

Controle por Modos Deslizantes de Posição do Servomecanismo

Objetivos

O objetivo desta experiência consiste em projetar um controlador por modos deslizantes para o sistema de posição do servomecanismo.

Introdução

Controle por modos deslizantes é uma técnica de controle não-linear, de estrutura variável que, por meio de um sinal de controle descontínuo, força o sistema a deslizar sobre uma superfície do espaço de estados, até atingir a origem.

A ordem da superfície deslizante é uma a menos do que a ordem do sistema a ser controlado. No caso de sistemas de ordem 2, a superfície é, na verdade, uma linha.

O controle por modos deslizantes garante que essa superfície seja um conjunto positivamente invariante. Além disso, os estados na superfície deslizam para a origem.

O controle por modos deslizantes também precisa fazer com que os estados converjam para a superfície deslizante, para então deslizarem até a origem, como ilustrado na Figura 1.

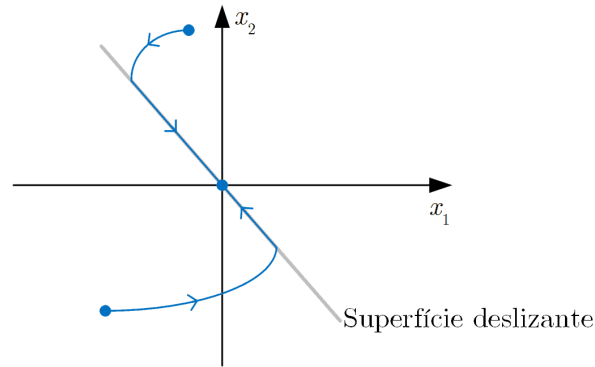


Figura 1: Superfície deslizante e exemplos de trajetórias.

Seja $y(t)$ a saída do sistema a ser controlado e $r(t)$ o sinal de referência. O erro de rastreamento é definido como $e(t) = y(t) - r(t)$. Seja também p o operador derivada, tal que $px(t) = \dot{x}(t)$.

Para criar a superfície de escorregamento, considere, por exemplo, um sistema de ordem 2, tal que:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = f(x_1, x_2) + b(x_1, x_2)u \end{cases} \quad (1)$$

com $y(t) = x_1(t)$.

Seja $s(t)$ uma função indicadora, tal que se $s(t) = 0$, a trajetória está sobre a superfície de deslizamento, se $s(t) < 0$, a trajetória está de um lado (e.x. à esquerda) da superfície, e se $s(t) > 0$, a trajetória está do outro lado (e.x. à direita) da superfície.

A função $s(t)$ é definida como:

$$s(t) = (p + \lambda)^{n-1}e(t), \quad (2)$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ e n é a ordem do sistema. Para um sistema de ordem 2, tem-se:

$$s(t) = (p + \lambda)e(t) \Rightarrow s(t) = \dot{e}(t) + \lambda e(t), \quad (3)$$

Uma vez na superfície de escorregamento, tem-se que $s(t) = 0$ e, portanto,

$$\dot{e}(t) = -\lambda e(t) \Rightarrow e(t) = e(0)\exp(-\lambda t). \quad (4)$$

Assim, o erro desliza exponencialmente para zero com uma taxa λ .

Como $s = \dot{e} + \lambda e$, na superfície deslizante, tem-se

$$(\dot{x}_1 - \dot{r}) + \lambda(x_1 - r) = 0 \Rightarrow x_2 - \dot{r} + \lambda(x_1 - r) = 0. \quad (5)$$

Ao considerar, por exemplo, que $r = 0$ e $\lambda = 1$, tem-se que a superfície deslizante é a reta

$$x_1 = -x_2. \quad (6)$$

O projeto do controlador é feito definindo-se a seguinte função de Lyapunov:

$$V(s) = \frac{s^2}{2}, \quad (7)$$

tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) = s\dot{s} &= s(\underbrace{\dot{x}_2 - \ddot{r}}_{\dot{e}} + \lambda\dot{e}) \\ &= s(f + bu - \ddot{r} + \lambda(x_2 - \dot{r})). \end{aligned} \quad (8)$$

Para garantir $\dot{V}(s) < 0$, pode-se fazer

$$u = \frac{1}{b} [(-f + \ddot{r} - \lambda\dot{e}) + v], \quad (9)$$

o que resulta em

$$\dot{V}(s) = s v. \quad (10)$$

Teoricamente, se $v = -k s$, então $\dot{V}(s) = -k s^2$. Isso funcionaria se o modelo representasse perfeitamente o sistema, ou seja sem erros de modelagem, o que na prática não se pode garantir. A solução mais robusta consiste em adotar:

$$v = -k \operatorname{sign}(s), \quad (11)$$

tal que

$$\dot{V}(s) = -k s \operatorname{sign}(s) = -k |s|. \quad (12)$$

Se, por exemplo, a incerteza do modelo estiver no parâmetro f , considera-se um valor nominal $\hat{f}$, tal que $|\hat{f} - f| \leq F$, sendo F um limitante superior do erro de modelagem. Com a lei de controle

$$u = \frac{1}{b} \left[(-\hat{f} + \ddot{r} - \lambda\dot{e}) - k \operatorname{sign}(s) \right], \quad (13)$$

verifica-se que:

$$\dot{V}(s) = s(f - \hat{f}) - k |s|. \quad (14)$$

Ao escolher $k = F + \eta$, então,

$$\dot{V}(s) \leq -\eta |s|. \quad (15)$$

Se, por outro lado, a incerteza estiver no parâmetro b , mas com sinal de b conhecido, como por exemplo $0 < b_{\min} \leq b \leq b_{\max}$, é natural escolher

$$\hat{b} = (b_{\min} b_{\max})^{1/2}. \quad (16)$$

Com isso,

$$b\beta^{-1} \leq \hat{b} \leq b\beta, \quad (17)$$

em que

$$\beta = (b_{\max}/b_{\min})^{1/2}. \quad (18)$$

Com a lei de controle

$$u = \frac{1}{\hat{b}} \left[\underbrace{(-f + \ddot{r} - \lambda \dot{e})}_{\dot{u}} - k \text{sign}(s) \right], \quad (19)$$

tem-se que

$$\dot{V}(s) = s \left[\left(1 - \frac{b}{\hat{b}}\right) (f - \ddot{r} + \lambda \dot{e}) - \frac{b}{\hat{b}} k \text{sign}(s) \right]. \quad (20)$$

Para garantir a condição de deslizamento, então

$$k \geq \left| (\hat{b}b^{-1} - 1)(f - \ddot{r} + \lambda \dot{e}) \right| + \eta \hat{b}b^{-1}, \quad (21)$$

ou, em termos de β ,

$$k \geq \eta\beta + (\beta - 1) |\hat{u}|. \quad (22)$$

Por fim, com incerteza nos parâmetros f e b , para satisfazer a condição de escorregamento, tem-se

$$k \geq \beta(\eta + F) + (\beta - 1) |\hat{u}|. \quad (23)$$

O Servomecanismo

O servomecanismo considerado é apresentado na Figura 2. Há um motor DC com um sensor de velocidade tipo tacogerador acoplado ao mesmo eixo. Há dois estágios de polias com correias, cada um com redução $n = 1/3$, que acopla o eixo do motor ao eixo do potenciômetro. Na configuração controle de velocidade, utiliza-se o eixo do motor/tacogerador. para o controle de posição, utiliza-se o eixo do potenciômetro, onde há também um disco com posição graduada para indicar a posição.

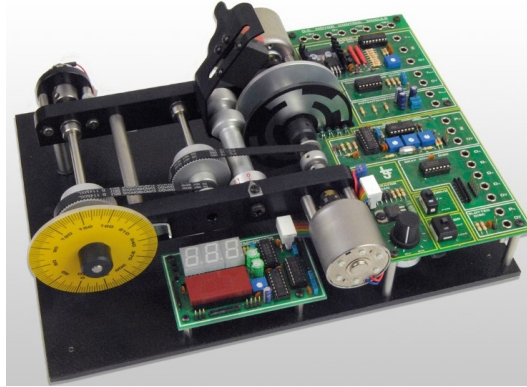


Figura 2: Foto do servomecanismo.

A tensão de armadura é representado por V_M . As tensões nas saídas do tacogerador e do potenciômetro são, respectivamente, representadas por V_T e V_P . A velocidade no eixo do motor é dada por Ω_M , enquanto que a velocidade e a posição no eixo do potenciômetro são dadas por Ω_P e Θ_P . Assume-se que a relação entre tensão de armadura e velocidade no eixo de motor seja um sistema de primeira ordem com ganho K e constante de tempo T . Os ganhos do tacogerador e do potenciômetro são dados por K_T [V/(rad/s)] e K_P [V/rad]. O diagrama linear simplificado do sistema é apresentado na Figura 3.

Os valores dos ganhos dos sensores são: $K_P = 1,7$ e $K_T = 0,017$. Após um simples teste de resposta ao degrau, foi possível identificar os seguintes parâmetros do modelo: $K = 56,2824$ [(rad/s)/V] e $T = 0.2770$ [s].

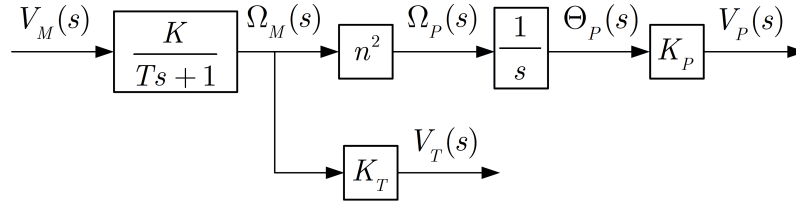


Figura 3: Modelo esquemático do sistema.

Escrevendo o modelo do servomecanismo na forma da Equação (1), tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = (-1/T)x_2 + (Kn^2/T)u \end{cases} \quad (24)$$

Atividades

Projete um controlador por modos deslizantes para o controle de posição do servomecanismo. Assuma que a imprecisão no modelo esteja no parâmetro b , cujo valor nominal é Kn^2/T . Considere que $K \in [50; 60]$. Teste o sistema em malha fechada para entradas do tipo degrau filtrado (filtre com $1/(1/10s + 1)$). Considere também distúrbios externos (freio magnético). Considere que o sinal de velocidade do servo não está disponível para realimentação.

Note que a lei de controle necessita de algumas derivadas: primeira e segunda derivadas do sinal de referência, primeira derivada da saída de posição e primeira derivada do erro. Como sugestão, aproxime a derivada pela função de transferência $s/(1/10s + 1)$.

Considere a lei de controle da Equação (13) e assuma k suficientemente grande para que a condição de escorregamento seja satisfeita. No entanto, devido ao chaveamento finito, a trajetória do sistema sobre a superfície de deslizamento oscila, produzindo um fenômeno denominado trepidação (*chattering*). Uma forma de minimizar o *chattering* consiste em substituir $\text{sign}(s)$ por $s/(|s| + \epsilon)$.

Referências

- [1] V. Utkin, J. Guldner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. CRC Pres, Boca Raton, USA, 2 edition, 2009.
- [2] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA, 1991.