

UM PROBLEMA GERADOR DE NOVO CONTEÚDO

Lourdes de la Rosa Onuchic¹

Problemas em matemática têm ocupado um lugar central no currículo de matemática escolar desde a antiguidade. Até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma técnica operatória específica. Não é assim que, na maioria das escolas, ainda hoje, se trabalha resolução de problemas? Como uma das grandes dificuldades dos alunos em matemática é saber resolver problemas, acreditamos que devemos mudar e buscar novos caminhos para trabalhar a matemática em sala de aula.

A importância dada ao trabalho de resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia mais atenção. A caracterização de educação matemática, em termos de resolução de problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade, na resolução de problemas, como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade.

Schroeder e Lester (1989, p 31-34) apresentam três modos diferentes de abordar resolução de problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas:

- O professor que ensina sobre resolução de problemas procura ressaltar o modelo de resolução de problemas de Polya ou alguma variação dele. Este modelo descreve um conjunto de quatro fases

interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos: compreender o problema, criar um plano, levar avante esse plano e olhar de volta o problema original.

- Ao ensinar a resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la. Em consequência disso, dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas.

- Acabando a década de 80, com muitas recomendações de ação, passou-se a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Começa-se a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. A resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento.

Ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para fazer isso. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas aos problemas. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da téc-

¹ Professora Colaboradora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP-Rio Claro/SP; docente aposentada do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP-São Carlos/SP.

nica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos).

Em nossa visão, a compreensão de matemática, por parte dos alunos, envolve a idéia de que entender é essencialmente relacionar. As indicações de que um aluno entende, interpreta mal ou não entende idéias matemáticas específicas surgem freqüentemente quando ele está resolvendo um problema. É importante notar que compreender deve ser o principal objetivo do ensino, apoiados na crença de que o aprendizado de matemática, pelos alunos, é mais forte quando auto-gerado do que quando lhes é imposto.

Venho trabalhando há vários anos com professores do Ensino Fundamental e Médio. Minha linha de pesquisa é a do “ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas”

Nos cursos dados, em geral, começo o trabalho do tópico matemático pretendido reunindo os alunos em grupos e entregando uma atividade. Enquanto trabalham, observo o comportamento dos grupos e de seus participantes ao sentir como leram o problema, como interpretaram seu enunciado, como está transcorrendo sua exploração na busca de caminhos que os levem à solução. Num segundo momento, passo a ouvir os questionamentos dos grupos, procurando sempre respondê-los com outros questionamentos. Considero esse trabalho, por parte do professor, um bom meio de avaliar os grupos e seus participantes individualmente.

Em vários desses encontros com professores apresentei o seguinte problema:

A letra **E**, na figura ao lado, é formada por dez unidades quadradas. Corte essa figura em quatro partes que possam ser rearranjadas formando um quadrado.

Esse problema se encontra no “Calendário de Fevereiro”, da revista “Professor de Matemática”, de fevereiro de 2000, página 124 – problema 13, do Conselho Nacional de Professores de Matemática, dos Estados Unidos. (“February Calendar” in “Mathematics Teacher” - NCTM - National Council of Teachers of Mathematics, Vol. 93, 2000).

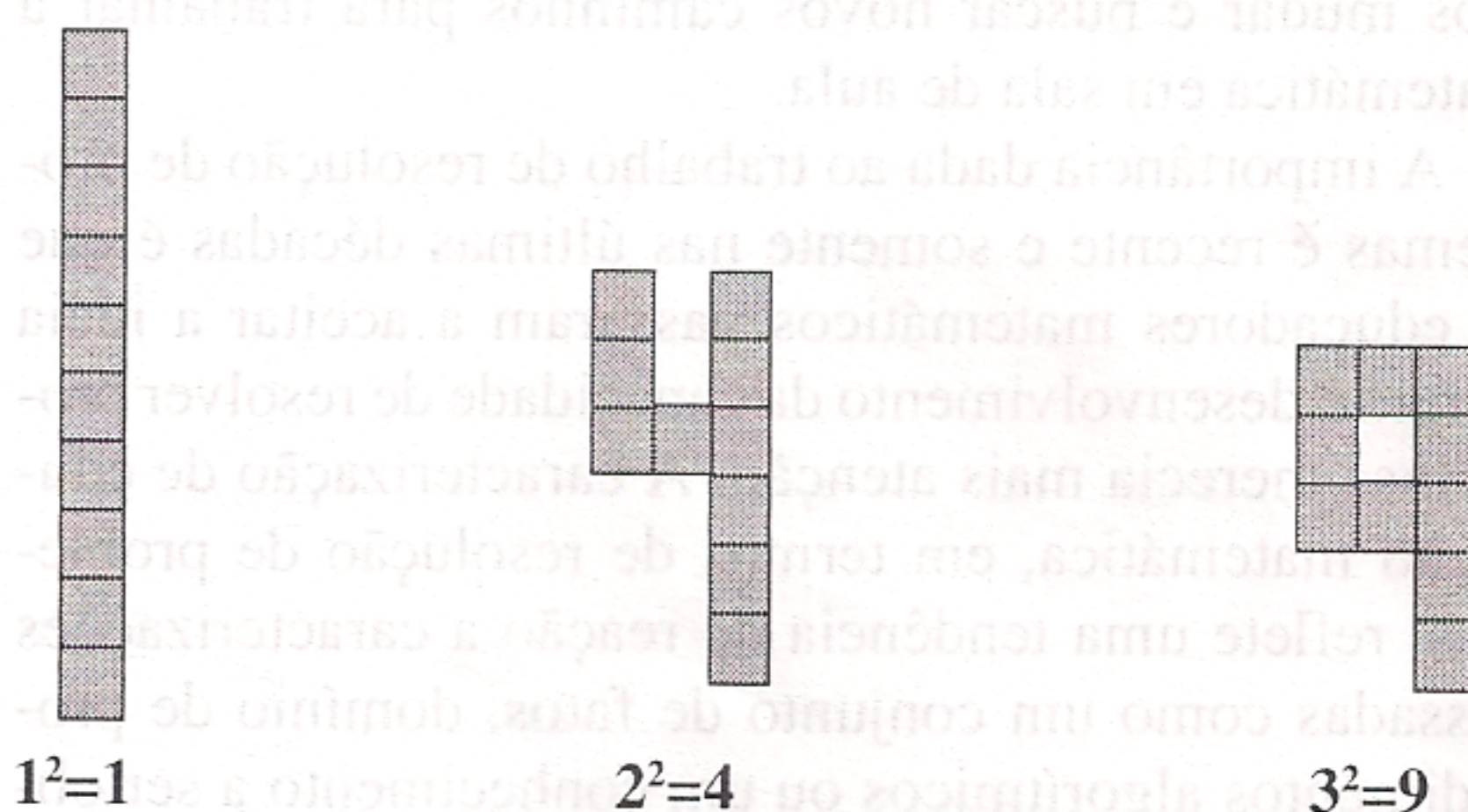
O NCTM tem pedido aos professores que criem um ambiente onde os estudantes se tornem resolvidores de problemas. Este objetivo instrucional não é novo mas é aquele que continua a desafiar todos os professores de matemática.

A revista, em sua seção de respostas, mostra, com um desenho, apenas uma solução do problema.

Nosso objetivo ao apresentar esse problema é o de mostrar que ele não tem solução se considerarmos, como medida do lado do quadrado que se quer construir, números racionais e que, para chegar à solução, devemos ampliar o conjunto dos números conhecidos, isto é, devemos introduzir o conjunto dos números irracionais e, daí, chegar aos reais.

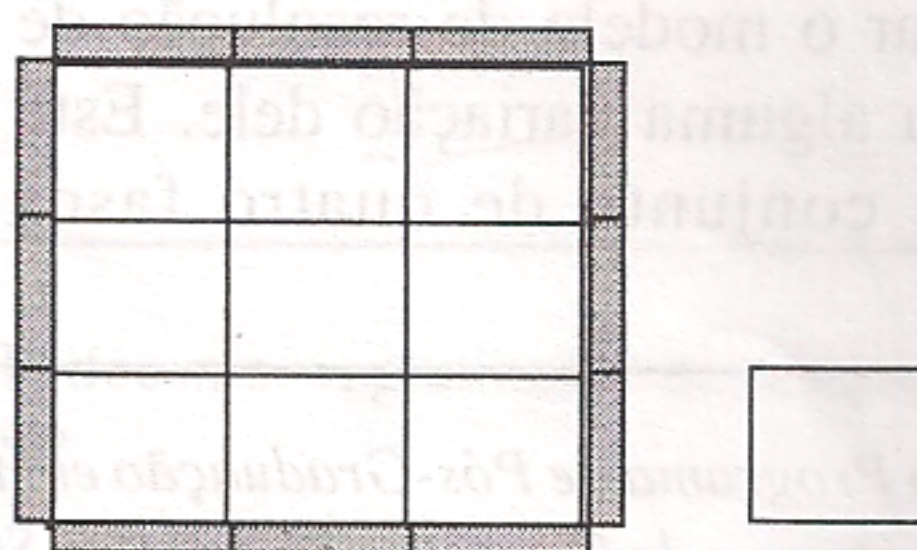
Ao trabalhar esse problema em sala de aula, o que encontramos com freqüência são tentativas de usar os dez quadrados de área unitária (u^2) que formam a área de **E** para formar um quadrado de mesma área. Como não conseguem, pois só podem fazer quadrados de área u^2 , $4u^2$ e $9u^2$, dizem que o problema não tem solução, visto que o maior quadrado que conseguem montar é o de lado $3u$ e, portanto, de área $9u^2$, diferente da área de **E**.

Durante a observação do trabalho dos alunos nos grupos, pudemos observar que alguns alunos enveredavam por outro caminho. Estes queriam compor, com os dez quadrados de área unitária, figuras que representassem numerais de números quadrados perfeitos, fazendo:



sem perceberem que o problema não pedia para construir números quadrados perfeitos mas, sim, para construir um quadrado que tivesse a mesma área de **E**. Também não se preocupavam com o dado do problema que pedia que o **E** fosse dividido em quatro partes.

Para alguns, este problema foi visto como um “quebra-cabeças”, onde a preocupação era a de encontrar uma possível montagem que pudesse levar à construção de um quadrado de área igual à área de **E**.



Alguns alunos sugeriram que se cortasse o “quadrado” em “fatias finas” e se fosse aumentando o quadrado 3×3 com essas fatias.

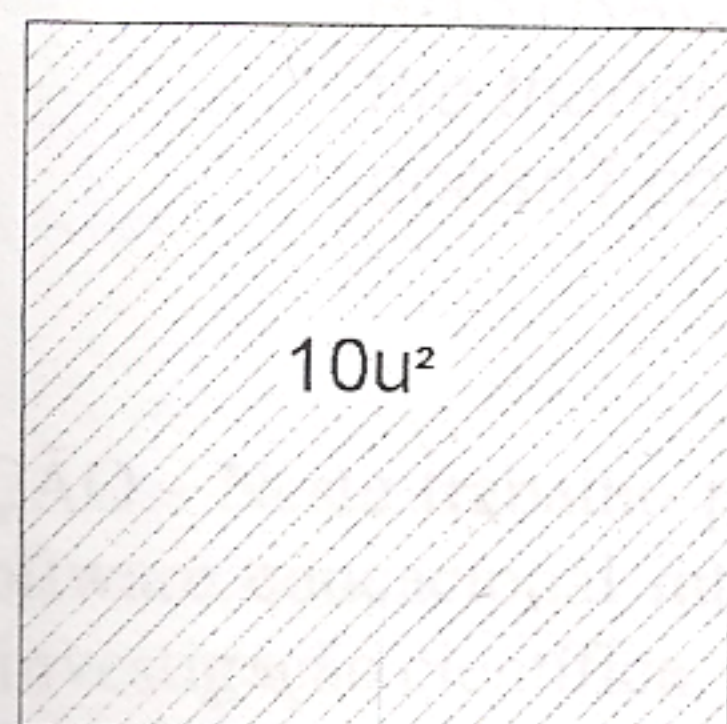
É claro que, com esse procedimento, o que estaríamos formando não seria um quadrado pois haveria, nos quatro cantos, um vazio que, se, ainda, quiséssemos continuar a cobrir iria deixando outros espaços vazios, ilimitadamente. Assim, com partes do inteiro (quadrado), com números racionais, nunca chegaríamos ao quadrado pedido.

A sequência de passos nos levaria a um número decimal com infinitas casas decimais, sem periodicidade, isto é, um número irracional.

Encontramos poucos alunos que chegassem a pensar que o quadrado procurado deveria ter por medida do lado um número irracional. Foi necessário que houvesse um estímulo, por parte do professor, para que os alunos fossem levados a isso. A impressão que nos ficou é a de que o conhecimento dos diferentes conjuntos numéricos não foi bem construído ao longo da escolaridade.

Que matemática há por trás desse problema? Ele pede por conteúdos já trabalhados e que se fazem necessários para a busca da solução? Como fazer a ligação de conteúdos já conhecidos com essa nova situação?

Dado E e sendo a área de cada quadrado unitário u^2 , então, a área de E é $10u^2$. Queremos quebrar esse E em quatro partes e ao rearranjá-las obter um quadrado de área $10u^2$.



O lado desse quadrado não é medido por um número racional. Nos deparamos com a necessidade de outro tipo de número: o número irracional e o lado desse quadrado mede $\sqrt{10}u$.

Nesse momento, o professor deve trabalhar com os alunos sobre esse novo conjunto que é o complementar de Q em relação a R.

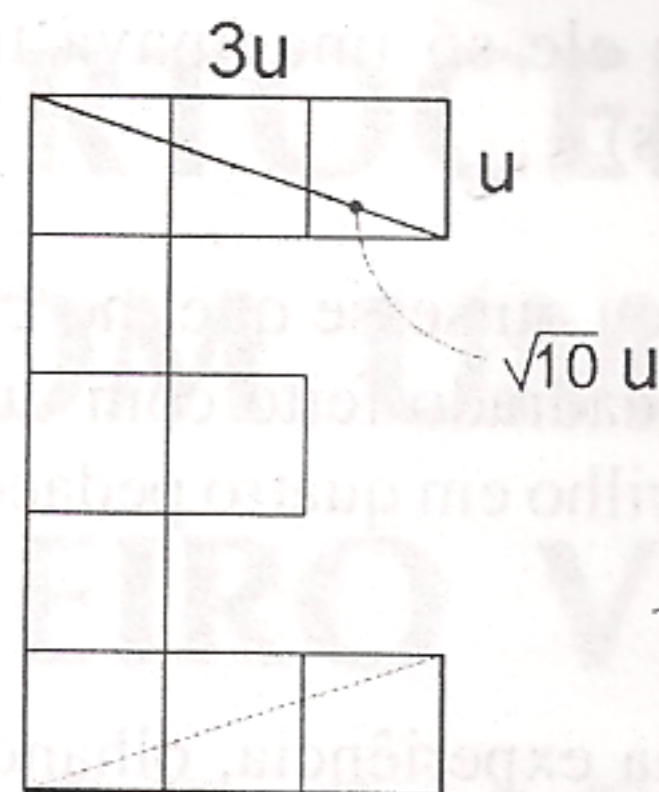
$$I = Q^c = \left\{ x \neq \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

e mostrar que, portanto, $Q \cup I = R$.

Observe, na figura dada, se encontra um segmento de medida $\sqrt{10}u$?

A figura é formada por quadrados de lado u e também por retângulos de lados $2u$ e u , $3u$ e u e $5u$ e u . Considerando um dos retângulos $3u \times u$, podemos per-

ceber que ele pode ser decomposto em dois triângulos retângulos, ao traçarmos sua diagonal d . Lembrando o Teorema de Pitágoras, vemos que:



$$(3u)^2 + u^2 = d^2$$

$$9u^2 + u^2 = d^2 \quad \text{e, então,} \quad d = \sqrt{10}u$$

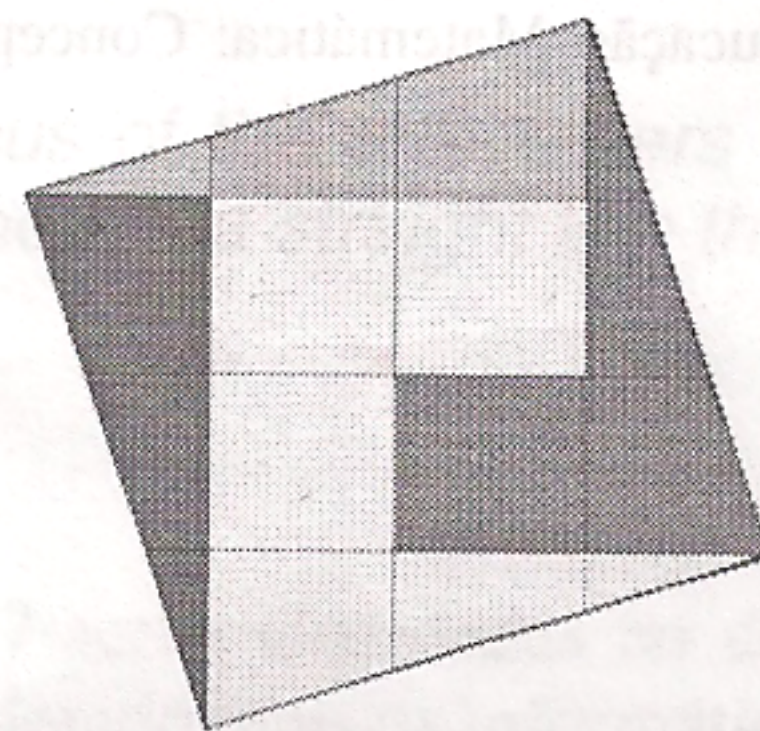
Assim, na figura, chegamos a um segmento que é o lado do quadrado procurado.

Cortando o E assim



teremos as quatro partes pedidas

e, montando convenientemente essas partes, obtemos

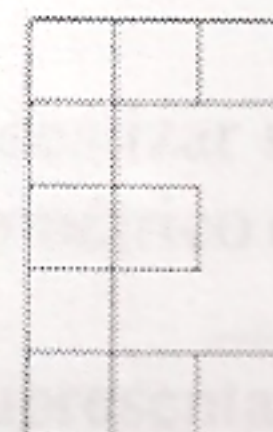


A exploração desse problema permite que se trabalhe sobre figuras geométricas e suas áreas; composição e decomposição de figuras; diferentes conjuntos numéricos: N , Z , Q , I e R ; o Teorema de Pitágoras; e resolução de problemas.

O que pudemos observar, durante as aplicações deste problema, é que falta iniciativa, criatividade e compreensão por parte de alguns alunos. Parece que têm medo de enfrentar uma situação nova.

O interessante foi o que aconteceu quando, conversando com um bom pedreiro que fazia um trabalho em minha casa, resolvi propor-lhe esse mesmo problema num outro contexto:

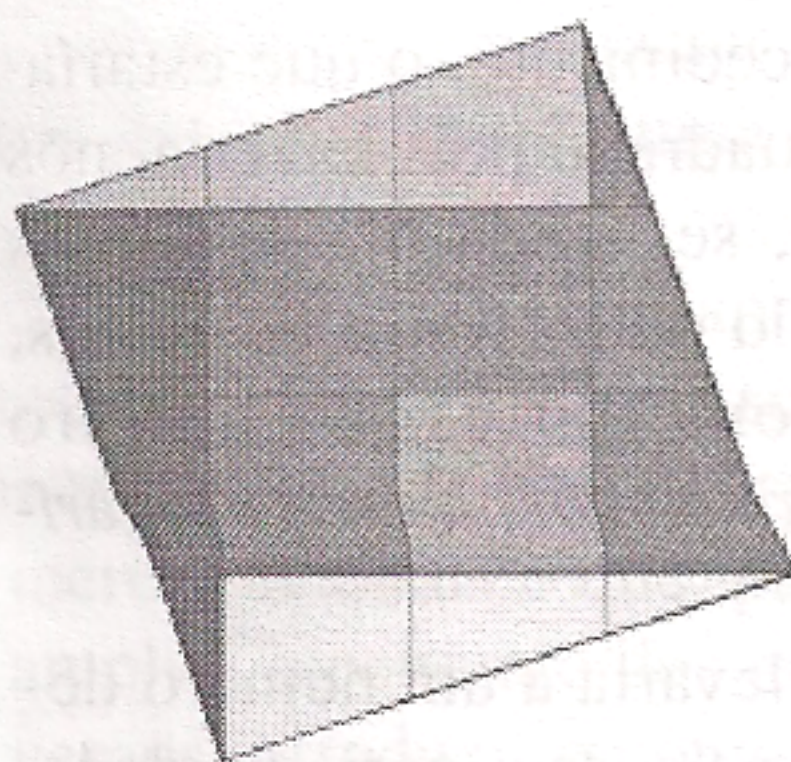
Se eu tivesse ladrilhos com esta forma e quisesse fazer o piso de uma sala, você seria capaz de fazê-lo?



Ele respondeu firmemente: - Claro! Só que, para que não tenha muita perda, não vai ficar um desenho muito simétrico. Vou usar ladrilhos inteiros e precisar encher os vazios com pequenos quadrados cortados dos ladrilhos (nesse instante ele só imaginava trabalhar com quadradinhos inteiros).

Continuei. E se eu quisesse que, no centro do piso, você formasse um quadrado feito com um único ladrilho, quebrando o ladrilho em quatro pedaços, como você faria isso?

Ele, dentro de sua experiência, olhando o E que eu lhe apresentava desenhado numa folha de papel sulfite



disse, apontando para o desenho: - Eu “quebrava” as duas partes grandes no meio, apontando para os retângulos $3u \times u$, formando quatro triângulos. “Colocava” os quatro quadradinhos inteiros juntos e “fechava” o quadrado maior com os quatro triângulos cortados. Ou seja, apesar de não respeitar a condição de quatro partes, conceitualmente resolveu o problema.

REFERÊNCIAS

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – February Calendar: In *Mathematics Teacher* – volume 93, number 2 – February 2000 – pag. 124, problema 13.

ONUICHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo:

Editora UNESP, 1999. Cap. 12, p.199-218.

SCHROEDER, T. L., LESTER Jr., F. K. *Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving*. TRAFTON, P. R., SHULTE, A. P. (Ed) *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).