

Controle de Posição do Servomecanismo por Alocação de Polos - Tempo Contínuo

Objetivos

O objetivo desta experiência é, utilizando o enfoque de espaço de estados, projetar e implementar um controlador para a malha de posição do servomecanismo. A realimentação de estados será feita medindo-se diretamente os estados.

Introdução

Considere um sistema SISO linear e invariante no tempo. O mesmo pode ser representado da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}\tag{1}$$

onde,

$\mathbf{x}$ = vetor de estado (vetor n);

u = sinal de controle (escalar);

y = sinal de saída (escalar);

$\mathbf{A}$ = matriz $n \times n$ denominada matriz de estados;

$\mathbf{B}$ = matriz $n \times 1$ denominada matriz de entrada;

$\mathbf{C}$ = matriz $1 \times n$ denominada matriz de saída;

$\mathbf{D}$ = matriz 1×1 denominada matriz de transmissão direta.

Os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ representam os polos do sistema.

Controlabilidade e Observabilidade

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade possuem um papel importante no projeto de sistemas de controle no espaço de estados.

- **Controlabilidade:** um sistema será dito controlável no instante t_0 se existir uma entrada de controle capaz de transferir o sistema de qualquer estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ para qualquer outro estado, em um intervalo de tempo finito.

Considere o sistema descrito pela seguinte equação de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,\tag{2}$$

Tal sistema será dito de estado controlável em $t = t_0$ se houver um sinal de controle que transfira o sistema de um estado inicial para qualquer estado final, em um intervalo de tempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Se

todo estado for controlável, então o sistema será considerado **completamente controlável**. Para o sistema ser completamente controlável, a matriz

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}], \quad (3)$$

deve possuir posto (*rank*) n , ou seja, se as colunas de $\mathbf{C}$ forem linearmente independentes. Tal matriz é denominada **matriz de controlabilidade**.

O Servomecanismo

O servomecanismo considerado é apresentado na Figura 1. Há um motor DC com um sensor de velocidade tipo tacogerador acoplado ao mesmo eixo. Há dois estágios de polias com correias, cada um com redução $n = 1/3$, que acopla o eixo do motor ao eixo do potenciômetro. Na configuração controle de velocidade, utiliza-se o eixo do motor/tacogerador. para o controle de posição, utiliza-se o eixo do potenciômetro, onde há também um disco com posição graduada para indicar a posição.

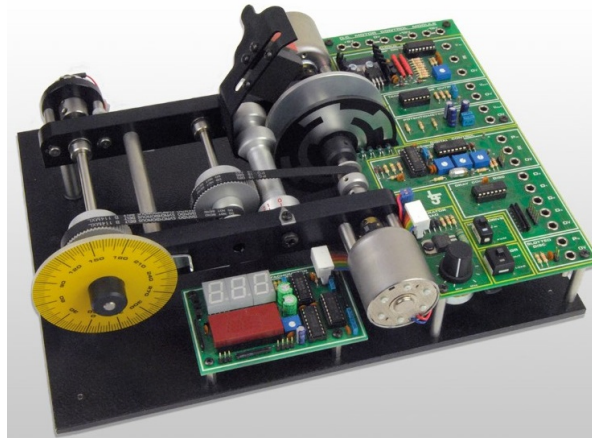


Figura 1: Foto do servomecanismo.

A tensão de armadura é representado por V_M . As tensões nas saídas do tacogerador e do potenciômetro são, respectivamente, representadas por V_T e V_P . A velocidade no eixo do motor é dada por Ω_M , enquanto que a velocidade e a posição no eixo do potenciômetro são dadas por Ω_P e Θ_P . Assume-se que a relação entre tensão de armadura e velocidade no eixo de motor seja um sistema de primeira ordem com ganho K e constante de tempo T . Os ganhos do tacogerador e do potenciômetro são dados por K_T [V/(rad/s)] e K_P [V/rad]. O diagrama linear simplificado do sistema é apresentado na Figura 2.

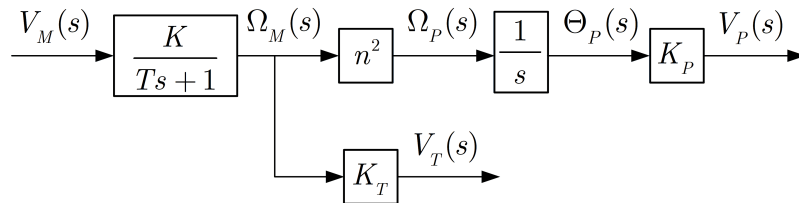


Figura 2: Modelo esquemático do sistema.

Sabe-se, do manual do equipamento, que os valores dos ganhos dos sensores são: $K_P = 1,7$ e $K_T = 0,017$. Após um simples teste de resposta ao degrau em um dos servomecanismos do laboratório, conforme apresentado na Figura 3, foi possível identificar os seguintes parâmetros do modelo: $K = 55,8$ [(rad/s)/V] e $T = 0,29$ [s].

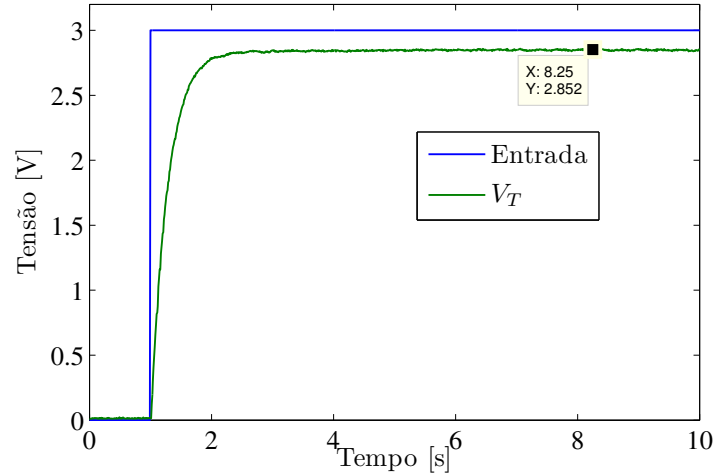


Figura 3: Resposta ao degrau.

Realimentação de Estados

Considere o sistema representado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad (4)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (5)$$

Ao invés de realimentar a saída, que tal utilizar a realimentação das variáveis de estado?

Se o sistema for controlável, é possível determinar uma matriz de ganhos $\mathbf{K}$ ($r \times n$) de realimentação de estados, tal que a lei de controle $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ garanta alocação arbitrária dos polos do sistema em malha fechada. O sistema em malha fechada é descrito como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t). \quad (6)$$

A Figura 4 ilustra a representação em espaço de estados em malha fechada. A equação característica do sistema descrito em (6) é dada por

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0, \quad (7)$$

em que a posição desejada dos polos de malha fechada é conhecida, tal que

$$p_c(s) = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdots (s - p_n), \quad (8)$$

então, o vetor $\mathbf{K}$ pode ser obtido como

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdots (s - p_n). \quad (9)$$

Em outras palavras, a realimentação de estados resulta em um sistema em malha fechada descrito por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})}_{\mathbf{A}_{MF}} \mathbf{x}(t), \quad (10)$$

em que os polos são os autovalores da matriz de estado em malha fechada $\mathbf{A}_{MF}$. Se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ for completamente controlável, então existe $\mathbf{K}$, tal que $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = p_c(s)$ para qualquer polinômio $p_c(s)$ de grau n especificado.

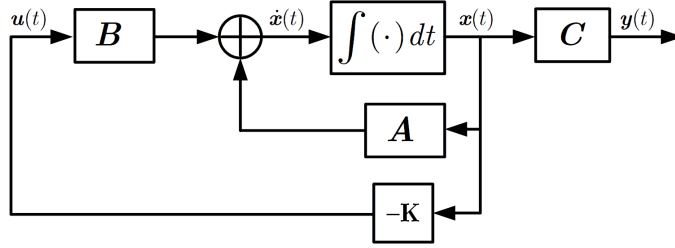


Figura 4: Diagrama do sistema com realimentação de estados.

No MATLAB[®], para sistemas SISO, o comando `acker` pode ser utilizado para encontrar a matriz de realimentação de estados através da fórmula de Ackerman, com a seguinte sintaxe $K = \text{acker}(A, B, p_c)$. Apresenta resultado satisfatório para sistemas de ordem menor ou igual a 10. É capaz de alocar polos com multiplicidade. Não se aplica a sistemas MIMO.

Por outro lado, o comando `place` pode ser utilizado satisfatoriamente para sistemas MIMO, como a mesma sintaxe do comando `acker`. No entanto, não é capaz de alocar polos com multiplicidade maior do que o posto de B .

Realimentação de estados com integrador - modelo servo

O problema de rastreamento também pode ser resolvido com a inserção de integradores na malha. Uma forma de inserir integradores consiste em introduzir um novo vetor de estados que integre o erro entre o vetor de saída y e o vetor de comando de entrada r , ambos com m elementos, como apresentado no diagrama da Figura 5.

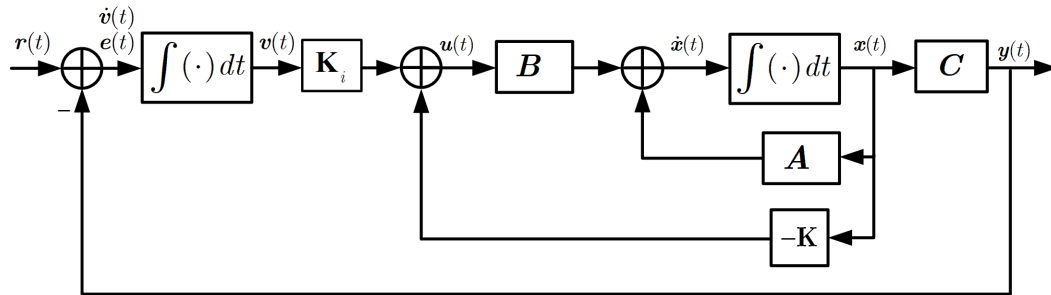


Figura 5: Diagrama de blocos de um sistema em malha fechada com inserção de integradores e realimentação de estados.

A equação de estados do integrador inserido é dada por

$$\dot{v}(t) = e(t) = r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t), \quad (11)$$

o que resulta na seguinte equação de estados em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK_i v(t). \quad (12)$$

Tem-se, portanto, a seguinte equação para o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_i \\ -C & 0_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{k \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \cdot r(t), \quad (13)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0_{k \times m} \\ -C & 0_m \end{bmatrix}}_{\hat{A}} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0_m \end{bmatrix}}_{\hat{B}} \cdot \underbrace{[K \quad -K_i]}_{\hat{K}} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{k \times m} \\ I_m \end{bmatrix} r(t). \quad (14)$$

Assim, basta determinar o ganho $\hat{\mathbf{K}}$ que aloca os polos para o sistema aumentado da Equação (14).

Portanto, $\mathbf{K}$, representa as n primeiras colunas de $\hat{\mathbf{K}}$ e $\mathbf{K}_i$ é dado pelas colunas restantes de $\hat{\mathbf{K}}$ com sinal trocado.

Atividades

Projetar controladores na forma de espaço de estados no modo regulatório e no modo servo.

Obtenção do modelo em espaço de estados

Os estados do sistema são dados pela posição angular no eixo do potenciômetro θ_p e a velocidade angular no eixo do potenciômetro ω_p .

O modelo linear do servomecanismo em função de transferência é dado por:

$$G(s) = \frac{KK_p n^2}{s(Ts + 1)} = \frac{\Theta_p(s)}{V_m(s)}.$$

No domínio do tempo, tem-se:

$$T\ddot{\theta}_p(t) + \dot{\theta}_p(t) = KK_p n^2 V_m(t) \Rightarrow \ddot{\theta}_p(t) = -\frac{1}{T}\dot{\theta}_p(t) + \frac{KK_p n^2}{T}V_m(t).$$

Define-se $x_1 = \theta_p$ e $x_2 = \dot{\theta}_p = \omega_p$. Assim,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{KK_p n^2}{T} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} V_m \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Prática

No modo regulatório, o diagrama do experimento é apresentado na Figura 6.

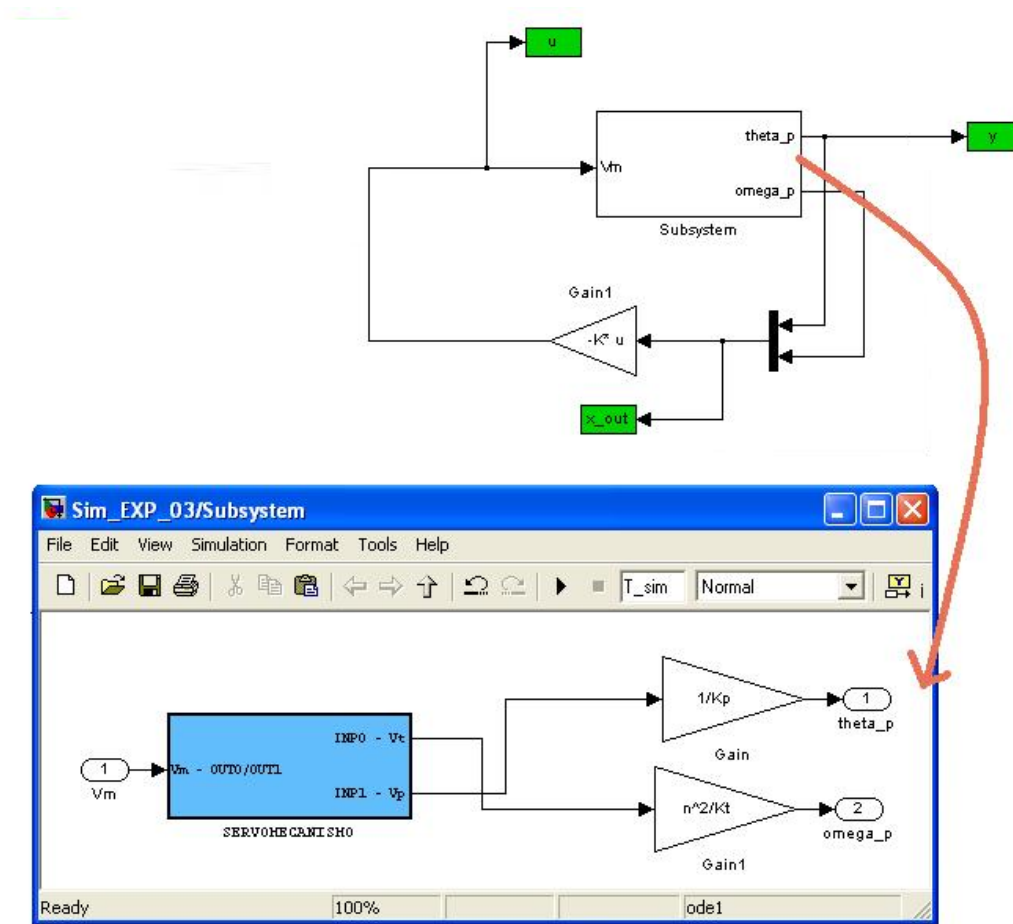


Figura 6: Diagrama de blocos do experimento no Simulink - modo regulatório.

Projete o controlador com a seguinte especificação para os polos em malha fechada: $\omega_n = 10$ e $\zeta = 0.707$. Teste a regulação com diferentes posições iniciais. Apresente em um gráfico os estados (posição e velocidade angulares) e em outro o esforço de controle, para cada condição inicial testada.

No modo servo com integrador, o diagrama do experimento é apresentado na Figura 7.

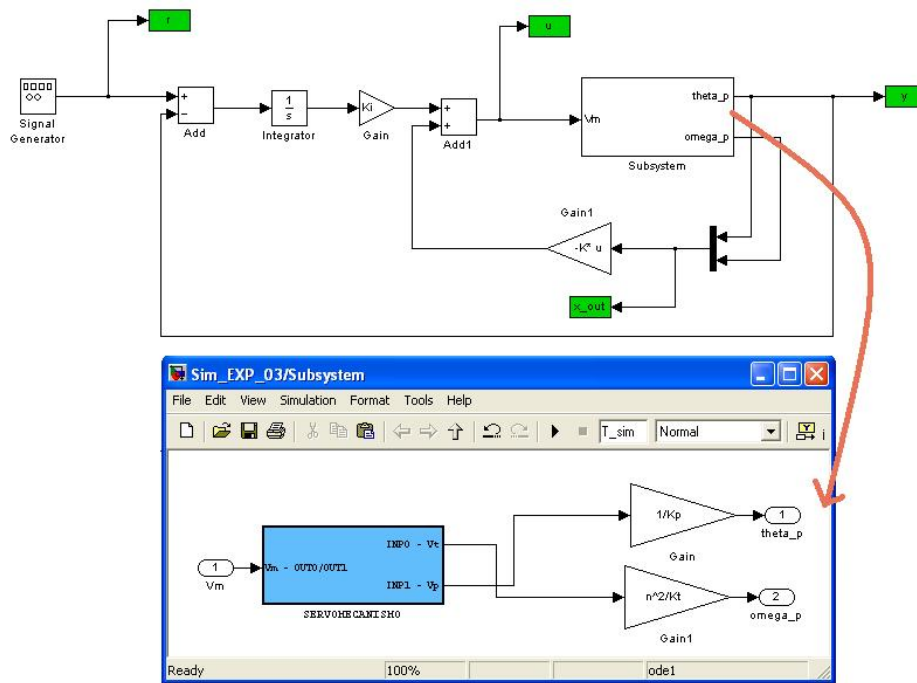


Figura 7: Diagrama de blocos do experimento no Simulink - modo servo com integrador.

Projete o controlador com a seguinte especificação para os polos em malha fechada: $\omega_n = 10$ e $\zeta = 0.707$. Verifique uma boa posição para o polo em malha fechada adicional devido ao integrador (sugestão inicial: $s = -10$). Como referência, considere uma onda quadrada com amplitude $\pi/2$ e frequência fundamental igual a $1/20$ Hz.