira que seu valor inicial determina seu valor em todo instante ulterior. Pode acontecer, todavia, que em um dado instante τ, ψ possa ser desenvolvido em uma série da forma

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n \quad ,$$

onde os ψ_n são funções de onda de uma tal natureza que elas não possam interferir entre si em um instante posterior a t_1. Se este é o caso, então o estado do mundo em instantes mais afastados que t_1 não será descrito por ψ, mas por um dos ψ_n. Pode-se dizer que a natureza escolhe aquele dentre os ψ_n que convém, já que a única informação que a teoria fornece é que a probabilidade de qualquer um dos ψ_n, a escolher, é $|c_n|^2$. A escolha, uma vez feita, é irrevogável e afetará todo o estado futuro do mundo. O valor de n escolhido pela natureza pode ser determinado pela experiência e *os resultados de toda a experiência* são números que descrevem semelhantes escolhas da natureza. **[263]**

Tome como exemplo o caso de um processo simples de choque. O pacote de ondas representando o elétron incidente é espalhado em todas as direções. Deve-se tomar como função de onda após o processo não toda a onda espalhada, mas mais uma vez um pacote de ondas movendo-se em uma direção determinada. A partir dos resultados de um experimento adequado poder-se-ia, reconstituindo para trás um encadeamento de eventos ligados causalmente entre si, determinar a direção na qual o elétron foi espalhado, e disso se concluiria que a natureza escolheu essa direção. Se agora um espelho fosse colocado de maneira a refletir a onda eletrônica espalhada em uma direção d_1, de modo que ela interferisse com outra onda eletrônica espalhada em uma outra direção d_2, não se conseguiria distinguir entre o caso em que o elétron é espalhado na direção d_2 e aquele em que ele é espalhado na direção d_1 e refletido de novo no sentido de d_2. Nesse caso não se conseguiria constituir a cadeia causal tão longe e não se saberia dizer que a natureza escolheu uma direção depois que o choque se produziu; é só mais tarde que a natureza escolheu o lugar onde o elétron apareceria. A interferência entre os ψ_n obriga a natureza a adiar sua escolha para mais tarde.

[XIII] SR. BORN. – Gostaria de notar, sobre o tema das considerações do Sr. Dirac, que elas parecem estar estreitamente ligadas às idéias expressas em um trabalho de meu colaborador F. [aliás, J.] von Neumann, que aparecerá em breve. O autor deste trabalho mostra que a mecânica dos quanta pode ser erigida com a ajuda do cálculo de probabilidades ordinário a partir de um pequeno número de hipóteses formais; as amplitudes de probabilidade e a lei de sua composição não desempenham aí um papel significativo.

SR. KRAMERS. – Penso que a maneira mais elegante de se chegar aos resultados das considerações do Sr. Dirac nos é dada pelos métodos que ele expôs em seu artigo no *Proc. Roy. Soc.*, ser. A, t. 113, p. 621. Consideremos uma função das coordenadas q_1, q_2, q_3 de um elétron, que é igual a 1 quando o ponto considerado está situado no interior de um certo volume V do espaço, e igual a zero para todo ponto exterior, e representemos por $\psi(q,\alpha)$ e $\overline{\psi}\,(\alpha,q)$ as funções de transformação que **[264]** permitem transformar uma grandeza física F, cuja forma é conhecida como sendo uma matriz (q',q''), em uma matriz (α',α''), sendo α_1, α_2, α_3 as primeiras integrais da equação de movimento. A função f, escrita como uma matriz (q',q''), assumirá nesse caso a forma $f(q')\ \delta(q'-q'')$, onde $\delta(q'-q'')$ representa a matriz unidade de Dirac. Como matriz (α',α''), f assumirá nesse caso a forma

$$\begin{aligned} f(\alpha',\alpha'') &= \int \overline{\psi}(\alpha',q')\,dq'\,f(q')\,\delta(q'-q'')\,dq''\,\psi(q'',\alpha'') \\ &= \int_V \overline{\psi}(\alpha',q')\,dq'\,\psi(q',\alpha'') \qquad , \end{aligned}$$

onde a integral deve se estender a todo o volume considerado. Os termos na diagonal de $f(\alpha',\alpha'')$, que podem ser escritos sob a forma

$$f(\alpha) = \int \psi\,\overline{\psi}\,dq \quad ,$$

representarão diretamente, em conformidade com a interpretação das matrizes de Dirac, a probabilidade de que, para um estado do sistema caracterizado por valores dados de α, as coordenadas do elétron sejam aquelas de um ponto situado no interior de *V*. Como ψ nada mais é do que a solução da equação de onda de Schrödinger, chegamos imediatamente à interpretação da expressão ψ em discussão.

[XIV] SR. HEISENBERG. – Não estou de acordo com o Sr. Dirac quando ele diz que no experimento descrito a natureza faz uma escolha. Mesmo se você se colocar muito longe de sua substância dispersiva, e se você medir após um tempo muito longo, você pode obter interferências pegando dois espelhos. Se a natureza tivesse feito uma escolha, seria difícil imaginar como as interferências se produzem. Evidentemente, dizemos que esta escolha da natureza não pode jamais ser conhecida antes que o experimento decisivo tenha sido feito; por esta razão, não podemos fazer nenhuma objeção real a essa escolha, pois a expressão "a natureza faz uma escolha" não implica nesse caso nenhuma constatação física. Eu diria, preferencialmente, conforme fiz em meu último artigo, que o *próprio observador* faz a escolha, pois é só no momento em que a observação é feita que a "escolha" se torna uma **[265]** realidade física e que a relação das fases nas ondas, o poder de interferência, é destruída.

[XV] SR. LORENTZ. – Existe portanto, me parece, uma diferença de opinião fundamental com respeito ao significado dessas escolhas feitas pela natureza.

Admitir a possibilidade de que a natureza faça uma escolha significa, penso, que é impossível para nós saber de antemão como os fenômenos se apresentarão no porvir. É portanto o indeterminismo que vocês querem erigir como princípio. Segundo vocês, há acontecimentos que nós não podemos prever, enquanto que até hoje nós sempre admitimos a possibilidade destas previsões.

Fótons

[XVI]

SR. KRAMERS. – Sr. Brillouin nos explicou, durante a discussão da palestra do Sr. de Broglie [*Électons et Photons*, pp. 137-40], como a pressão da luz se exerce no caso de interferências e que é preciso supor uma tensão auxiliar. Mas como a pressão da luz se exerce no caso em que ela é tão fraca que não há mais do que um fóton dentro da zona de intereferências? E como se pode obter a tensão auxiliar neste caso?

SR. DE BROGLIE. – A demonstração da existência destas tensões só pode ser feita se for considerada uma nuvem de fótons.

SR. KRAMERS. – E se não houver mais do que um fóton, como é possível dar conta da mudança brusca de quantidade de movimento que sofre o objeto refletido?

SR. BRILLOUIN. – Nenhuma teoria fornece atualmente a resposta à questão do Sr. Kramers.

SR. KRAMERS. – Seria preciso, sem dúvida, imaginar um mecanismo complicado, que não pode ser deduzido da teoria eletromagnética das ondas?

SR. DE BROGLIE. – A representação dualista por meio de corpúsculos **[266]** e ondas associadas não constitui uma imagem definitiva dos fenômenos. Ela não permite prever as pressões exercidas sobre os diferentes pontos de um espelho durante a reflexão de um único fóton. Ela fornece somente o valor médio da pressão durante a reflexão de uma nuvem de fótons.

SR. KRAMERS. – Qual vantagem você vê em dar um valor preciso para a velocidade v dos fótons?

SR. DE BROGLIE. – Isto permite que se represente a trajetória seguida pelos fótons e que se torne preciso o sentido destas entidades; pode-se ainda considerar o fóton como um ponto material dotado de uma posição e de uma velocidade.

SR. KRAMERS. – Não vejo muito bem, de minha parte, qual a vantagem que há, para a descrição dos experimentos, em se fazer uma imagem na qual os fótons percorrem trajetórias bem definidas.

SR. EINSTEIN. – Durante a reflexão em um espelho, Sr. L. de Broglie admite que os fótons se deslocam paralelamente ao espelho, com uma velocidade $c \cdot \text{sen}\,\theta$; mas o que acontece quando a incidência é normal? Os fótons agora possuiriam uma velocidade nula, conforme exigido pela fórmula ($\theta = 0$)?

SR. PICCARD. – Sim. No caso da reflexão, é preciso admitir que o componente paralelo ao espelho da velocidade dos fótons é invariável. Na zona de interferências, o componente normal ao espelho desaparece. Quanto mais [o ângulo d]a incidência aumenta, mais os fótons são amortecidos. Chega-se assim aos fótons imóveis no caso limite da incidência normal.

SR. LANGEVIN. – Assim portanto, na zona de interferências, os fótons não possuem mais a velocidade da luz; eles não possuem sempre a velocidade *c*?

SR. DE BROGLIE. – Não, em minha teoria a velocidade dos fótons não é igual a *c*, salvo fora da zona de interferências, quando a radiação luminosa se propaga sozinha no vazio. Quando ocorrem **[267]** fenômenos de interferências, a velocidade dos fótons torna-se inferior a *c*.

[XVII] SR. DE DONDER. – Gostaria de mostrar, com relação a alguns pontos, como as pesquisas do Sr. L. de Broglie se ligam às minhas.

Identificando as dez equações do campo gravitacional e as quatro equações do campo eletromagnético com as catorze equações da mecânica ondulatória de L. Rosenfeld, obtive(*) um princípio de correspondência que torna preciso e generaliza aquele de O. Klein(†).

Em meu princípio de correspondência figuram *a corrente quântica* e *o tensor quântico*. Mostrarei as fórmulas daqui a pouco; agora basta notar que o exemplo de correspondência exposto pelo Sr. de Broglie está em harmonia com o meu princípio.

Sr. L. Rosenfeld(‡) deu um outro exemplo. Aqui, a massa é *conservada* e, por outro lado, utiliza-se a corrente quântica. Acrescentamos que este modelo de quantificação recai também, como caso particular, em nosso princípio de correspondência.

Sr. Lorentz notou, com algum espanto, que a equação de continuidade da eletricidade é conservada no exemplo do Sr. de Broglie. Graças ao nosso princípio de correspondência(§) e ao teorema de compatibilidade de Rosenfeld, demonstra-se que este será sempre o caso para a corrente total (incluindo aí a corrente quântica) e para o teorema do momento e da energia. As quatro equações que exprimem este

---

(*) *Bull. Ac. Roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 5ª série, t. XIII, nºs 8-9, sessão de 2 de outubro de 1927, pp. 504-9. Ver especialmente as equações (5) e (8).

(†) *Zeitschr. f. Phys.*, Bd. 41, Heft 617, 1927. Ver especialmente as equações (18), p. 414.

(‡) L. ROSENFELD, "L'Univers à cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire" (4ª communication), *Bull. Ac. Roy. de Belgique*, Cl. des Sc., outubro de 1927. Ver especialmente os parágrafos 4 e 5.

(§) TH. DE DONDER, *loc. cit.* Ver especialmente as equações (11) e (12).

último teorema são satisfeitas em virtude das duas equações quânticas generalizadas de de Broglie-Schrödinger.

Para terminar, mais um pequeno comentário. Sr. de Broglie **[268]** disse que os sistemas *relativísticos* não existem ainda. Eu forneci a teoria dos sistemas *contínuos* ou *holônomos*(*). Mas Sr. de Broglie atribui à palavra *sistema* um outro significado; ele tem em vista os sistemas com *interações*, como o átomo de Bohr, o sistema de três corpos, etc. Notei recentemente(†) que a quantificação desses sistemas deveria se fazer por meio de um $(ds)^2$ tomado no espaço de *configuração* a $4n$ dimensões, onde n designa o número de partículas. Em um trabalho ainda não publicado, estudei sistemas particulares chamados *aditivos*.

SR. LORENTZ. – As tensões das quais você fala e que você chama de quânticas são aquelas de Maxwell?

SR. DE DONDER. – Nossas tensões quânticas devem recair como caso particular nas tensões de Maxwell; isso resulta de que o nosso princípio de correspondência é deduzido (em parte, pelo menos) das equações de Maxwell, e de que essas tensões quânticas desempenham aqui formalmente o mesmo papel que as tensões da eletrostrição(‡) na gravitação einsteiniana. Recordemo-nos, a respeito deste assunto, que o nosso princípio de correspondência é também deduzido das equações fundamentias da gravitação einsteiniana. Sr. de Broglie, graças a seus cálculos, reencontrou assim as tensões de radiação.

Fótons e Elétrons

[XVIII]

SR. LANGEVIN faz uma comparação entre as estatísticas antigas e modernas.

Antigamente, decompunha-se o espaço de fase em células, e avaliava-se aí o número de pontos representativos atribuindo uma individualidade a cada um dos constituintes do sistema.

Hoje em dia, aparentemente, deve-se modificar esse procedimento, **[269]** suprimindo a individualidade dos constituintes do sistema e a substituindo pela individualidade dos estados de movimento. Supondo que um número qualquer de

---

(*) *C.R. Acad. Sc. Paris*, 21 de fevereiro de 1927, e *Bull. Ac. Roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 7 7 de março de 1927.

(†) *Bull. Ac. Roy. de Belgique*, Cl. des Sc., 2 de outubro de 1927. Ver especialmente a fórmula (22).

(‡) Para maiores detalhes, ver nossa nota: “A eletrostrição deduzida da gravitação einsteiniana”, *Bull. Ac. Roy. de Belgique*, Cl. des Sc., sessão de 9 de outubro de 1926, pp. 673-8.

constituintes do sistema possam estar no mesmo estado de movimento, obtém-se a estatística de Bose-Einstein.

Obtém-se uma terceira estatística, a de Pauli-Fermi-Dirac, ao se supor que só possa haver um único ponto representativo em cada célula do espaço de fase.

O novo gênero de representação aparenta ser mais adequado à concepção de fótons e partículas. Dado que se lhes atribui uma completa identidade de natureza, isso parece indicar que não se deva se aferrar à sua individualidade, mas sim atribuir uma individualidade aos estados de movimento.

Na palestra dos Srs. Born e Heisenberg, vejo que é um resultado da mecânica dos quanta que a estatística de Bose-Einstein se aplica a moléculas, e a de Pauli-Dirac a elétrons e prótons. Isto significa que para fótons e moléculas há superposição, enquanto que para prótons e elétrons há impenetrabilidade. As partículas materiais se distinguem portanto dos fótons devido a sua impenetrabilidade.

SR. HEISENBERG. – Não há razão alguma, na mecânica dos quanta, para preferir uma estatística a outra. Pode-se sempre utilizar diferentes estatísticas, que podem ser consideradas soluções completas do problema da mecânica quântica. No estado atual da teoria, a questão da interação não tem nada a ver com a questão da estatística.

Sentimos todavia que a estatística de Einstein-Bose poderia convir melhor aos quanta da luz, a estatística de Fermi-Dirac aos elétrons positivos e negativos. A estatística poderia estar relacionada com a diferença entre a radiação e a matéria, conforme comentado pelo Sr. Bohr. Mas é difícil estabelecer um elo entre esta questão e o problema da interação. Mencionarei simplesmente a dificuldade criada pela giração dos elétrons.

SR. KRAMERS recorda as pesquisas de Dirac sobre a estatística, que mostraram que a estatística de Bose-Einstein pode ser expressa de uma maneira totalmente diferente. A estatística dos fótons, **[270]** por exemplo, é obtida considerando uma cavidade cheia de radiação de corpo negro como sendo um sistema possuindo uma infinidade de graus de liberdade. Se este sistema for quantificado segundo as regras da mecânica quântica e se a estatística de Boltzmann for aplicada, chega-se à fórmula de Planck, que é equivalente a uma estatística de Bose-Einstein aplicada aos fótons.

Jordan mostrou que uma modificação formal do método de Dirac permite chegar igualmente a uma distribuição estatística que é equivalente à estatística de Fermi. Este método é sugerido pelo princípio de exclusão de Pauli.

SR. DIRAC observa que esta modificação, considerada de um ponto de vista geral, é bastante artificial. A estatística de Fermi não é estabelecida exatamente sobre as mesmas bases que a estatística de Einstein-Bose, já que a via natural de quantificação das ondas conduz precisamente à esta última estatística para as partículas associadas a estas ondas. Para obter a estatística de Fermi, Jordan precisou usar um método singular de quantificação das ondas, escolhido especialmente de maneira a dar o resultado desejado. Há erros matemáticos no trabalho de Jordan que ainda não foram reconsiderados.

SR. KRAMERS. – Concordo de bom grado que o tratamento de Jordan não aparenta ser tão natural quanto a maneira que o Sr. Dirac quantifica a equação de Schrödinger. Todavia, ainda não compreendemos porque a natureza exige esta quantificação e podemos esperar que um dia alguém descobrirá a razão profunda pela qual é necessário quantificar de tal maneira em um caso e de outra maneira no outro.

SR. BORN. – Uma diferença essencial entre a antiga teoria de Debye, na qual as vibrações características da cavidade negra são tratadas como osciladores de Planck, e a nova teoria é a seguinte: ambas fornecem exatamente a fórmula de radiação de Planck (para a densidade média de radiação), mas a antiga teoria conduz a valores inexatos para as flutuações locais da radiação, enquanto que a nova teoria fornece estes valores de forma exata. **[271]**

[XIX] SR. HEISENBERG. – Segundo os experimentos, os prótons e os elétrons possuem ambos um momento angular e obedecem a estatística de Fermi-Dirac; estes dois pontos parecem estar relacionados. Se forem tomadas em conjunto duas partículas, e perguntar-se por exemplo qual estatística se deve aplicar a um gás formado de átomos de hidrogênio, encontra-se que é a estatística boa é a de Bose-Einstein, pois se dois átomos de H forem permutados, teremos permutado um elétron positivo e um elétron negativo, de tal sorte que teremos mudado *duas vezes* o sinal da função de Schrödinger. Em outros termos, a estatística de Bose-Einstein é válida para todo gás formado de moléculas nêutras, ou mais geralmente constituído de sistemas nos quais a carga é um múltiplo par de *e*. Se a carga do sistema for um múltiplo ímpar de *e*, é a estatística de Fermi-Dirac que se aplica a um conjunto de tais sistemas.

O núcleo de He não tem movimento de rotação e uma reunião de núcleos de He obedece às leis da estatística de Bose-Einstein.

SR. FOWLER pergunta se os detalhes finos da estrutura de bandas do hélio se ajusta melhor com a idéia de que só há estados simétricos de rotação dos núcleos de hélio do que com a idéia de que há unicamente estados antissimétricos.

SR. HEISENBERG. – Nas bandas do hélio, a partir do fato de que cada segunda raia desaparece, aprendemos que o núcleo de He não é animado de um movimento de giração. Mas ainda não é possível decidir experimentalmente, apoiando-se nestas bandas, se é a estatística de Bose-Einstein ou a de Fermi-Dirac que se deve aplicar ao núcleo de He.

SR. SCHRÖDINGER. – Você falou de uma prova experimental a favor da hipótese de que o próton é animado de um movimento de giração assim como o elétron, e que os prótons obedecem à lei da estatística de Fermi-Dirac. A que prova você estava fazendo alusão?

SR. HEISENBERG. – A prova experimental é fornecida pelo **[272]** trabalho de Dennison(*) sobre o calor específico da molécula de hidrogênio, trabalho baseado nas pesquisas de Hund relativas aos espectros de bandas do hidrogênio.

Hund encontrou uma boa concordância entre seu esquema teórico e os trabalhos experimentais de Dilke, Hopfield e Richardson, mediante as hipóteses mencionadas pelo Sr. Schrödinger. Mas para o calor específico, ele encontrou uma curva muito diferente da curva experimental. A curva experimental do calor específico parecia pleitear preferencialmente a favor da estatística de Bose-Einstein. Mas a dificuldade foi elucidada no artigo de Dennison, que mostrou que os sistemas de termos “simétricos” e “antissimétricos” (com relação aos prótons) não se combinam no tempo necessário para realizar o experimento. À baixa temperatura, produz-se uma passagem em mais ou menos três meses. A relação dos pesos estatísticos dos sistemas de termos simétricos e antissimétricos é 1:3, como no átomo de hélio. Mas a baixas temperaturas o calor específico deve ser calculado como se houvesse uma mistura de dois gases, um gas “orto” e um gás “para”. Se alguém quisesse fazer experimentos sobre o calor específico com um gás de hidrogênio, conservado a baixa temperatura durante vários meses, o resultado seria totalmente diferente do resultado ordinário.

SR. EHRENFEST deseja formular uma pergunta que tem relação com os experimentos recentes do Sr. Langmuir sobre o movimento desordenado dos elétrons na passagem da eletricidade através de um gás.

Com a bem conhecida exclusão de Pauli (Pauliverbot), introduz-se (ainda na linguagem da antiga teoria dos quanta) uma relação de incompatibilidade particular entre os movimentos quânticos de diversas partículas de um mesmo sistema, sem que se fale explicitamente de um papel eventual desempenhado por forças que ajam entre estas partículas. Ora, suponha que através de uma pequena abertura deixem-se passar partículas – que não exercem, por assim dizer, forças umas sobre as outras – de um espaço grande para uma caixinha limitada por **[273]** paredes completamente rígidas e de forma complicada, de maneira que as partículas não reencontrem a abertura para sair da caixa, a não ser depois de um tempo bastante longo. Se, antes de entrar na caixa, as partículas praticamente não tiverem movimentos relativos umas em relação às outras, então intervem a exclusão de Pauli. Após suas saídas, terão elas energias muito diferentes, independentemente da fraqueza das ações mútuas entre as partículas? Ou então

(*) *Proc. Roy. Soc.*, série A, vol. 114, 1927, p. 483.

qual papel estas forças desempenham na produção da incompatibilidade de Pauli (escolha de soluções antissimétricas da equação ondulatória)?

SR. HEISENBERG. – A dificuldade do experimento do Sr. Ehrenfest é a seguinte: os dois elétrons devem ter energias diferentes. Se a energia de interação dos dois elétrons é muito pequena, o tempo τ_1 necessário para que os elétrons troquem uma quantidade apreciável de energia é muito longo. Mas para descobrir experimentalemente em que estado, simétrico ou antissimético, encontra-se o sistema de dois elétrons dentro da caixa, necessitaríamos de um certo tempo τ_2 que é pelo menos $\sim 1/\nu$, se $h\nu$ for a diferença entre os estados simétrico e antis-simétrico. Conseqüentemente, $\tau_1 \sim \tau_2$, e a dificuldade desaparece.

SR. RICHARDSON. – A prova de uma giração do núcleo é muito mais completa do que o Sr. Heisenberg acaba de dizer. Tive recentemente ocasião de classificar um grande número de raias de bandas visíveis do espectro da molécula de H_2. Um dos traços característicos deste espectro é uma alternância bem marcada na intensidade de raias sucessivas. As intensidades das raias deste espectro foram recentemente medidas por Mac Lennan, Grayson-Smith e Collins. Infelizmente, um grande número destas raias se recobrem mutuamente, de maneira que as medições de intensidade só podem ser aceitas com reservas.

Contudo, pode-se dizer, penso eu, sem receio de errar, que todas as bandas que são suficientemente bem desenvolvidas e que são suficientemente isentas de influências entre as raias – de forma que suas medições de intensidade são confiáveis – possuem raias, geralmente numeradas 1, 3, 5, ..., que são intrinseca-mente três vezes mais intensas do que as **[274]** raias intermediárias, geralmente numeradas 2, 4, 6, ... Por intensidade intrínseca entendo aquela que se obtém após levar em conta os efeitos da temperatura e do número quântico (e também, evidentemente, os efeitos de recobrimento por outras raias, quando for possível levar isto em conta) sobre a intensidade. Em outros termos, estou querendo dizer que a constante c da fórmula de intensidade

$$\Im = c\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\exp\left[\frac{-\left(m+\tfrac{1}{2}\right)^2 h^2}{8\pi K k T}\right] ,$$

onde m é o número da raia e K o momento de inércia da molécula, é três vezes maior para as raias de número ímpar do que para aquelas de número par. Isto significa que a relação 3:1 se aplica com uma precisão de aproximadamente 5% a pelo menos 5 estados de vibração diferentes de um estado de excitação com 3 elétrons. Ela se aplica também a um outro estado, que é provavelmente 3^1P se os outros forem 3^3P. Demonstra-se também, mas de uma maneira menos precisa, que ela se aplica a dois estados de vibração diferentes de um estado de vibração com 4 elétrons.

Há, portanto, atualmente, duas provas experimentais quantitativas de que esta giração nuclear subsiste através dos diferentes estados de excitação da molécula de hidrogênio.

[XX] SR. LANGMUIR. – Tem-se freqüentemente considerado a semelhança da relação entre as ondas luminosas e os fótons, por um lado, com a relação entre as ondas de de Broglie e os elétrons, por outro. Até que ponto esta analogia pode ser desenvolvida? Há muitas correspondências notáveis, mas eu gostaria de ver examinado também se não há diferenças fundamentais entre essas relações. Assim, por exemplo, um elétron é caracterizado por uma carga invariante. Há alguma propriedade invariante do fóton que possa ser comparada com a carga do elétron? A velocidade do elétron é variável, a do fóton também é? A teoria eletromagnética da luz sugeriu um grande número de experimentos que aumentaram consideravelmente nossos conhecimentos. A teoria ondulatória do elétron explica os belos resultados de Davisson e Germer. Podemos esperar que esta teoria será tão fértil em sugestões experimentais quanto foi a teoria ondulatória da luz? **[275]**

SR. EHRENFEST. – Quando se examina um sistema de ondas planas de uma luz de polarização elíptica, colocando-se em diferentes sistemas de coordenadas em movimento, estas ondas apresentam o mesmo grau de elipticidade, qualquer que seja o sistema no qual nos encontremos. Gostaria de perguntar se, para passar da linguagem de ondas para aquela de fótons, deve-se atribuir a cada fóton uma polarização elíptica (linear ou circular nos casos limites)? Se a resposta for afirmativa, deve-se distinguir, com respeito à invariância do grau de elipticidade na relatividade, tantas espécies de fótons quanto há graus de elipticidade. Isto daria, parece-me, uma nova diferença entre o fóton e o elétron girante. Se, pelo contrário, alguém quiser antes de tudo conservar a analogia com este elétron, ele iria de encontro, ao que me parece, a duas dificuldades:

1° Como poder-se-ia agora descrever, na linguagem dos fótons, a luz polarizada? (É instrutivo, a este respeito, pensar na maneira como dois componentes linearmente polarizados, emitidos perpendicularmente a um campo magnético por uma chama apresentando o efeito Zeeman, são absorvidos por uma segunda chama colocada em um campo magnético de orientação antiparalela.)

O Sr. Zeeman, a quem eu coloquei a questão, fez a cortesia de realizar o experimento a mais ou menos um ano atrás, e ele pôde constatar que a absorção é a mesma nos campos paralelos e antiparalelos, como se poderia prever, aliás, por considerações de continuidade.

2° Para os elétrons, que se movem sempre com uma velocidade inferior àquela da luz, a universalidade da giração pode se exprimir pelo fato de que o tensor antissimétrico correspondente pode ser transformado com relação a um sistema de coordenadas arrastado juntamente com o elétron em seu movimento de translação (“em repouso”). Mas os fótons se movem sempre com a velocidade da luz!

SR. COMPTON. – A luz pode ser polarizada elipticamente quando o fóton tem um momento angular?

SR. EHRENFEST. – Como os fótons se movem com a velocidade da luz, eu não compreendo bem o que isso significa, **[276]** quando se diz que cada fóton tem, como um elétron, um momento angular universal.

Permitam-me recordar ainda mais uma propriedade dos fótons. Quando dois fótons se movem em direções que não são exatamente as mesmas, pode-se dizer de maneira totalmente arbitrária que um dos fótons é um rádio-fóton [um fóton de freqüência de rádio] e o outro um fóton de raio gama, ou vice-versa. Isto depende pura e simplesmente do sistema de coordenadas movente em relação ao qual se descreve este par de fótons.

SR. LORENTZ. – Pode-se torná-los idênticos por meio de tal transformação?

SR. EHRENFEST. – Perfeitamente. Se eles se movem em direções diferentes, pode-se lhes dar a mesma cor tomando um sistema de referência conveniente. É apenas no caso em que suas trajetórias universais são exatamente paralelas que a relação entre suas freqüências permanece invariante.

SR. PAULI. – O fato de que o elétron girante pode assumir, dentro do campo, duas orientações permitidas pelos quanta parece nos comprometer, à primeira vista, a compará-lo ao fato de que há, para uma direção de propagação determinada dos quanta de luz, duas vibrações características da radiação negra [de corpo negro], distintas pela sua polarização. Permanecem todavia diferenças essenciais entre estes dois casos. Enquanto que na relatividade as ondas são descritas por um vetor sêxtuplo (real) $F_{ix} = -F_{xi}$, foram propostos para o elétron girante os dois modos de descrição seguintes para as ondas de de Broglie associadas: 1° Descrevem-se estas ondas por meio de duas funções complexas ψ_α, ψ_β (portanto quatro funções reais); mas estas funções só se transformam de uma maneira muito pouco intuitiva na passagem de um sistema de coordenadas para outro. É esta a via que eu próprio segui. 2° Seguindo Darwin, introduz-se um vetor quádruplo com componentes em geral complexos (portanto ao todo oito funções reais). Mas este procedimento tem o incoveniente de que este vetor implica uma indeterminação, pois todos os resultados controláveis só dependem de *duas* funções complexas.

Estes dois modos de descrição são matematicamente equivalentes, mas independentemente da escolha que se faça por um ou **[277]** por outro, parece-me que não se poderia falar de uma analogia *simples* entre a polarização das ondas luminosas e a polarização das ondas de de Broglie associadas ao elétron girante.

Uma outra diferença essencial entre os elétrons e os quanta de luz é que entre os quanta de luz não existe ação recíproca direta (imediata), ao passo que os elétrons, à medida que têm carga elétrica, exercem ações mútuas diretas uns sobre os outros.

SR. DIRAC. – Gostaria de chamar atenção para uma importante falha na analogia entre a giração dos elétrons e a polarização dos fótons. Na atual teoria do elétron girante, admite-se que se possa indicar a direção do eixo de rotação ao mesmo tempo que sua posição, ou ao mesmo tempo que sua quantidade de movimento. A variável que caracteriza a giração do elétron altera-se [é compatível] portanto com suas coordenadas e com as variáveis da quantidade de movimento. Este não é o caso para fótons. Pode-se indicar uma direção de polarização para ondas planas de luz monocromática, que representam fótons que possuem uma certa quantidade de movimento, de maneira que a variável da polarização deva se alterar com as varíaveis da quantidade de movimento. Por outro lado, se a posição do fóton é determinada, isto significa que uma perturbação eletromagnética ficará confinada a um instante dado em um volume muito pequeno, e não se pode atribuir uma polarização determinada a esta perturbação, ou seja, uma direção determinada ao vetor elétrico. Assim, a variável de polarização de um fóton não varia [é incompatível] com suas coordenadas.

[XXI] SR. LORENTZ. – Trata-se, nestas diferentes teorias, da probabilidade $\psi\psi^*$. Gostaria de ver claramente como esta probabilidade pode existir quando as partículas se movem de uma maneira bem definida e seguindo certas leis. No caso de elétrons, isso nos conduz à questão dos movimentos no campo ψ (de de Broglie). Mas a mesma questão se coloca para os quanta de luz. Os fótons permitem recuperar todas as propriedades clássicas das ondas? Com os fótons, pode-se representar a energia, a quantidade de movimento e o vetor de Poynting? Vê-se imediatamente que quando se tem uma densidade **[278]** de energia e um transporte de energia, se quisermos explicar isto através de fótons, o número de fótons por unidade de volume dá a densidade e o número de fótons que se desloca por segundo através de uma unidade de superfície dá o vetor de Poynting.

Os fótons deverão então se mover com uma velocidade diferente da luz. Se se quisesse atribuir aos fótons sempre a mesma velocidade c, dever-se-ia em alguns casos admitir uma superposição de várias correntes de fótons. Ou então dever-se-ia admitir que os fótons não podem servir para representar todos os componentes do tensor energia-momento. É preciso que uma parte dos termos seja contínua no campo. Ou então os fótons estão fundidos [em uma nuvem].

A isto se liga a questão de saber se os fótons podem ter uma outra velocidade que não a da luz e se eles podem até ficar em repouso. Isto me desagradaria totalmente. Poderíamos falar desses fótons e de seu movimento em um campo de radiação?

SR. DE BROGLIE. – Quando eu procurei juntar o movimento dos fótons com a propagação das ondas ψ da nova mecânica, eu não estava preocupado em fazer este ponto de vista concordar com a concepção eletromagnética das ondas luminosas, e eu encarei as ondas ψ unicamente sob seu caráter escalar, do qual se faz habitualmente uso até hoje.

SR. LORENTZ. – Para os fótons também há necessidade destas ondas. São elas de natureza diferente das ondas luminosas? Não me agradaria muito ter que introduzir dois tipos de ondas.

SR. DE BROGLIE. – Não se sabe em absoluto, atualmente, qual é a natureza física da onda ψ dos fótons. Pode-se procurar identificá-la com a onda eletromagnética? Eis uma questão que permanece aberta. Em todo caso, pode-se procurar provisoriamente desenvolver uma teoria dos fótons associando-os às ondas ψ.

SR. LORENTZ. – A velocidade da onda é igual à da luz?

SR. DE BROGLIE. – Em minha teoria, a velocidade dos fótons é **[279]** igual a c, salvo dentro dos campos de interferência. De uma maneira genérica, encontro que é necessário atribuir a um corpúsculo em movimento uma massa própria M_0 dada pela fórmula

$$M_0 = \sqrt{m_0^2 - \frac{h^2}{4\pi^2 c^2}\frac{\nabla^2 a}{a}} ,$$

onde a função $\nabla^2 a \; / \; a$ é calculada no ponto em que se encontra o móvel com o movimento considerado (a é a amplitude da onda ψ). Para os fótons, tem-se

$$m_0 = 0 .$$

Portanto, quando um fóton se desloca livremente, ou seja, está associado a uma onda plana ordinária, M_0 é nula e, para ter uma energia finita, o fóton deve possuir a velocidade c. Mas, quando há interferência, $\nabla^2 a \; / \; a$ torna-se diferente de zero, M_0 deixa de ser nula e o fóton, para conservar a mesma energia, deve ter uma velocidade inferior a c, velocidade que pode até ser nula.

SR. LORENTZ. – O termo $\nabla^2 a \; / \; a$ deve ser negativo, senão a massa torna-se imaginária.

SR. DE BROGLIE. – Na concepção corpuscular da luz, a existência de fenômenos de difração que se produzem na borda de um anteparo nos obriga a admitir que, neste caso, a trajetória dos fótons é curva. Os partidários da teoria da emissão diziam que a borda do anteparo exerce uma força sobre o corpúsculo. Ora, se na nova mecânica, tal qual desenvolvi, escrevem-se as equações de Lagrange para o fóton, vê-se aparecer no segundo membro destas equações um termo proporcional ao gradiente de M_0.

Este termo representa um tipo de força de um gênero novo que existe somente quando a massa própria é variável, ou seja, onde há interferência. É esta força que curvaria a trajetória do fóton quando sua onda ψ é difratada pela borda do anteparo.

Além disso, com as mesmas equações de Lagrange recupera-se, para uma nuvem de fótons, as tensões internas obtidas pelos **[280]** Srs. Schrödinger e De Donder. Encontra-se, de fato, as relações

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[T^{ik} - \Pi^{ik}\right] = 0 \quad ,$$

onde o tensor T^{ik} é o tensor de energia-momento dos corpúsculos:

$$T^{ik} = \rho_0 \mu^i \mu^k \quad .$$

O tensor Π^{ik}, que depende das derivadas das amplitudes da onda ψ e é nulo quando esta amplitude é constante, representa as tensões existentes dentro da nuvem de corpúsculos, e estas tensões permitem recuperar o valor da pressão de radiação no caso da reflexão da luz por um espelho.

O tensor $T^{ik} + \Pi^{ik}$ é certamente aparentado ao tensor de Maxwell, mas, para que isso ficasse claro, seria necessário tornar precisa a relação existente entre a onda ψ dos fótons e a onda luminosa eletromagnética.

[XXII] SR. PAULI. – Parece-me que a concepção do Sr. de Broglie, no que concerne os resultados estatísticos do experimento de espalhamento, está de bom acordo com a teoria de Born no caso de choques elásticos, mas que ela não é mais assim quando se considera também choques não elásticos. Gostaria de ilustrar isso através do exemplo do rotor, que já foi mencionado pelo próprio Sr. de Broglie. Conforme mostrado por Fermi[*], o tratamento dado pela mecânica ondulatória para o problema do choque de uma partícula que se move no plano (x,y) e de um rotor situado no mesmo plano pode ser esclarecido da seguinte maneira. Introduz-se um espaço de configuração de três dimensões no qual duas coordenadas correspondem aos x e y da partícula que entra em colisão, enquanto que como terceira coordenada é escolhido o ângulo φ do rotor. No caso em que não há ação mútua entre o rotor e a partícula, a função ψ do sistema total é dada por

---

[*] *Zeitschr. f. Phys.*, t. 40, 1926, p. 399.

$$\psi(x,y,z) \;=\; A\exp\left(2\pi i\left[\frac{1}{h}\left(p_x x + p_y y + p_\varphi \varphi\right) - \nu t\right]\right) \quad ,$$

[281] onde supõe-se que

$$p_\varphi \;=\; m\frac{h}{2\pi} \qquad (m = 0,1,2,\ldots) \quad .$$

Em particular, a oscilação senoidal da coordenada φ corresponde a um estado estacionário do rotor. A superposição de várias ondas parciais desta espécie, correspondendo a diferentes valores de m e conseqüentemente de φ, significa, segundo Born, que para vários estados estacionários do rotor há uma probabilidade diferente de zero, enquanto que, segundo a maneira de ver do Sr. de Broglie, o rotor não tem mais, neste caso, velocidade angular constante e pode executar também oscilações em certas circunstâncias.

Ora, se no caso de uma energia de interação finita entre a partícula chocante e o rotor, nós estudarmos o fenômeno da colisão por meio de uma equação de onda no espaço (x, y, φ), o resultado pode, segundo Fermi, ser interpretado muito simplesmente. De fato, como esta energia de interação depende do ângulo φ de uma maneira periódica e desaparece a uma grande distância do rotor, ou seja, do eixo φ, o que temos no espaço (x, y, φ) é uma onda que cai sobre uma rede [de difração] e, particularmente, sobre uma rede que é ilimitada na direção do eixo φ. À grande distância da rede as ondas só saem em direções determinadas do espaço de configuração, caracterizadas por valores inteiros da diferença $m' - m''$. Fermi mostrou que as diversas ordens do espectro correspondem simplesmente aos diversos modos possíveis de comunicação de energia da partícula chocante ao rotor, ou inversamente. A cada ordem do espectro da rede corresponde assim um estado estacionário determinado do rotor após o choque.

É, todavia, um ponto essencial que, no caso em que o rotor se encontra em um estado estacionário antes do choque, a onda incidente é ilimitada na direção do eixo. Por esta razão, os espectros da rede de diversas ordens sempre se superpõem em cada ponto do espaço de configuração. Se nós calcularmos, portanto, segundo os preceitos do Sr. de Broglie, a velocidade angular do rotor após o choque, devemos encontrar uma velocidade que não é constante. Se admitimos que a onda incidente é ilimitada na direção do eixo φ, então ela [a velocidade] o seria [inconstante] mesmo antes do choque. A maneira de ver do Sr. de Broglie não me **[282]** parece portanto compatível com a exigência do postulado da teoria dos quanta de que o rotor se encontra em um estado estacionário tanto antes do choque quanto depois.

Esta dificuldade não me parece fortuita em absoluto, e não me parece também que seja inerente ao exemplo particular do rotor; ela provém, a meu ver, diretamente da condição posta pelo Sr. de Broglie, segundo a qual, dentro do processo individual de choque, o comportamento das partículas seria completamente determinado e poderia ao mesmo tempo ser descrito completamente pela cinemática ordinária no espaço-tempo. Na teoria de Born há concordância com o postulado dos quanta, porque as diversas ondas parciais do espaço de configuração, das quais se compõe a solução geral da equação das ondas após o choque, são indicadas *separadamente* por via estatística. Mas isto não é mais possível em uma teoria que, em princípio, considera possível evitar a aplicação de noções de probabilidade aos processos de choque *individuais*.

SR. DE BROGLIE. – O problema de Fermi não é do mesmo gênero que os que acabo de tratar; ele faz intervir, com efeito, o espaço de configuração e não o espaço ordinário.

A dificuldade assinalada pelo Sr. Pauli tem seu análogo na óptica clássica. Não se pode falar de feixe difratado por uma rede em uma direção determinada, a não ser que a rede e a onda incidente sejam limitadas lateralmente, pois de outra forma todos os feixes difratados se sobreporiam e seriam afogados na onda incidente. No problema de Fermi, é preciso também supor que a onda ψ seja limitada lateralmente no espaço de configuração.

SR. LORENTZ. – A questão é saber o que uma partícula deve fazer quando ela está mergulhada dentro de duas ondas de uma vez.

SR. DE BROGLIE. – Toda a questão é saber se temos o direito de supor que a onda ψ seja limitada lateralmente no espaço de configuração. Se tivermos este direito, então a velocidade do ponto representativo do sistema terá um valor constante e corresponderá a um estado estacionário do rotor, desde que as ondas difratadas pelo eixo de φ sejam separadas do feixe incidente. **[283]**

Pode-se dizer que não é possível supor que o feixe incidente seja limitado lateralmente porque o espaço de configuração de Fermi é formado pela superposição no sentido do eixo dos φ de cilindros *idênticos* de altura 2π; em outras palavras, dois pontos do espaço de configuração situados sobre uma mesma paralela ao eixo dos φ e distantes um múltiplo inteiro de 2π representam o *mesmo* estado do sistema. A meu ver, isto prova sobretudo o caráter artificial dos espaços de configuração e em particular daquele que se obtém aqui, ao se desenrolar ao longo de uma reta a variável cilíndrica φ.

[XXIII] SR. DE DONDER. – Durante a discussão da palestra do Sr. L. de Broglie, explicamos como obtivemos nosso Princípio de Correspondência. Graças a este princípio, obtemos(*)

(*) Adoto aqui as notações de L. Rosenfeld, afim de facilitar a comparação com suas fórmulas, a serem dadas mais adiante.

$$\rho_{(e)}\,\mu^a + \Lambda^a \;=\; \sqrt{-g}\,K^2\,\frac{c}{e}\,\sum_n \frac{-h}{2i\pi}\,g^{an}\left(\psi\,\overline{\psi}_{,n} - \overline{\psi}\,\psi_{,n}\right) \;-\; 2\frac{c}{e}\,\Phi^a\,\psi\,\overline{\psi} \quad ,$$

$$\rho_{(m)}\,\mu^a\,\mu^b + \Pi^{ab} \;=\; \sqrt{-g}\,\sum_\alpha\sum_\beta \gamma^{a\alpha}\,\gamma^{b\beta}\left(\psi_{,\alpha}\,\overline{\psi}_{,\beta} + \overline{\psi}_{,\alpha}\,\psi_{,\beta}\right) \;-\; \gamma^{ab}\,L$$

$$(a,\, b,\, n = 1, ..., 4;\;\; \alpha, \beta = 0, 1, ..., 4).$$

A primeira relação representa a *corrente total* (≡ corrente eletrônica + corrente quântica) em função de ψ e dos potenciais g^{an}, Φ^a. A segunda relação representa o tensor total (≡ tensor mássico + tensor quântico) em função de ψ e dos potenciais g^{an}, Φ^a. Recordemos que se supôs que

$$L \;\equiv\; \sum_\alpha\sum_\beta \gamma^{\alpha\beta}\,\psi_{,\alpha}\,\overline{\psi}_{,\beta} \;+\; k^2\left(\mu^2 - (2\chi)^{-1}\right)\psi\,\overline{\psi} \quad ,$$

$$\gamma^{ab} \;\equiv\; g^{ab}, \qquad \gamma^{0a} \;\equiv\; -\alpha\,\Phi^a\,, \qquad \gamma^{00} \;\equiv\; \alpha^2\,\Phi^a\,\Phi_a \;-\; 1/\xi \;,$$

$$\xi\alpha^2 \;\equiv\; 2\chi \;, \qquad \chi \;\equiv\; \frac{8\pi G}{c^2} \;, \qquad G \equiv 6{,}7\cdot 10^{-8}\;\text{CGS.}$$

Já dissemos uma palavra sobre os exemplos (ou modelos) de **[284]** correspondência encontrados respectivamente por L. de Broglie e L. Rosenfeld. Para poder indicar claramente uma nova solução do problema relativo aos *fótons* que L. de Broglie acaba de propor, vou comparar as fórmulas concernentes aos dois modelos acima mencionados[*].

---

[*] L. Rosenfeld, "L'Univers à cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire", *Bull. Ac. roy. Belgique*, Cl. des Sc., outubro 1927. *Ver* sucessivamente as fórmulas (*38'), (*31), (21), (1), (8), (35), (28), (29), (*35).

Modelo de L. de Broglie	*Modelo de L. Rosenfeld*
Corrente quântica $\Lambda_a \equiv 0$.	Corrente quântica $\Lambda_a \equiv 2\,K^2 A'^2\, C_{,a}$, onde A' é o módulo de ψ e onde o potencial é $C \equiv S' - S$. A função S satisfaz a equação *clássica* de Jacobi; a função S' satisfaz a equação *modificada* de Jacobi; temos assim: $$\gamma^{\alpha\beta} S_{,\alpha} S_{,\beta} = \mu^2 - (2\chi)^{-1}$$ $$\gamma^{\alpha\beta} S'_{,\alpha} S'_{,\beta} = \mu^2 - (2\chi)^{-1} + \frac{\nabla^2 A'}{K^2 A'} .$$ O potencial quântico C produz *a diferença* entre a quantização *física* e a quantifização *geométrica*. Recordemos que $\mu \equiv m_0 c^2 / e$, onde m_0 e e são respectivamente a massa (de repouso) e a carga da partícula considerada. Supõe-se também que $$k \equiv iK \equiv i\frac{2\pi}{h}\frac{e}{c} .$$
Densidade elétrica $\rho_{(e)} \equiv 2\,K^2 A'^2\,\mu'$, onde supõe-se que $$\mu'^2 = \mu^2 + \frac{\nabla^2 A'}{K^2 A'} ,$$ o que se resume, ao conservar a carga e, a substituir no lugar da massa m_0 a *massa modificada de L. de Broglie*: $$M_0 \equiv \sqrt{m_0^2 + \frac{h^2}{4\pi^2 c^2}\frac{\nabla^2 A'}{A'}} .$$	Densidade elétrica $\rho_{(e)} \equiv 2\,K^2 A'^2\,\mu$. Aqui conserva-se, assim, tanto a massa m_0 quanto a carga e.

[285] Apliquemos respectivamente estas fórmulas ao problema do fóton indicado pelo Sr. L. de Broglie. A massa *própria* m_0 do fóton é *nula*; no modelo do Sr. L. de Broglie, esta massa deve ser substituída pela massa modificada M_0; pelo contrário, no modelo do Sr. L. Rosenfeld, utiliza-se a massa própria $m_0 \equiv 0$. Nos dois modelos, a densidade elétrica $\rho_{(e)}$ é nula. Enfim, no primeiro modelo a velocidade do fóton *deve* variar; pelo contrário, no segundo modelo, pode-se admitir que esta velocidade seja de maneira constante a da luz. Estas conclusões pleiteam evidentemente a favor do modelo de L. Rosenfeld e, conseqüentemente, também a favor da existência *física* de nossa corrente quântica Λ^a (a = 1, 2, 3, 4). Esta corrente desempenhará provavelmente um papel preponderante nos fenômenos ópticos ainda inexplicados(*).

[XXIV] SR. LORENTZ. – Tomemos um átomo de hidrogênio e formemos a função de Schrödinger. Consideramos $\psi\psi^*$ como a probabilidade da presença do elétron dentro de um elemento de volume. Sr. Born falou de todas as trajetórias na teoria clássica; tomemo-las em todas as fases possíveis, mas tomemos agora o ψ correspondente a um único valor W_n da energia, depois formemos o $\psi\psi^*$. Pode-se dizer que este produto $\psi_n\psi_n^*$ representa a probabilidade de que estes elétrons se movam com esta energia determinada W_n? Nós pensamos que o elétron não pode sair de uma certa esfera. O átomo é limitado, enquanto que ψ estende-se para o infinito. Isto é desagradável.

SR. BORN. – A idéia de que $\psi\psi^*$ representa uma densidade de probabilidade tem uma grande importância nas aplicações. Se, por exemplo, um elétron tivesse na teoria clássica duas posições de equilíbrio separadas por uma energia potencial considerável, a única situação que se poderia produzir, classicamente, para uma energia total suficientemente fraca, seria uma oscilação em torno de uma das **[285]** duas posições de equilíbrio. Mas, segundo a mecânica dos quanta, cada função característica se estende de um domínio para outro; por esta razão, existe sempre uma probabilidade de que uma partícula que vibra inicialmente na vizinhança de uma das posições de equilíbrio salte para a outra. Hund fez aplicações importantes disto à estrutura molecular. Este fenômeno provavelmente desempenha um papel também na explicação da condução metálica.

SR. DE BROGLIE. – Na antiga teoria do movimento de um elétron em um átomo de hidrogênio, o elétron de energia total

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e^2}{r}$$

não pode sair da esfera de raio

$$R = -\frac{e^2}{W - m_0 c}$$

porque o valor do termo $m_0 c^2 \big/ \sqrt{1-\beta^2}$ tem como limite inferior $m_0 c^2$.

(*) SR. L. BRILLOUIN me chamou atenção, sobre este assunto, aos experimentos do SR. F. WOLFERS: *Sur un nouveaus phénomène en optique; interférences par diffusion* (*Le Journal de Physique et le Radium*, série VI, tomo 6, n° 11, novembro 1925, p. 354-368.)

Em minha concepção, é preciso tomar como expressão da energia

$$W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{e^2}{r} \quad ,$$

onde M_0 é a massa própria variável, a qual já defini. O cálculo mostra que a massa própria M_0 diminui quando r aumenta, de tal forma que o elétron de energia W não está mais forçado a se encontrar no interior da esfera de raio R.

SR. BORN. – Contrariamente à opinião do Sr. Schrödinger, segundo a qual é sem sentido falar da situação e do movimento do elétron dentro do átomo, o Sr. Bohr e eu somos da opinião de que esta maneira de falar sempre tem um sentido, quando se pode indicar um experimento que permita medir as coordenadas e as velocidades com uma certa aproximação.

SR. PAULI. – É possível sim determinar a situação do elétron no exterior da esfera, mas sem modificar sua energia a ponto de que se produza uma ionização no átomo. **[287]**

SR. LORENTZ. – Gostaria de fazer um comentário a respeito dos pacotes de ondas.

Quando o Sr. Schrödinger chamou atenção para a analogia entre a mecânica e a óptica, ele sugeriu a idéia de passar da mecânica geométrica à mecânica ondulatória fazendo uma modificação análoga à que é feita na passagem da óptica corpuscular para a óptica ondulatória. O pacote de ondas dá ao elétron uma imagem bastante surpreendente, mas dentro do átomo o elétron devia estar inteiramente fundido, o pacote tendo as dimensões do átomo. Quando as dimensões do pacote de ondas se tornassem comparáveis àquelas das trajetórias da teoria clássica, o ponto material começaria a se fundir; passado este estágio, o elétron estaria completamente fundido.

A dificuldade matemática de construir pacotes de ondas no átomo provém do fato que não se tem à disposição comprimentos de onda suficientemente pequenos nem suficientemente vizinhos. As freqüências das ondas estáveis no átomo (Eigenwerte) são separadas mais ou menos umas das outras; não se podem ter freqüências muito vizinhas correspondendo a estados muito pouco diferentes, porque as condições no infinito não seriam satisfeitas. Para fazer um pacote, é preciso superpor ondas de comprimentos pouco diferentes; ora, só tem-se à disposição funções características ψ_n, que são nitidamente diferentes umas das outras. Dentro dos átomos, portanto, não pode haver pacotes de ondas. Mas há também uma dificuldade para os elétrons livres, pois na realidade um pacote de ondas não conserva, em geral, sua forma de maneira durável. Pacotes de ondas limitados não parecem poder se conservar; produz-se uma difusão. A imagem do elétron dada por um pacote de ondas não é portanto satisfatória, salvo talvez por um intervalo de tempo bastante curto.

O que o Sr. Bohr [seria Born?] faz é o seguinte: após uma observação, ele limita de novo o pacote de ondas de maneira a fazê-lo representar aquilo que a observação nos ensinou sobre a posição e o movimento do elétron; então começa um novo período durante o qual o pacote se difunde novamente, até o momento em que uma nova observação nos permite operar de novo a redução. Mas eu gostaria de ter uma imagem de tudo isso durante um tempo ilimitado. **[288]**

SR. SCHRÖDINGER. – Não vejo dificuldade alguma no fato de que nas órbitas de número quântico pequeno certamente não se pode construir pacotes de ondas que se movam da maneira dos elétrons pontuais da mecânica antiga.

O fato de que isso é impossível é precisamente o ponto que chama atenção na concepção da mecânica ondulatória, a base da impotência absoluta da antiga mecânica no domínio das dimensões atômicas. A representação original era a seguinte, que aquilo que se move não é na realidade um ponto, mas um domínio de excitação de dimensões finitas, e particularmente pelo menos da ordem de grandeza de alguns comprimentos de onda. Quando semelhante domínio de excitação se propaga ao longo de uma trajetória na qual as dimensões e os raios de curvatura são grandes em comparação às dimensões do próprio domínio, pode-se abstrair os detalhes de sua estrutura para considerar apenas sua progressão ao longo da trajetória. Esta progressão tem lugar seguindo-se exatamente as leis da mecânica antiga. Mas se a trajetória se estreitar até tornar-se da ordem de grandeza de alguns comprimentos de onda, como é o caso para as órbitas de pequeno número quântico, todos seus pontos se encontram continuamente no interior do domínio de excitação e não se pode mais falar, de maneira razoável, da propagação de uma excitação ao longo da trajetória, o que faz com que a mecânica antiga perca toda significância.

Eis a idéia primitiva. Depois descobriu-se que a identificação ingênua de um elétron que se move sobre uma órbita macroscópica com um pacote de onda vai de encontro a dificuldades e não pode portanto ser aceita ao pé da letra. A dificuldade principal é a de que o pacote de onda se espalha certamente para todos os lados quando encontra um obstáculo, por exemplo um átomo. Sabemos hoje, com os experimentos de interferência de raios catódicos de Davisson e Germer, que esta é uma parte da verdade, enquanto que por outro lado os experimentos de nuvem de Wilson mostraram que deve haver qualquer coisa que continua a descrever uma trajetória bem definida após o encontro do obstáculo. O compromisso proposto por diferentes lados, que consiste em admitir uma associação de ondas e de elétrons pontuais, eu tomo como simplesmente uma forma provisória de resolver a dificuldade. **[289]**

SR. BORN. – Também na teoria clássica a precisão com a qual a situação futura de uma partícula pode ser prevista depende da precisão da medição da situação inicial. Não é portanto por isto que a maneira de descrever da mecânica dos quanta, por meio de pacotes de ondas, distingue-se da mecânica clássica. Ela se distingue desta porque as leis de propagação dos pacotes são um pouco diferentes nos dois casos.*

---

* **Divisão esquemática do texto:**

I. Lorentz discute a possibilidade de se manter o determinismo (pp. 248-50).
II. Brillouin e De Donder comentam a apresentação de Bohr (250).
III. Born explica a redução do pacote de ondas (250-1).
IV. Born dá um exemplo do tratamento polidimensional (251-3).
V. Einstein aponta um exemplo de ação à distância (253-6).
VI. Einstein critica a representação polidimensional (256).
VII. Lorentz e Pauli discutem a representação polidimensional (256-7).
VIII. Pauli dá um exemplo de interação atômica (257-8).
IX. Dirac comenta a representação polidimensional (258-9).
X. Dirac explora a teoria das matrizes (259-261).
XI. Dirac, indeterminismo e os números quânticos (261-2).
XII. Dirac e as escolhas da natureza (262-3).
XIII. Born e Kramers comentam a axiomatização e a teoria de matrizes (263-5).
XIV. Heisenberg comenta sobre as escolhas do observador (264-5).
XV. Lorentz e o indeterminismo como princípio (265).
XVI. Kramers e outros inquirem o modelo de um fóton de de Broglie (265-7).
XVII. De Donder e um princípio de correspondência generalizado (267-8).
XVIII. Langevin e outros debatem as novas estatísticas em geral (268-70).
XIX. Heisenberg e outros revisam os experimentos espectroscópicos (271-4).
XX. Langmuir, Ehrenfest, Pauli, Dirac etc. comparam fótons e elétrons (274-7).
XXI. Lorentz e de Broglie discutem a natureza do fóton (277-80).
XXII. Pauli examina o rotor para criticar de Broglie (280-3).
XXIII. De Donder compara as teorias de Rosenfeld e de Broglie (283-5).
XXIV. Lorentz, Born, Schrödinger etc. interpretam o pacote de onda (285-9)

LEITURAS:
A. Redução do pacote de ondas: III, V, VI, XII, XIV, XXIV.
B. Indeterminismo: I, II, XI, XV.
C. Representação polidimensional: III, VI, VII, IX. (IV opcional.)
D. Modelo de Louis de Broglie: XVI, XXII.
E. Comparação da natureza do fóton e do elétron: XX, XXI.
F. Estatísticas quânticas: VI, XVIII, XIX.