

UMA CONCEPÇÃO CRÍTICA DE MATEMÁTICA

A racionalidade matemática esbanja simpatia se olhamos apenas para as facilidades que a matemática proporcionou durante a Revolução Científica em termos de compreensão das leis naturais. Mais simpática ainda ela fica se incluimos na foto os benefícios da tecnologia que a matemática ajudou a realizar. E, finalmente, analisando as qualidades intrínsecas da matemática, temos um quadro magnífico em que ela desponta como soberana das ciências. Esse clima de exaltação marca a concepção moderna de matemática, em que se vê também uma confiança absoluta em sua racionalidade.

A crença em uma correlação forte entre o desenvolvimento científico e o progresso faz parte da visão moderna. Mas não podemos esquecer que essa visão estava presente nas grandes descobertas, que desencadearam alguns dos mais brutais processos de colonização da história da humanidade. Veio daí o comércio de escravos e os discursos explícitos de racismo, que se tornariam mais tarde o racismo de base científica. Tais eventos fizeram parte da visão moderna. Assim, não é de se surpreender que a conexão entre ciência e progresso tenha lá suas dificuldades.

A ideia de risco está ligada à natureza. A humanidade está cercada por um ambiente hostil e nossa missão é controlar esse ambiente. A ideia de conquistar a natureza foi destacada por Francis Bacon, mas hoje em dia questiona-se a tecnologia como fator de agressão a ela. A tecnologia é integrante fundamental da *tecnonatureza* que envolve a

humanidade, e que a põe em risco. A energia atômica é um bom exemplo disso. Uma usina atômica produz grandes quantidades de energia, mas também traz preocupações. Quase sempre nada de catastrófico acontece, mas a possibilidade sempre vai estar presente. Nesse sentido, podemos falar em uma sociedade de riscos, na qual a produção de riscos em si mesma é parte do desenvolvimento tecnológico. Consequentemente, a suposta conexão intrínseca entre desenvolvimento científico e progresso parece duvidosa.

Os riscos distribuem-se de modo bem irregular por todo o planeta. Não estamos entrando na sociedade de riscos em condições iguais. Não há igualdade nem fraternidade nesse quesito. Alguns estão mais expostos aos riscos do que outros. A localização da usina nuclear britânica Sellafield é um exemplo disso. Podemos falar também nos riscos associados aos diferentes processos de produção. Nesse sentido, a globalização ajudou a remover processos particularmente perigosos e poluentes para partes mais pobres do planeta, onde “empregos ruins” são aceitos por causa do desemprego.

A racionalidade matemática é um componente indispensável a todos os empreendimentos e tomadas de decisão de ordem tecnológica que integram nossa tecnonatureza. Isso mostra que a racionalidade matemática também pode ser uma racionalidade duvidosa. Contudo, não significa que a racionalidade necessariamente desencadeia problemas. Ela traz inovações importantes por um lado, mas, por outro, pode causar catástrofes. É uma racionalidade sem essência. É uma racionalidade indefinida. É uma racionalidade crítica. Ela pode atuar das duas maneiras.

Vou tentar delinear uma interpretação da matemática diferente daquela considerada pela concepção moderna. Vou apresentar uma

concepção crítica ao relacionar a matemática com o discurso e o poder, e, então, discutir diferentes dimensões da matemática em ação. Nessas bases, formulo algumas preocupações com respeito à matemática e à educação matemática.

❑ *Matemática, discurso e poder*

Ao romper com a visão da modernidade, incluindo a celebração em torno do progresso gerado pela ciência, Michel Foucault abriu caminho para uma investigação sobre conhecimento e poder.[\[48\]](#) Ele abordou as noções de loucura, controle, o surgimento da clínica etc., e mostrou que a terminologia científica pode imprimir uma ordem sobre o fenômeno que deveria descrever. A linguagem científica em voga em uma dada época talvez não represente uma reflexão apropriada da realidade que supõe descrever. Ao contrário, aquilo que se considera como realidade pode refletir categorias arraigadas na linguagem de descrição, que assim se transforma em um instrumento contundente de prescrição e formatação. O poder pode ser exercido por meio da linguagem. Em suas pesquisas, Foucault, contudo, não analisou, com mais atenção, as ciências naturais, tampouco a matemática. Isso é curioso, visto que o complexo ciência-tecnologia é um forte exemplo da interação entre conhecimento e poder; e a matemática é um caso particularmente especial para se estudar isso.

O relativismo linguístico, formulado por Edward Sapir e Benjamin Lee Whorf, afirma que a linguagem não apenas descreve, mas também molda o que vivenciamos. A linguagem fornece uma gramática não apenas para o que dizer ou não dizer, mas também para o que ver e não ver. O relativismo linguístico está ligado à ideia de Immanuel Kant de que as coisas não são exatamente como as vivenciamos. Nossas experiências são estruturadas por categorias, que são projetadas sobre nossas experiências. De acordo com Kant, tais categorias são

permanentes, mas, segundo o relativismo linguístico, essas categorias desenvolvem-se e incorporam-se na gramática básica da linguagem por processos históricos e culturais. As categorias básicas de nossos mundos-vida são fabricadas. Isso confere à linguagem uma posição crucial para o entendimento do que chamamos de realidade. A linguagem contribui para a formatação da realidade ao projetar crenças, categorias, premissas, metafísica, prioridades, concepções e mal-entendidos. E, retomando Foucault, podemos sustentar que também o discurso científico traz uma formatação por intermédio de seus “regimes de verdade”.

A linguagem contém elementos de ação. Esse aspecto da linguagem foi proposto por John L. Austin e Ludwig Wittgenstein. Qualquer manifestação, afirmação, expressão, sentença, pergunta etc. contém atos. Assim, prometer algo é mais do que apenas dizer algo. Prometer significa fazer algo, e esse ato pode ser analisado em termos de seu conteúdo, força e efeitos. A dimensão locutória de uma promessa refere-se ao conteúdo do que é dito; por exemplo, eu posso prometer a um amigo visitá-lo amanhã. A força ilocutória refere-se ao elemento da promessa, que, nesse exemplo, é a obrigação implícita de cumprir a promessa. O efeito perlocutório refere-se às consequências que a promessa pode gerar: meu amigo pode ficar um pouco chateado em pensar que eu vá incomodá-lo amanhã. O ponto é que qualquer ato de fala apresenta todas essas três dimensões.

Se casarmos as duas ideias, isto é, de que a linguagem contribui para a formatação da realidade e que a linguagem contém ações, abre-se o caminho para uma interpretação performática da linguagem e da interação entre poder e linguagem – em particular com respeito à matemática. Muitas vezes, a matemática é apresentada como uma linguagem. Por exemplo, um dos pilares da matemática pura é ser vista

como uma linguagem formal que atua sem referência a nada. Ela aparece como uma ferramenta neutra. Ver a matemática como uma linguagem pode, contudo, nos levar a um caminho completamente diferente quando nos atemos ao aspecto performático da linguagem. Esse aspecto pode ser encontrado, de fato, em todas as formas variantes de matemática: na engenharia, na economia, no dia a dia, nos diferentes contextos culturais, na pesquisa etc. Eu vou mostrar em que sentido podemos falar sobre *performances* baseadas em matemática e por esse caminho explorar sua concepção crítica.[\[49\]](#)

□ *Dimensões da matemática em ação*

Tentarei ser mais específico sobre aspectos performáticos da matemática ao passar em revista cinco aspectos da matemática em ação: (1) *Imaginação tecnológica*, que se refere à possibilidade de explorar possibilidades tecnológicas; (2) *Raciocínio hipotético*, que aborda as consequências de iniciativas e construções tecnológicas ainda não realizadas; (3) *Legitimação* ou *justificação*, que se refere à possibilidade de validar ações tecnológicas; (4) *Realização*, que acontece quando a matemática passa a fazer parte da realidade, por exemplo, por intermédio dos processos de projeto e construção; (5) *Dissolução da responsabilidade*, que se manifesta quando questões éticas relacionadas a ações feitas desaparecem.[\[50\]](#) Portanto, no que vem a seguir, vou me referir a certas formas de matemática aplicada.

Imaginação tecnológica

O desenvolvimento tecnológico baseia-se na imaginação. Isso se aplica a toda forma de projeto (seja de máquinas, objetos, ferramentas, esquemas produtivos etc.) e tomada de decisão (em gerenciamento, economia etc.). Em todas essas áreas encontramos imaginação tecnológica baseada em matemática.

Como exemplo emblemático de tal imaginação, pode-se pensar na invenção do computador. A concepção matemática, em termos de

máquinas de Turing, foi investigada nos mínimos detalhes. Mesmo os limites técnicos do computador puderam ser desvendados antes da construção do primeiro modelo. As tecnologias da informação e da comunicação são profundamente enraizadas na imaginação baseada em matemática. Basta ver como as potencialidades da criptografia foram identificadas por meio de explicações teóricas que a matemática apresentou sobre as propriedades dos números. Essas potencialidades não poderiam ser conhecidas por uma criptografia de senso comum. Os métodos da matemática puseram a imaginação tecnológica em um novo patamar. Meu argumento geral é de que muitas inovações dependem totalmente da matemática. Não há comparação da imaginação amparada pela matemática com qualquer outra forma de imaginação.

Vamos considerar um exemplo do dia a dia em que a imaginação tecnológica amparada pela matemática é colocada em ação: a definição de preços. Vejamos, mais especificamente, o caso dos preços de passagens aéreas. Nesse ramo, encontramos muitos esquemas distintos. Sabe-se que as empresas praticam deliberadamente o *overbooking*. Mas isso é planejado com todo o cuidado, e essa técnica faz parte do esquema de definição de preços. Esse esquema requer um modelo matemático para funcionar. Muitas experiências são feitas antes de se decidir por uma política de preços definitiva. De fato, a definição de preços é um processo contínuo. Para se definir o grau de *overbooking* de um voo, deve-se recorrer a estatísticas de ausências de uma dada decolagem. (Ausência consiste no não comparecimento de um passageiro que havia comprado uma passagem.) O custo de se barrar um passageiro também deve ser levantado. (Barrar um passageiro significa não deixá-lo embarcar porque o voo já está cheio.) Um parâmetro importante na elaboração de uma política de *overbooking* é a capacidade de se prever o não comparecimento de um passageiro para uma dada decolagem. Essa previsibilidade pode ser melhorada quando

tipos de passagens são agrupados de acordo com diferentes condições, por exemplo, levando-se em conta a possibilidade de trocas. A política de *overbooking* pode ser testada matematicamente, até que se descubra um modo de maximizar os lucros.

Simulações e tomadas de decisão como essas acontecem todo o tempo nos mais variados ramos de negócios, em vendas, em planejamento de produção, em grandes empresas, em pequenas empresas, em todos os agentes econômicos da sociedade. Uma clara noção da definição de preços apoiada em modelos matemáticos pode ser encontrada, por exemplo, folheando-se um jornal como a *Folha de S.Paulo*, prestando-se atenção às ofertas de serviços de telefonia móvel. Os preços não aparecem explicitamente, devido, entre outros fatores, aos sofisticados esquemas de planos de pagamento. Esse tipo de tarifação é uma expressão evidente da imaginação tecnológica apoiada em matemática, e os efeitos dessa imaginação estão presentes em nosso dia a dia.

Raciocínio hipotético

O raciocínio hipotético é algo que não se realiza. Ele é da forma “se p então q , embora p não aconteça”. Esse tipo de raciocínio é essencial em todo tipo de projeto tecnológico, bem como em nossas decisões diárias.

Se p acontecesse, quais seriam as consequências? É importante pensar bem a respeito antes de tentar fazer p acontecer. A fim de destrinchar um raciocínio hipotético, a matemática é essencial. Podemos pensar em decisões como: Devemos comprar um refrigerador de baixo consumo? Devemos comprar um modelo mais caro? Ou devemos

continuar com o velho refrigerador por mais um ano? O que fazer? Como comparar as implicações de cada escolha? Pode-se fazer uma planilha de custos... A abordagem adotada em questões domésticas não fica muito distante das tomadas de decisão de maior porte, a diferença é que, nos casos complexos, o raciocínio hipotético normalmente emprega modelos matemáticos mais sofisticados.

O modelo matemático serve para representar uma suposição, p , que pode se referir a qualquer forma de projeto, construção ou tomada de decisão de natureza tecnológica. A representação matemática da situação hipotética p será chamada Mp . Por meio da análise de Mp , tenta-se combater as implicações de p . Contudo, as implicações que são identificadas ao se investigar Mp não são implicações da vida real; são apenas *calculadas*. E as diferenças entre as implicações calculadas e as implicações reais não são óbvias. Essa característica está presente em toda iniciativa de ordem econômica, e em toda obra de engenharia. Os cálculos baseiam-se em modelos para estabelecer estimativas dos efeitos das ações ainda não realizadas. Por exemplo, a estabilidade de um novo avião é cuidadosamente modelada e prevista muito antes de qualquer protótipo alçar voo. Em muitos casos, parece que a matemática é o único caminho para investigar detalhes de projetos ainda no papel.

Temos aqui um exemplo de como surgem os riscos. Quando identificamos as implicações de certa ação por meio de modelos matemáticos, sempre há um risco de que algum aspecto tenha sido negligenciado. Na verdade, alguns aspectos menores são mesmo ignorados, uma vez que a matemática não serve para representar todas as facetas da realidade. A similaridade entre a situação hipotética p e sua representação matemática Mp nunca é perfeita. É certo que o projeto tecnológico final, após sua execução, terá diferenças em relação ao modelo que permitiu realizá-lo.

O raciocínio hipotético apoiado na matemática é formulado dentro de certo espaço lógico criado por ela, portanto apenas certo espaço de consequências é considerado. O *ponto cego* de um raciocínio hipotético apoiado em matemática pode ser, na verdade, uma tremenda *região cega*. A ascensão da sociedade de risco está relacionada com essa região. Boa parte das tomadas de decisão no setor financeiro baseia-se em cuidadosas estimativas de risco, que evoluíram e se transformaram em uma especialidade matemática avançada. Mas, exatamente por ser de natureza matemática, as estimativas de risco contêm largas regiões cegas, o que cria um solo fértil para crises econômicas.

Legitimação ou justificação

As noções de legitimação e justificação são diferentes. De acordo com uma perspectiva filosófica tradicional, justificação consiste em apoiar logicamente, de maneira apropriada e genuína, uma afirmação, uma decisão ou uma ação. Naturalmente, não é fácil definir o que é apropriado e genuíno, e nem mesmo o que é lógico, mas a noção de justificação carrega a premissa de que, até certo grau, houve uma honestidade lógica envolvida. A noção de legitimação não inclui essa premissa. Pode-se tentar legitimar uma ação ao apresentar alguma forma de argumentação, mas sem se preocupar com o aspecto lógico. Tentar legitimar uma ação, na verdade, é tentar fazer parecer *como se* ela estivesse justificada. Em geral, uma legitimação é uma justificação *como se*.

Contudo, somente no âmbito de um arcabouço filosófico idealizado, é possível distinguir entre legitimação e justificação. A matemática pode embaçar essa distinção. Quando um modelo

matemático faz parte de uma discussão, ele pode servir tanto para legitimar quanto para justificar um ponto de vista. Tem-se dito que no caso de grandes obras de engenharia, como pontes, os modelos matemáticos contribuem na análise dos efeitos daquela obra, por exemplo, no tocante ao impacto ambiental. Contudo, nessas tomadas de decisão frequentemente apenas modelos são empregados. Em alguns casos, parece que o modelo serve ao único propósito de legitimar uma decisão já tomada. O modelo matemático permite descrever matematicamente a obra em termos de Mp , e os efeitos da finalização da ponte são conhecidos mediante a análise de Mp . Esses efeitos, no entanto, não precisam refletir de fato as consequências reais. Por exemplo, o modelo matemático pode ser apresentado de tal forma que as implicações ambientais calculadas sempre se mostram dentro de certa faixa aceitável. A lacuna entre o que foi calculado e o que de fato vai acontecer pode ser enorme. Mas o modelo já cumpriu o seu papel de legitimar a obra, que não pode mais ser desfeita.

Em muitos casos, as análises matemáticas são a única opção disponível. A matemática estabelece um meio de justificação (e legitimação) que é único. É o que se vê no caso da estabilidade de aeronaves, que não pode ser justificada de nenhuma outra maneira. Uma vez que a matemática proporciona um espaço exclusivo para a imaginação tecnológica, esta, apoiada na matemática, também pode estabelecer um espaço exclusivo de legitimação e justificação.

Realização

Um modelo matemático pode se tornar parte do ambiente que nos cerca. Esse é o exemplo mais direto da afirmação que fiz anteriormente

sobre atos da fala e do discurso. Uma linguagem não é simplesmente uma ferramenta descritiva: ela também contém *performances*. Nosso mundo-vida é formado por categorias e discursos, muitos dos quais se realizam pela matemática em ação.

Tecnologia não é algo *adicional* que podemos pôr de lado, como se fosse uma peça, um martelo. Nós vivemos em um ambiente tecnologicamente estruturado, uma tecnonatureza. Nosso mundo-vida situa-se nessa tecnonatureza, e nós sequer conseguimos imaginar esse ambiente sem a tecnologia. Tente removê-la, parte por parte. Primeiro eliminaríamos os computadores, a máquina de café, os jornais, as casas, os carros, as pontes, as ruas, os sapatos. Não temos a menor ideia de que tipo de mundo-vida seria esse se continuássemos removendo coisas. Nesse sentido, nosso mundo-vida está imerso na tecnonatureza.

A matemática é parte integrante tanto da tecnonatureza quanto do mundo-vida. Isso se comprova pelo fato de que todas as coisas mencionadas: máquina de café, refrigerador, aparelho de TV, telefone, remédios, jornais, carros, pontes, ruas, sapatos são resultado de processos repletos de matemática. Mas não apenas os objetos que fazem parte de nossa tecnonatureza são formatados pela matemática, existem as ações também. A matemática cria rotinas. Uma viagem de negócios serve mais uma vez de exemplo. Quando compro uma passagem, o funcionário da agência de viagem consegue facilmente fornecer informações sobre preços e horários. Todo o gerenciamento de informações é parte da rotina da agência. Mais que isso, boa parte da informação está disponível na internet, o que possibilita providenciar a compra sem sair de casa. Em todos esses casos, os procedimentos são definidos por algoritmos computacionais.

❑ *Maravilhas, horrores e reflexões*

A matemática em ação pode assumir muitas formas. Maravilhas podem ser associadas à matemática em ação, e a pesquisa médica traz muitos exemplos disso. De fato, é difícil conceber qualquer forma de pesquisa médica sem a matemática. É possível também lembrar horrores realizados com a matemática. Ações militares não poderiam ser executadas. Reestruturações financeiras que culminam na demissão de trabalhadores são efetivadas com a matemática. Pode-se objetar que é injusto associar a matemática a horrores lembrando apenas o uso militar, ao passo que alguém pode considerar o militarismo algo importante para a segurança do país. Pode-se argumentar que a demissão de pessoas faz parte do aprimoramento da eficiência produtiva, que é necessária para o bem-estar geral.

Isso nos leva à constatação de que a dicotomia *maravilhas-horrores* com respeito à matemática em ação pode não ser mesmo relevante. Talvez fosse melhor reconhecer que é muito difícil estabelecer um esquema coerente para avaliar a matemática em ação. Assim como outras formas de ação, a matemática em ação pode levar a consequências diversas, cuja avaliação pode variar conforme a percepção e o contexto. Isso nos remete à concepção crítica de matemática. Ela representa uma racionalidade que pode ser empregada para todo tipo de fim. Não há uma essência na matemática. A matemática em ação pode atender a qualquer interesse. Em decorrência disso, ela precisa de reflexões. Tais reflexões devem ser conduzidas tendo em vista todas as particularidades da ação, incluindo o contexto.

A medicina é outro ramo em que as rotinas de origem matemática se estabeleceram. Nessa atividade, muitas rotinas para diagnóstico baseiam-se em exames e índices. O diagnóstico e o tratamento dependem do desvio em relação à norma de certos parâmetros (como o nível de colesterol e a pressão sanguínea, por exemplo). Padronizam-se os critérios para tomada de decisões e os procedimentos, garantindo a eficiência do tratamento. Ao mesmo tempo, os procedimentos trazem novos riscos, uma vez que podem não se aplicar em todos os casos.

Dissolução da responsabilidade

Em ações apoiadas em matemática pode-se identificar uma dissolução de responsabilidade. Vamos considerar mais uma vez o exemplo da agência de viagem. O funcionário pode dizer ao cliente o preço da passagem e a disponibilidade de vagas em certas datas. O funcionário não pode vender uma passagem se não houver vaga. Mesmo que o cliente pudesse comprovar que a viagem é de extrema importância, o funcionário não teria o que fazer. Ele está isento das ações do sistema computacional, assim como não é responsável pelo preço da passagem, condições de pagamento ou por qualquer coisa que parta de procedimentos definidos algoritmicamente.

Alguém poderia perguntar: quem é o responsável pelas ações executadas pelo computador? De certa forma, tudo se passa como se a responsabilidade sumisse do mapa. O responsável não seria o funcionário, que se limita a usar o modelo. Nem seria o modelo em si. A matemática, então, não poderia ser, mesmo que ela atuasse na situação. Mas, não poderíamos, pelo menos, atribuir responsabilidade a

uma maneira de pensar? As pessoas que ordenaram a adoção do modelo seriam ou não seriam responsáveis?

Chamo a atenção para o fato de que ações baseadas em matemática naturalmente parecem acontecer em um vácuo ético. Ações normalmente são associadas a um sujeito agente. Contudo, a matemática em ação parece funcionar sem um sujeito. E quando o sujeito agente desaparece, a noção de responsabilidade não existe mais. Ações baseadas em matemática parecem ser as únicas ações relevantes na situação. Elas parecem ter sido determinadas por uma autoridade *objetiva*, uma vez que a matemática tornou-as necessárias. Dessa forma, a eliminação da responsabilidade deve fazer parte das *performances* matemáticas, que, por sua vez, participam da dinâmica entre conhecimento e poder.

Se considerarmos uma noção mais ampla de ética, podemos falar também de uma demanda ética associada à concepção crítica de matemática.

Assim como os adeptos da concepção moderna de matemática, os que advogam a concepção crítica reconhecem que a matemática atua em uma gama de disciplinas científicas. Porém, na perspectiva crítica, não há uma exaltação por essa participação da matemática em tais disciplinas. Como qualquer linguagem, a matemática carrega um conjunto de premissas metafísicas e, por exemplo, favorece a visão mecanicista. Dessa forma, os discursos matemáticos podem fornecer uma formatação dos discursos científicos que necessitam passar por um exame crítico.

A concepção moderna de matemática parece dispensar reflexões com respeito à tecnologia, devido à confiança gratuita na ideia de que a presença da matemática é garantia de progresso. A discussão sobre a matemática em ação conduz a um tipo diferente de conclusão. A matemática é uma parte integrante de diferentes modos de formatação de nosso ambiente e de nossa tecnonatureza, mas tal formatação não é certeza de uma melhoria automática das circunstâncias. A tecnologia causa impacto em todos os aspectos da vida. Ela traz mudanças, mas a tecnonatureza não tem evoluído em nenhum critério de progresso, e não há nada de natural a respeito desse crescimento.

A concepção moderna de matemática considera a matemática como uma racionalidade pura. Isso significa que a matemática pode ser objeto de reflexão, uma forma sublime de pensamento crítico. Porém, estudando a matemática em ação, percebemos a necessidade de abordar a racionalidade matemática de maneira crítica. A condição de disciplina pura perde o sentido. Matemática em ação significa ação, e, como

qualquer forma de ação, requer reflexão. Ações podem ser perigosas, corajosas, arriscadas, inofensivas, benevolentes, meritórias etc. E, do mesmo modo, ações baseadas em matemática também podem ser assim. A reflexão crítica é necessária, e uma demanda ética passa a ser um desafio importante para tudo o que se refere à matemática.

NOTAS

- [1] Um panorama diversificado das questões sobre educação matemática crítica pode ser encontrado em Alrø, Ravn e Valero (orgs.) (2010); Appelbaum e Allan (2008); Ernest, Greer e Sriraman (orgs.) (2009); Greer, Mukhopadhyay, Powel e Nelson-Barber (orgs.) (2009); Mora (org.) 2005; e Sriraman (org.) (2008). Ver em Skovsmose (2010) uma discussão sobre a educação matemática crítica em termos de preocupações.
- [2] Uma versão preliminar deste capítulo foi apresentada no XXXII Encontro da Associação de Pós-graduação e Pesquisa em Educação (Anped), Caxambu, Minas Gerais, de 4 a 7 de outubro de 2009.
- [3] Os termos “potencialização” e “despotencialização” foram adotados como traduções próximas de *empowerment* e *disempowerment*. (N.T.)
- [4] Uma discussão sobre a obediência cega a ordens (*prescription readiness*) pode ser vista em Skovsmose (2008a). Ver também Christensen, Stentoft e Valero (2007).
- [5] Ver, por exemplo, Gates (2006).
- [6] Ver, por exemplo, Freire (1972) e Adorno (1971).
- [7] O projeto é descrito detalhadamente em Skovsmose (1994).
- [8] Em Skovsmose (1994) há uma discussão sobre *exemplaridade* como um conceito educacional.
- [9] Ver Salgado e Buarque (2005).
- [10] Ver Unesco (2000). Ver também Skovsmose (2006c).
- [11] Um exemplo nessa direção pode ser encontrado no Capítulo 5 de Alrø e Skovsmose (2002).
- [12] Cheguei a essa estimativa mediante observações apontadas em Skovsmose e Valero (2008) e Skovsmose (2006c).
- [13] Ver, por exemplo, Valero (2004 e 2007); Valero e Zevenbergen (orgs.) (2004); Vithal (2007 e 2009); e Vithal e Valero (2003).
- [14] Ver uma análise sobre a idealização de professores e alunos em Valero (2002).

- [15] Ver, por exemplo, D'Ambrosio (2006). Ver também D'Ambrosio (2010), que traz uma análise abrangente de como a educação matemática pode favorecer a sobrevivência com dignidade.
- [16] Ver Banco Mundial (2006, p. 1). Renuka Vithal referiu-se a esse texto numa palestra no *Symposium Mathematics Education, Democracy and Development: Challenges for 21st Century*. Faculdade de Educação da Universidade de Kwazulu-Natal, Durban, 4 de abril de 2008.
- [17] A noção de *foreground* foi apresentada em Skovsmose (1994). Ver também Skovsmose (2005 e 2007b); Alrø, Skovsmose e Valero (2009); e Lindenskov (2010).
- [18] Especificamente, não entendo o mundo-vida como um *fluxo de consciência* como ele sugere. Ver Husserl (1970) e Skovsmose (2009b).
- [19] Ver Brentano (1995a e 1995b).
- [20] Ver, por exemplo, Husserl (1998).
- [21] A noção de motivo refere-se ao *foreground* da pessoa, enquanto a noção de motivação, especialmente no behaviorismo, refere-se ao seu *background*.
- [22] Para uma discussão da ideia de aprendizagem como ação, ver Skovsmose (1994). Considero o ensino também como ação, mas isso não é explorado nesta obra.
- [23] Khuzwayo (2000) traz um estudo crítico sobre “a pesquisa dos brancos sobre a educação dos negros”. Ver também Skovsmose (2005).
- [24] Aprendendo para a Diversidade (*Learning for Diversity*) é um projeto dirigido por mim, Helle Alrø e Paola Valero. Ver, por exemplo, Alrø, Valero e Skovsmose (2009).
- [25] Um tema da filosofia analítica é determinar até que ponto o sentido de um conceito composto e complexo pode ser visto como a combinação dos sentidos de seus elementos atômicos constituintes. Frege traçou uma distinção entre sentido (*Sinn*) e referência (*Bedeutung*), que foi crucial para clarificar esse ponto. Ver em Skovsmose (2009b) uma discussão sobre a distinção de Frege.
- [26] As propriedades são: a operação, $*$, deve ser associativa; existe um elemento neutro e em G ; e todo elemento em G possui um elemento inverso em G .
- [27] Esse exemplo me foi apresentado por Miriam Godoy Penteado.
- [28] Ver Vithal (2010).

- [29] Ver Skovsmose, Alrø e Valero em colaboração com Silvério e Scandiuizzi (2008), e também Skovsmose *et al.* (2008).
- [30] Ver Penteadó e Skovsmose (2009).
- [31] Todas as figuras deste capítulo são de Mikael Skånstrøm.
- [32] Cenários para investigação são tratados em Skovsmose (2001) e Alrø e Skovsmose (2002).
- [33] Quantos lados tem um dado quadridimensional? Rønning (2010) apresenta uma discussão a respeito.
- [34] Considere, por exemplo, o Modelo de Cooperação de Pesquisa investigado em Alrø e Skovsmose (2002).
- [35] *Milieu* é uma palavra francesa, que designa “meio, centro”. (N.T.)
- [36] O Projeto Planejamento Urbano é apresentado por Biotto Filho (2008), e volto a ele no Capítulo 6, no qual discuto a noção de reflexão. O jogo Simcity4 foi lançado em 2003 pela Electronic Arts (EA Games).
- [37] Certa vez assisti a uma aula de Philip Davis, na qual ele realizou essa ação.
- [38] Uma parte do Projeto Planejamento Urbano, que mencionei anteriormente, era solicitar que cada aluno desenhasse a planta da casa em que morava. O professor ficou surpreso com os resultados. Será que os alunos sabiam fazer plantas e mapas? O professor descobriu que sabiam, sim, e ele pôde conhecer muito da realidade e das condições de vida nas favelas por meio das plantas feitas por seus alunos.
- [39] A descrição que vem a seguir foi tirada de Skovsmose (2001), com pequenas alterações.
- [40] Ver Penteadó (2001) para saber mais sobre zonas de risco. Ver também Yasukawa (2010).
- [41] Beard *apud* Bury (1955, p. xx).
- [42] É bem sabido que o projeto do logicismo, a redução da matemática à lógica, ficou incompleto nos *Principia Mathematica I-III* (alguns elementos da intuição e da observação empírica não puderam ser dispensados). E, logo em seguida, o projeto do logicismo foi abandonado.
- [43] Hilbert pretendia abordar tanto consistência quanto completude. Uma teoria matemática é consistente se não é possível, ao mesmo tempo, provar uma sentença, digamos p , e a sua negação, não p , por outro caminho de dedução. Dizer que uma teoria é completa significa

dizer que para todo par de sentenças, em que uma é negação da outra, como no caso de p e não p , existe uma demonstração possível na teoria para uma das sentenças do par. Assim, enquanto a consistência exige que não se deve demonstrar coisas demais, a completude requer que não se demonstre coisas de menos. A vontade de Hilbert era apresentar formalizações das teorias matemáticas que fossem demonstradamente consistentes e completas. Se esse projeto tivesse sido realizado, Hilbert teria reduzido a filosofia da matemática a um empreendimento lógico. De uma forma dramática, contudo, Kurt Gödel provou que o plano de Hilbert nunca passaria de um sonho: um formalismo, rico o suficiente para dar conta da teoria dos números naturais, teria que ser incompleto se tivesse que ser consistente.

- [44] Os proponentes da matemática como uma disciplina pura não estavam alheios às aplicações da matemática, mas como sustentar a ideia de matemática pura quando de fato ela é aplicada? Segundo Curry, faz sentido discutir a aplicação empírica da teoria matemática, mas essa é uma discussão de outra natureza em relação à investigação da verdade das sentenças matemáticas.
- [45] Ver OEEC (1961), p. 18.
- [46] Ver Beth e Piaget (1968) e Piaget (1970).
- [47] Também vejo a (assim chamada) “tradição francesa na educação matemática” como um exemplo de educação matemática moderna, onde a confiança na racionalidade matemática está embutida na noção de “transposição didática”.
- [48] Ver, por exemplo, Foucault (1989 e 1994). Ver também Valero (2009).
- [49] Para uma discussão sobre o relativismo linguístico e atos de fala como pontos de partida de uma interpretação performática da matemática, ver também Skovsmose (2009b).
- [50] Apresentei aspectos da matemática em ação de várias maneiras – ver, por exemplo, Skovsmose (2005 e 2009b) – e ainda não me decidi sobre qual delas produz a visão mais adequada. Em colaboração com Ole Ravn (Christensen) e Keiko Yasukawa, tenho analisado vários exemplos de matemática em ação, exploramos diversos arcabouços conceituais para expressar a noção de *agência* com respeito à matemática. Ver, por exemplo, Christensen, Skovsmose e Yasukawa (2009). A apresentação que se segue baseia-se nesse esforço conjunto. Ver também Baber (2010); Jablonka (2010); e Ravn (2010).
- [51] O projeto contou com a colaboração de Helle Alrø, Morten Blomhøj, Henning Bødtkjær e Mikael Skånstrøm. Uma descrição do projeto pode ser encontrada em Alrø e Skovsmose (2002). Em Skovsmose (2006a), há um apanhado do projeto com ênfase na noção de reflexão. Ver também Skovsmose (2007b).

- [52] Ver Biotto Filho (2008).
- [53] O Projeto Caixas de Caramelo é descrito em Alrø e Skovsmose (2002). A breve apresentação que é feita aqui baseia-se no resumo do projeto em Skovsmose (2006a).
- [54] Mais detalhes sobre os cálculos podem ser encontrados em Skovsmose (1994).
- [55] As ideias aproximam-se por meio do Modelo de Cooperação Investigativa. Para outras discussões sobre comunicação e diálogo, ver também Alrø e Johnsen-Høines (2010) e Planas e Civil (2010).
- [56] Discuto “acontecimento” (*happening*) com respeito à teorização social em Skovsmose (2005).
- [57] Ernest (2009) traz uma discussão sobre educação matemática e globalização.
- [58] Ver Freire (1972 e 1974).
- [59] Para uma interpretação da literacia matemática nessas bases, ver Gutstein (2006, 2008 e 2009). Ver também Jablonka (2003), para uma apresentação de ideias variadas de literacia matemática, e Chronaki (2010), para uma explanação sobre *matemacia*.
- [60] Ver também Skovsmose (2007c).
- [61] Ver Santos e Matos (2002); Mesquita (2004); Abreu (1993); Gerdes (2008); e Skovsmose e Penteado (2011).
- [62] Tomei conhecimento desse programa pedagógico em Barcelona por intermédio de Núria Gorgorió e Núria Planas.
- [63] Ver também Atweh (2007 e 2009).
- [64] Ver, por exemplo, Knijnik (2009).
- [65] Um bom estudo ilustrativo disso pode ser encontrado em Greer (2008), que passa em revista os números de baixas na Guerra do Iraque tais como aparecem nos discursos das autoridades.
- [66] Ver, por exemplo, Skovsmose, Valero e Christensen (orgs.) (2009); e Skovsmose (2006b, 2008b e 2009a).
- [67] Tentei de várias maneiras apresentar uma educação matemática crítica para o futuro. Ver, por exemplo, Skovsmose (2008c). Ver também Rasmussen (2010).

[68] Ver também Ernest (2010); Knijnik e Bocasante (2010); Pais (2010); e Valero e Stentoft (2010).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, G. (1993). "The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil". Tese de doutorado. Cambridge: Cambridge University.
- ADORNO, T.W. (1971). *Erziehung zur Mündigkeit*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.
- ALRØ, H. e JOHNSEN-HØINES, M. (2010). "Critical dialogue in mathematics education". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 11-21.
- ALRØ, H. e SKOVSMOSE, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer.
- ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.) (2010). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. e VALERO, P. (2009). "Inter-viewing foregrounds: Students' motives for learning in a multicultural setting". In: CÉSAR, M. e KUMPULAINEN, K. (orgs.). *Social interactions in multicultural settings*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 13-37.
- APPELBAUM, P. e ALLAN, D.S. (2008). *Embracing mathematics: On becoming a teacher and changing with mathematics*. Nova York: Routledge.
- ATWEH, B. (2007). "Pedagogy for socially response-able mathematics education". Artigo apresentado na conferência anual da Australian Association of Research in Education. Fremantle, West Australia. [Disponível na internet: <http://www.aare.edu.au/data/publications/2007/atw07600.pdf>, acesso em 8/7/2014.]
- _____. (2009). "Ethical responsibility and the 'What' and the 'Why'" of mathematics education in a global context". In: ERNEST, P.; GREER, B. e SRIRAMAN, B. (orgs.). *Critical issues in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, pp. 7-17.
- BABER, S.A. (2010). "Mathematics from the perspective of critical sociology". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 23-29.
- BANCO MUNDIAL (2006). *Equity and development: World development report 2006*. Washington/Nova York: Banco Mundial/Oxford University Press.
- BENJAMIN, W. (1999). *The arcades project*. Cambridge (EUA)/Londres: The Belknap Press of Harvard University Press.
- BETH, E.W. e PIAGET, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

- BIOTTO FILHO, D. (2008). “O desenvolvimento da *matemacia* no trabalho com projetos”. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (Unesp).
- BRENTANO, F. (1995a). *Psychology from an empirical standpoint*. Trad. de A.C. Rancurello, D.B. Terrell e L.L. McAlister; introdução de Peter Simons. Londres: Routledge. (Edição alemã original de 1874.)
- _____. (1995b). *Descriptive psychology*. Trad. e ed. de B. Müller. Londres: Routledge. (Anotações de aulas entre 1887-1891; edição alemã original de 1892.)
- BURY, J.B. (1955). *The idea of progress: An inquiry into its origin and growth*. Introdução de Charles A. Bead. Nova York: Dover Publications. (Publicado originalmente em 1932.)
- CHRISTENSEN, O.R.; SKOVSMOSE, O. e YASUKAWA, K. (2009). “The mathematical state of the world: Explorations into the characteristics of mathematical descriptions”. In: SRIRAMAN, B. e GOODCHILD S. (orgs.). *Relatively and philosophically earnest: Festschrift in honor of Paul Ernest's 65th birthday*. Charlotte: Information Age Publishing, pp. 83-96. (Publicado originalmente em Alexandria: *Journal of Science and Technology Education*, v. 1, n. 1, pp. 77-90.)
- CHRISTENSEN, O.R.; STENTOFT, D. e VALERO, P. (2007). “Power distribution in the network of mathematics education practices”. In: FREITAS, E. de e NOLAN, K. (orgs.). *Opening the research text: Critical insights and in(ter)-ventions into mathematics education*. Nova York: Springer, pp. 131-146.
- CHRONAKI, A. (2010). “Revisiting mathemacy: A process-reading of critical mathematics education”. In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 31-49.
- CURRY, H.B. (1951). *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- D'AMBROSIO, U. (2006). *Ethnomathematics: Link between transitions and modernity*. Rotterdam: Sense Publishers.
- _____. (2010). “Mathematics education and survival with dignity”. In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 51-63.
- ERNEST, P. (2009). “Mathematics education ideologies and globalization”. In: ERNEST, P.; GREER, B. e SRIRAMAN, B. (orgs.). *Critical issues in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, pp. 67-110.
- _____. (2010). “The scope and limits of critical mathematics education”. In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 65-87.
- ERNEST, P.; GREER, B. e SRIRAMAN, B. (orgs.) (2009). *Critical issues in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing.

- FOUCAULT, M. (1989). *The archeology of knowledge*. Londres: Routledge. (Edição francesa original de 1969.)
- _____. (1994). *The order of things: An archaeology of the human sciences*. Nova York: Vintage Books. (Edição original francesa de 1966.)
- _____. (2000). *Power*. Ed. de J.D. Faubion, trad. de R. Hurley e outros. Nova York: The New Press.
- FREIRE, P. (1972). *Pedagogy of the oppressed*. Harmondsworth: Penguin Books.
- _____. (1974). *Cultural action for freedom*. Harmondsworth: Penguin Books.
- GATES, P. (2006). "The place of equity and social justice in the history of PME". In: GUTÉRREZ, A. e BOERO, P. (orgs.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 367-402.
- GERDES, P. (2008). *Exemplos de aplicações da matemática na agricultura e na veterinária*. Maputo: Lulu.com e Tlanu.
- GREER, B. (2008). "Discounting Iraqi deaths: A social and educational disgrace". In: MATOS, J.F.; VALERO, P. e YASUKAWA, K. (orgs.). *Proceedings of the fifth international mathematics education and society conference*. Lisboa: Centro de Investigação em Educação, Universidade de Lisboa/Department of Education, Learning and Philosophy, Universidade de Aalborg.
- GREER, B.; Mukhopadhyay, S.; Powel, A.B. e Nelson-Barber, S. (orgs.) (2009). *Culturally responsive mathematics education*. Nova York: Routledge.
- GUTSTEIN, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. Nova York/Londres: Routledge.
- _____. (2008). "Building political relationships with students". In: FREITAS, E. e NOLAN, K. (orgs.). *Opening the research text: Critical insights and in(ter)ventions into mathematics education*. Nova York: Springer, pp. 189-204.
- _____. (2009). "Possibilities and challenges in teaching mathematics for social justice". In: ERNEST, P.; GREER, B. e SRIRAMAN, B. (orgs.). *Critical issues in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, pp. 351-373.
- HILBERT, D. (1968). *Grundlagen der geometrie*. Stuttgart: Teubner. (Publicação original de 1899.)
- HORKHEIMER, M. e ADORNO, T.W. (2002). *Dialectic of enlightenment*. Trad. de J. Cumming. Nova York: Continuum. (Publicado originalmente em 1947.)
- HUSSERL, E. (1998). *Ideas pertaining to a pure phenomenology and to a phenomenological philosophy: First book*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (Edição alemã original de 1913.)

- _____ (1970). *The crisis of European sciences and transcendental phenomenology*. Trad. e introdução de D. Car. Evanston: Northwestern University Press. (Versão alemã original de 1936.)
- JABLONKA, E. (2003). "Mathematical literacy". In: BISHOP, A.J. et al. (orgs.). *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- _____ (2010). "Reflections on mathematical modeling". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 89-100.
- KANT, I. (1933). *Critique of pure reason*. Trad. de N.K. Smith. Londres: MacMillan. (Edição alemã original de 1791.)
- KNIJNIK, G. (2009). "Mathematics education and the Brazilian landless movement: Three different mathematics in the context of struggle for social justice". In: ERNEST, P.; GREER, B. e SRIRAMAN, B. (orgs.). *Critical issues in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, pp. 153-169.
- KNIJNIK, G. e BOCASANTE, D.M. (2010). "Do ofício da pesquisa: Pílulas neoaforística – About the craft of research: Neoaphoristic pills". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 101-120.
- LINDENSKOV, L. (2010). "Students' curriculum in critical mathematics education". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 121-131.
- MESQUITA, M. (2004). "O conceito de espaço na cultura de criança em situação de rua: Um estudo etnomatemático". In: RIBEIRO, J.P.M.; DOMITE, M. do C.S. e FERREIRA, R. (orgs.). *Etnomatemática: Papel, valor e significado*. São Paulo: Zouk.
- MORA, D. (org.) (2005). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática: Perspectivas para la transformación de la educación matemática en América Latina*. La Paz: Gidem.
- OEEC (1961). *New thinking in school mathematics*. Paris: OEEC.
- PAIS, A. (2010). "Portrait of an influence". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 133-144.
- PENTEADO, M.G. (2001). "Computer-based learning environments: Risks and uncertainties for teachers". *Ways of Knowing Journal*, v. 1, n. 2, pp. 23-35.
- PENTEADO, M.G. e SKOVSMOSE, O. (2009). "How to draw with a worn-out mouse? Searching for social justice through collaboration". *Journal for Mathematics Teacher Education*, v. 12, n. 3, pp. 217-230.
- PIAGET, J. (1970). *Genetic epistemology*. Nova York: Columbia University Press.

- PLANAS, N. e CIVIL, M. (2010). "Discourse processes in critical mathematics education". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- RASMUSSEN, P. (2010). "The critical perspective on education and on mathematics education". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- RAVN, O. (2010). "Step beyond mathematics: Investigations in the philosophy of mathematics". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- RØNNING, F. (2010). "Hvor mange kanter har en firedimensjonal terning?". *Tangenten*, n. 2, pp. 5-10. [Disponível na internet: <http://www.caspar.no/tangenten/2010/t-2010-2.pdf>, acesso em 10/7/2014.]
- SALGADO, S. e BUARQUE, C. (2005). *O berço da desigualdade*. São Paulo: Unesco no Brasil.
- SANTOS, M. e MATOS, J.F. (2002). "Thinking about mathematical learning with Cabo Verde Ardinás". In: ABREU, G. de; BISHOP, A. e PRESMEG, N.C. (orgs.). *Transitions between contexts of mathematical practices*. Dordrecht: Kluwer.
- SKOVSMOSE, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematical education*. Dordrecht: Kluwer.
- _____ (2001). "Landscapes of investigation". *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, v. 33, n. 4, pp. 123-132.
- _____ (2005). *Travelling through education: Uncertainty, mathematics, responsibility*. Rotterdam: Sense Publishers.
- _____ (2006a). "Reflections as a challenge". *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 4, pp. 323-332.
- _____ (2006b). "Challenges for mathematics education research". In: MAASZ, J. e SCHLOEGELMANN, W. (orgs.). *New mathematics education research and practice*. Rotterdam: Sense Publishers.
- _____ (2006c). "Research, practice, uncertainty and responsibility". *Journal of Mathematical Behaviour*, v. 25, n. 4, pp. 267-284.
- _____ (2007a). "Foregrounds and politics of learning obstacles". In: GELLERT, U. e JABLONKA, E. (orgs.). *Mathematisation and demathematisation: Social, philosophical, and educational ramifications*. Rotterdam: Sense Publishers. (Publicado originalmente em *For the Learning of Mathematics*, v. 25, n. 1, pp. 4-10.)
- _____ (2007b). "Doubtful rationality". *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, v. 39, n. 3, pp. 215-224.
- _____ (2007c). "Mathematical literacy and globalization". In: ATWEH, B. et al. (orgs.). *Internationalisation and globalisation in mathematics and science education*. Nova York:

Springer.

- _____. (2008a). "Mathematics education in a knowledge market". In: FREITAS, E. de e NOLAN, K. (orgs.). *Opening the research text: Critical insights and in(ter)ventions into mathematics education*. Nova York: Springer, pp. 159-174.
- _____. (2008b). "Critical professionalism in mathematics teacher education". *Revista Pesquisa Qualitativa*, v. 3, n. 1, pp. 55-72.
- _____. (2008c). "Critical mathematics education for the future". In: NISS, M. (org.). *ICME-10 proceedings and regular lectures*. Roskilde: Imfufa, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Denmark. (CD-ROM)
- _____. (2009a). "Towards as critical professionalism in University science and mathematics education". In: SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. e CHRISTENSEN, O.R. (orgs.). *University sciences and mathematics education in transition*. Nova York: Springer, pp. 325-346.
- _____. (2009b). *In doubt: About language, mathematics, knowledge and life-world*. Rotterdam: Sense Publishers.
- _____. (2010). "Critical mathematics education: In terms of concerns". In: SRIRAMAN, B. et al. (orgs.). *The first sourcebook on Nordic research in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, Inc., pp. 671-682.
- SKOVSMOSE, O. e PENTEADO, M.G. (2011). "Ghettoes in the classroom and the construction of possibilities". In: ATWEH, B. et al. (orgs.). *Mapping equity and quality in mathematics education*. Nova York: Springer.
- SKOVSMOSE, O. e VALERO, P. (2008). "Democratic access to powerful mathematical ideas". In: ENGLISH, L. (org.). *Handbook of international research in mathematics education*. 2ª ed. Nova York/Londres: Routledge, pp. 415-438.
- SKOVSMOSE, O.; ALRØ, H. e VALERO, P. em colaboração com SILVÉRIO, A.P. e SCANDIUZZI, P.P. (2008). "Before you divide you have to add: Inter-viewing Indian students' foregrounds". In: SRIRAMAN, B. (org.). *International perspectives on social justice in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, Inc., pp. 209-230. (The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 1.)
- SKOVSMOSE, O.; VALERO, P. e RAVN CHRISTENSEN, O. (orgs.). (2009). *University sciences and mathematics education in transition*. Nova York: Springer.
- SKOVSMOSE, O. et al. (2008). "Learning mathematics in a Borderland position: Students' foregrounds and intentionality in a Brazilian Favela". *Journal of Urban Mathematics Education*, v. 1, n. 1, pp. 35-59.
- SRIRAMAN, B. (org.) (2008). *International perspectives on social justice in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, Inc. (The Montana Mathematics Enthusiast, Monograph 1.)
- UNESCO (2000). Education for all: Statistical assessment 2000. Paris. [Disponível na internet: <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001204/120472e.pdf>, acesso em 24/5/2014.]

- VALERO, P. (2002). "Reform, democracy, and mathematics education: Towards a socio-political frame for understanding change in the organization of secondary school mathematics". Tese de doutorado. Copenhagen: Department of Curriculum Research, The Danish University of Education.
- _____ (2004). "Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research". In: WALSHAW, M. (org.). *Mathematics education within the postmodern*. Greenwich: Information Age Publishing, pp. 35-54.
- _____ (2007). "In between the global and the local: The politics of mathematics education reform in a globalized society". In: ATWEH, B. et al. (orgs.). *Internationalisation and globalisation in mathematics and science education*. Nova York: Springer, pp. 421-439.
- _____ (2009). "What has power to do with mathematics education?". In: ERNEST, P.; GREER, B. e SRIRAMAN, B. (orgs.). *Critical issues in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, pp. 237-254.
- VALERO, P. e STENTOFT, D. (2010). "The 'post' move of critical mathematics education". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 183-195.
- VALERO, P. e ZEVENBERGEN, R. (orgs.) (2004). *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology*. Dordrecht: Kluwer.
- VITHAL, R. (2007). "The 'Uncivilised' scientist". In: GELLERT, U. e JABLONKA, E. (orgs.). *Mathematisation and demathematisation: Social, philosophical, and educational ramifications*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 95-105.
- _____ (2009). "Researching, and learning mathematics at the margin: From 'Shelter' to school". In: ERNEST, P.; GREER, B. e SRIRAMAN, B. (orgs.). *Critical issues in mathematics education*. Charlotte: Information Age Publishing, pp. 475-484.
- _____ (2010). "Democratising mathematics education doctoral research teaching and learning: Undoing the North-South divide". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 197-207.
- VITHAL, R. e VALERO, P. (2003). "Researching mathematics education in situations of social and political conflict". In: BISHOP, A.J. et al. (orgs.). *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, pp. 545-591.
- WHITEHEAD, A.N. e RUSSELL, B. (1910-1913). *Principia mathematica I-III*. Cambridge: Cambridge University Press.
- WITTGENSTEIN, L. (1958). *Philosophical investigations*. 2ª ed. Trad. de G.E.M. Anscombe. Oxford: Blackwell. (Edição original de 1953.)
- YASUKAWA, K. (2010). "Educating critical mathematics educators: Challenges for teacher educators". In: ALRØ, H.; RAVN, O. e VALERO, P. (orgs.). *Critical mathematics education: Past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 209-224.