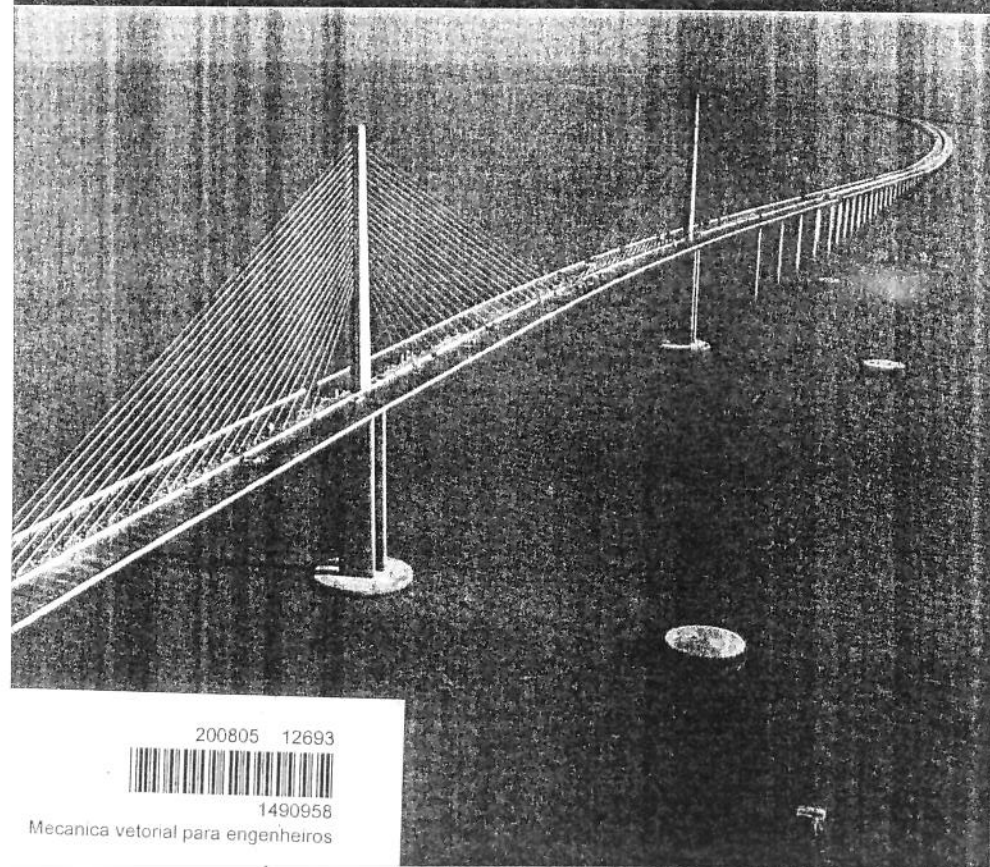


Mecânica Vetorial para Engenheiros

5ª Edição Revisada

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Estática



200805 12693



1490958

Mecânica vetorial para engenheiros



MAKRON Books

Edmarkson Ferre



Mecânica Vetorial para Engenheiros

ESTÁTICA

5ª Edição Revisada

Ferdinand P. Beer

Professor Emérito de Engenharia Mecânica
e Mecânica – Lehigh University

E. Russell Johnston, Jr.

Professor de Engenharia Civil
da University of Connecticut

Tradução

Adolpho Hengeltraub

Professor do Instituto de Física "Gleb Wataghin"
UNICAMP

Revisão Técnica

Giorgio E. O. Giacaglia

Professor Catedrático de Mecânica Geral da
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Revisão Técnica da Edição Revisada

Francisco Moral

Professor do Instituto de Ciências Exatas da
Universidade do Vale do Paraíba – UNIVAP – São José dos Campos



Pearson Education do Brasil

Rua Emílio Goeldi, 747 – Lapa

CEP 05065-110 – São Paulo – SP

Fone: (11) 3611-0770

Fax: (11) 3611-0440

e-mail: vendas@pearsoned.com.br

Do original
Vector Mechanics for Engineers
STATICS

Copyright © 1984, 1977, 1972, 1962 by McGraw-Hill, Inc.
Copyright © 1994, 1991 da Makron Books do Brasil Editora Ltda.

Todos os direitos para a língua portuguesa reservados pela Makron Books do Brasil Editora Ltda.

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema "retrieval" ou transmitida de qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja este eletrônico, mecânico, de fotocópia, de gravação, ou outros, sem prévia autorização, por escrito, das Editoras.

EDITOR: MILTON MIRA DE ASSUMPÇÃO FILHO

Editor Assistente: Aduino Bertolla
Produtora Editorial: Daisy Pereira Daniel
Produtor Gráfico: José Rodrigues

Editoração Eletrônica: JAG Composição Editorial e Artes Gráficas Ltda.

**Dados de Catalogação na Publicação (CIP) Internacional
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Beer, Ferdinand Pierre, 1915-
B362m
v. 1-2
5. ed.

Mecânica vetorial para engenheiros / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr.; tradutor Adolpho Hengeltraub; revisor técnico Giorgio Eugenio Oscare Giacaglia. 5ª ed. revisada Francisco Moral; São Paulo: Makron Books, 1994, 1991.

Conteúdo: v. 1. Estática. v. 2. Dinâmica.

1. Mecânica 2. Mecânica aplicada I. Johnston, Elwood Russell, 1925. II. Título.

17. e 18. CDD – 531.02462
17. e 18. – 620.1
80-1010 18. – 531.0151563

Índices para catálogo sistemático:

1. Mecânica aplicada 620.1 (17. e 18.)
2. Mecânica para engenheiros 531.02462 (17. e 18.)
3. Mecânica vetorial: Física 531.0151563 (18.)

Tabela 1. Prefixos SI

Fator de Multiplicação	Nome*	Símbolo
1 000 000 000 000 000 000 = 10 ¹⁸	exa	E
1 000 000 000 000 000 = 10 ¹⁵	peta	P
1 000 000 000 000 = 10 ¹²	tera	T
1 000 000 000 = 10 ⁹	giga	G
1 000 000 = 10 ⁶	mega	M
1 000 = 10 ³	quilo	k
100 = 10 ²	hecto**	h
10 = 10 ¹	deca**	da
0,1 = 10 ⁻¹	deci**	d
0,01 = 10 ⁻²	centi**	c
0,001 = 10 ⁻³	mili	m
0,000 001 = 10 ⁻⁶	micro	μ
0,000 000 001 = 10 ⁻⁹	nano	n
0,000 000 000 001 = 10 ⁻¹²	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10 ⁻¹⁵	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10 ⁻¹⁸	atto	a

* Na forma oral, os nomes dos múltiplos e submúltiplos decimais das unidades são pronunciados por extenso, prevalecendo a sílaba tônica da unidade.

As palavras quilômetro, decímetro, centímetro e milímetro, consagradas pelo uso com o acento tônico deslocado para o prefixo, são as únicas exceções a essa regra; assim sendo, os outros múltiplos e submúltiplos decimais de metro devem ser pronunciados com o acento tônico na penúltima sílaba (mé), por exemplo: megametro, micrometro (distinto de micrômetro, instrumento de medição), nanometro etc.

** O uso desses prefixos deve ser evitado, salvo para as medidas de áreas e volumes e para uso não técnico do centímetro, como para o corpo humano e medidas de roupas.

Tabela 2. Principais Unidades SI Usadas em Mecânica

Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	metro por segundo, por segundo	...	m/s^2
Ângulo	radiano	rad	*
Aceleração angular	radiano por segundo, por segundo	...	rad/s^2
Área	metro quadrado	...	m^2
Comprimento	metro	m	**
Energia	joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Força	newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Frequência	hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	newton-segundo	...	$\text{N} \cdot \text{s}$
Massa	quilograma	kg	**
Massa específica	quilograma por metro cúbico	...	kg/m^3
Momento de uma força, Torque	newton-metro	...	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potência	watt	W	J/s
Pressão	pascal	Pa	N/m^2
Tensão	pascal	Pa	N/m^2
Tempo	segundo	s	**
Trabalho	joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Velocidade	metro por segundo	...	m/s
Velocidade angular	radiano por segundo	...	rad/s
Volume, sólidos	metro cúbico	...	m^3
Volume, líquidos	litro	ℓ ou L	10^{-3}m^3

* Unidade suplementar (1 revolução = 2π rad = 360°)

** Unidade fundamental

Sumário

PREFÁCIO	XV
LISTA DE SÍMBOLOS	XIX
1	
INTRODUÇÃO	1
1.1 O Que é Mecânica?	1
1.2 Princípios e Conceitos Fundamentais	2
1.3 Sistemas de Unidades	6
1.4 Método de Resolução de Problemas	12
1.5 Precisão Numérica	13
2	
ESTÁTICA DOS PONTOS MATERIAIS	15
2.1 Introdução	15
Forças no Plano	15
2.2 Força sobre um Ponto Material. Resultante de Duas Forças	15
2.3 Vetores	17

2.4	Adição de Vetores	20
2.5	Resultante de Várias Forças Concorrentes	24
2.6	Decomposição de uma Força em Componentes	24
2.7	Componentes Cartesianas de uma Força. Vetores Unitários	34
2.8	Adição de Forças pela Soma das Componentes segundo x e y	40
2.9	Equilíbrio de um Ponto Material	48
2.10	Primeira Lei do Movimento de Newton	49
2.11	Problemas Relacionados ao Equilíbrio de um Ponto Material. Diagrama de Corpo Livre	50
	Forças no Espaço	62
2.12	Componentes Cartesianas de uma Força no Espaço	62
2.13	Força Definida por seu Módulo e Dois Pontos de sua Linha de Ação	68
2.14	Adição de Forças Concorrentes no Espaço	70
2.15	Equilíbrio de um Ponto Material no Espaço	80
	Problemas de Recapitulação	88
	Recapitulação e Sumário	91

3

CORPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FORÇAS		98
3.1	Introdução	98
3.2	Forças Internas e Externas	99
3.3	Princípio da Transmissibilidade. Forças Equivalentes	100
3.4	Produto Vetorial de Dois Vetores	103
3.5	Produto Vetorial Expresso em Termos das Componentes Cartesianas	107
3.6	Momento de uma Força em Relação a um Ponto	109
3.7	Teorema de Varignon	112
3.8	Componentes Cartesianas do Momento de uma Força	113
3.9	Produto Escalar de Dois Vetores	130
3.10	Produto Misto de Três Vetores	135
3.11	Momento de uma Força em Relação a um Eixo Dado	137

3.12	Momento de um Binário	150
3.13	Binários Equivalentes	152
3.14	Adição de Binários	155
3.15	Os Binários Podem ser Representados por Vetores	156
3.16	Decomposição de uma Força Dada em uma Força Aplicada em O e um Binário	157
3.17	Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário	171
3.18	Sistemas Equivalentes de Forças	173
3.19	Sistemas Equipolentes de Vetores	174
3.20	Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças	174
*3.21	Redução de um Sistema de Forças a um Torsor	178
	Problemas de Recapitulação	201
	Recapitulação e Sumário	205

4

EQUILÍBRIO DOS CORPOS RÍGIDOS		215
4.1	Introdução	215
4.2	Diagrama de Corpo Livre	216
Equilíbrio em Duas Dimensões		217
4.3	Reações nos Vínculos de uma Estrutura Bidimensional	217
4.4	Equilíbrio de um Corpo Rígido em Duas Dimensões	219
4.5	Reações Estaticamente Indeterminadas. Vinculação Parcial	222
4.6	Equilíbrio de um Corpo Submetido a Duas Forças	246
4.7	Equilíbrio de um Corpo Submetido a Três Forças	247
Equilíbrio em Três Dimensões		255
4.8	Reações nos Vínculos de uma Estrutura Tridimensional	255
4.9	Equilíbrio de um Corpo Rígido em Três Dimensões	256
Problemas de Recapitulação		279
Recapitulação e Sumário		283

5		
FORÇAS DISTRIBUÍDAS: CENTRÓIDES E BARICENTROS		287
5.1	Introdução	287
	Superfícies e Curvas	288
5.2	Centro de Gravidade de um Corpo Bidimensional	288
5.3	Centróides de Superfícies e Curvas	289
5.4	Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas	292
5.5	Placas e Arames Compostos	296
5.6	Determinação do Centróide por Integração	310
5.7	Teoremas de Pappus-Guldin	312
*5.8	Cargas Distribuídas sobre Vigas	327
*5.9	Forças sobre Superfícies Submersas	329
	Sólidos	341
5.10	Baricentro de um Corpo Tridimensional, Centróide de um Sólido	341
5.11	Corpos Compostos	345
5.12	Determinação dos Centróides Sólidos por Integração	345
	Problemas de Recapitulação	360
	Recapitulação e Sumário	362
6		
ANÁLISE DE ESTRUTURAS		369
6.1	Introdução	369
	Treliças	370
6.2	Definição de Treliça	370
6.3	Treliças Simples	372
6.4	Análise das Treliças pelo Método dos Nós	374
*6.5	Nós sob Condições Especiais de Carregamento	377
*6.6	Treliças Espaciais	380
6.7	Análise de Treliças pelo Método das Seções	389

*6.8	Treliças Compostas	391
	Estruturas e Máquinas	404
6.9	Estruturas Contendo Elementos Submetidos a Várias Forças	404
6.10	Análise de uma Estrutura	404
6.11	Estruturas que Deixam de Ser Rígidas Quando Separadas de seus Vínculos Externos	406
6.12	Máquinas	430
	Problemas de Recapitulação	447
	Recapitulação e Sumário	451
7		
FORÇAS EM VIGAS E CABOS		456
*7.1	Introdução	456
*7.2	Forças Internas nos Elementos	457
	Vigas	465
*7.3	Vários Tipos de Carregamentos e de Vínculos Externos	465
*7.4	Força Cortante e Momento Fletor em uma Viga	467
*7.5	Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor	469
*7.6	Relações entre Carga, Força Cortante e Momento Fletor	480
	Cabos	494
*7.7	Cabos com Cargas Concentradas	494
*7.8	Cabos com Cargas Distribuídas	496
*7.9	Cabo Parabólico	497
*7.10	Catenária	510
	Problemas de Recapitulação	519
	Recapitulação e Sumário	522
8		
ATRITO		529
8.1	Introdução	529
8.2	As Leis do Atrito Seco, Coeficientes de Atrito	530

8.3	Ângulos de Atrito	532
8.4	Problemas Envolvendo Atrito Seco	534
8.5	Cunhas	557
8.6	Parafusos de Rosca Quadrada	558
*8.7	Mancais de Deslizamento. Atrito em Eixos	571
*8.8	Mancais de Escora. Atrito de Giro	572
*8.9	Atrito em Rodas. Resistência ao Rolamento	574
8.10	Atrito em Correias	584
	Problemas de Recapitulação	596
	Recapitulação e Sumário	599
9		
	FORÇAS DISTRIBUÍDAS: MOMENTOS DE INÉRCIA	604
9.1	Introdução	604
	Momentos de Inércia de Superfícies	605
9.2	Momento de Segunda Ordem ou Momento de Inércia de uma Superfície	605
9.3	Determinação do Momento de Inércia de uma Superfície por Integração	607
9.4	Momento Polar de Inércia	610
9.5	Raio de Giração de uma Superfície	610
9.6	Teorema dos Eixos Paralelos	619
9.7	Momentos de Inércia de Superfícies Compostas	622
*9.8	Produto de Inércia	635
*9.9	Eixos e Momentos Principais de Inércia	636
*9.10	Círculo de Mohr para Momentos e Produtos de Inércia	641
	Momentos de Inércia de Corpos	654
9.11	Momento de Inércia de um Corpo	654
9.12	Teorema dos Eixos Paralelos	656
9.13	Momentos de Inércia de Placas Delgadas	658

9.14	Determinação do Momento de Inércia de um Corpo Tridimensional por Integração	661
9.15	Momentos de Inércia de Corpos Compostos	662
*9.16	Momento de Inércia de um Corpo em Relação a um Eixo Arbitrário por um Ponto <i>O</i> . Produtos de Inércia de Corpos	682
*9.17	Elipsóide de Inércia. Eixos Principais de Inércia	684
	Problemas de Recapitulação	694
	Recapitulação e Sumário	697
10		
	MÉTODOS DOS TRABALHOS VIRTUAIS	708
*10.1	Introdução	708
*10.2	Trabalho de uma Força	709
*10.3	Princípio dos Trabalhos Virtuais	712
*10.4	Aplicações do Princípio dos Trabalhos Virtuais	714
*10.5	Máquinas Reais. Rendimento Mecânico	717
*10.6	Trabalho de uma Força Durante um Deslocamento Finito	735
*10.7	Energia Potencial	739
*10.8	Energia Potencial e Equilíbrio	741
*10.9	Estabilidade do Equilíbrio	743
	Problemas de Recapitulação	754
	Recapitulação e Sumário	757
	APÊNDICE	763
	RESPOSTAS AOS PROBLEMAS PARES	767
	ÍNDICE ANALÍTICO	788

mente aplicado a situações práticas que envolvem apenas forças concorrentes. A estática dos corpos rígidos é considerada nos Caps. 3 e 4. No Cap. 3, são introduzidos os produtos escalar e vetorial de dois vetores e usados para definir o momento de uma força em relação a um ponto e a um eixo. À apresentação desses conceitos novos segue-se uma discussão completa e rigorosa de sistemas equivalentes de forças, o que leva, no Cap. 4, a muitas aplicações práticas envolvendo o equilíbrio de corpos rígidos sujeitos a sistemas quaisquer de forças. No volume de *Cinemática e Dinâmica*, observa-se a mesma divisão. Os conceitos básicos de força, massa e aceleração, de trabalho e energia, e de impulso e quantidade de movimento são introduzidos e aplicados primeiro a problemas que envolvem apenas pontos materiais. O estudante pode, assim, se familiarizar com os três métodos básicos utilizados em dinâmica e aprender suas vantagens relativas, antes de enfrentar as dificuldades associadas ao movimento dos corpos rígidos.

Como este texto é destinado a um primeiro curso de Estática, conceitos novos foram introduzidos em termos simples, e cada passo foi explicado detalhadamente. Por outro lado, ao discutir os aspectos mais gerais dos problemas considerados, atingiu-se uma maturidade definitiva de enfoque. Por exemplo, os conceitos de vinculação parcial e de indeterminação estática são introduzidos no início do texto e usados em toda sua extensão.

Foi enfatizado o fato de a Mecânica ser uma ciência essencialmente *dedutiva* e baseada em uns poucos princípios fundamentais. As deduções foram apresentadas em sua sequência lógica e com todo o rigor compatível com esse nível escolar. Entretanto, como o processo de aprendizagem é principalmente *indutivo*, de início foram consideradas aplicações simples. Assim, a estática dos pontos materiais precede a estática dos corpos rígidos, e problemas que envolvem forças internas são adiados até o Cap. 6. Além disso, no Cap. 4, foram antes considerados problemas que envolvem apenas forças coplanares e resolvidos por métodos algébricos escalares, enquanto problemas envolvendo sistemas tridimensionais de forças e que necessitam do uso pleno de álgebra vetorial, são discutidos na segunda parte do capítulo.

Diagramas de corpo livre são introduzidos logo no início, e sua importância é enfatizada ao longo do texto. Tonalidades diferentes de preto e cinza foram usadas para distinguir as forças dos outros elementos do diagrama do corpo livre. Isto faz com que os estudantes identifiquem mais facilmente as forças atuantes em um dado ponto material ou corpo rígido e acompanhem melhor a discussão de problemas resolvidos e outros exemplos dados no texto. Diagramas de corpo livre são usados não só para resolver problemas de equilíbrio como, também, para exprimir a equivalência de dois sistemas de forças ou, mais geralmente, de dois sistemas de vetores. Esse enfoque é particularmente útil como preparo ao estudo da dinâmica dos corpos rígidos. Conforme será mostrado no volume de *Cinemática e Dinâmica*, uma compreensão mais intuitiva e mais completa dos princípios fundamentais da Dinâmica pode ser obtida enfatizando-se as “equações do diagrama de corpo livre”, em vez das equações algébricas do movimento.

Em virtude da tendência atual, entre os engenheiros americanos, de adotar o sistema internacional de unidades (unidades métricas SI), as unidades mais comu-

mente usadas em mecânica, do SI, foram introduzidas no Cap. 1 desta edição e usadas ao longo do texto.*

Foram incluídas inúmeras seções opcionais. Elas estão identificadas por um asterisco e podem, assim, ser facilmente distinguidas daquelas que constituem o corpo do curso básico de Estática. Elas podem ser omitidas sem prejudicar a compreensão do restante. Entre os assuntos tratados nessas seções adicionais há a redução de um sistema de forças a um tissor, aplicações à hidrostática, diagramas de força cortante e momento fletor para barras delgadas, equilíbrio de cabos flexíveis pesados, produtos de inércia e o círculo de Mohr, produtos de inércia e eixos principais de inércia de corpos tridimensionais, e o método dos trabalhos virtuais. As seções sobre barras delgadas são particularmente úteis quando o curso de Estática é seguido imediatamente por um curso de Resistência dos Materiais, enquanto as seções sobre as propriedades de inércia de corpos tridimensionais são destinadas principalmente aos estudantes que irão ver mais tarde a dinâmica do movimento dos corpos rígidos em três dimensões.

A matéria desenvolvida no texto e a maioria dos problemas não requerem nenhum conhecimento prévio de matemática, além da álgebra, trigonometria e cálculo elementar, e todos os elementos de álgebra vetorial necessários à compreensão do texto foram desenvolvidos com cuidado nos Caps. 2 e 3. Em geral, foi dada uma ênfase maior para a compreensão correta dos conceitos matemáticos básicos intervenientes que para a manipulação rápida das fórmulas matemáticas. Com relação a isto, deveria ser mencionado que a determinação de centróides de áreas compostas precede o cálculo de centróides por integração, tornando, assim, possível estabelecer firmeza no conceito de momento de uma área antes de introduzir o uso da integração. A apresentação de soluções numéricas leva em conta a utilização generalizada de máquinas de calcular por parte de estudantes de engenharia. Instruções a respeito do uso adequado de calculadoras, na resolução de problemas típicos de estática, foram incluídas no Cap. 2.

Cada capítulo começa com uma seção introdutória, onde são apresentados a finalidade e os objetivos do capítulo e onde é apresentada, em termos simples, a matéria a ser exposta e sua aplicação à solução de problemas de engenharia. O texto foi dividido em unidades, cada qual formada por uma ou mais seções de teoria, um ou mais problemas resolvidos e um grande número de problemas propostos. Cada unidade corresponde a um assunto bem definido e, geralmente, pode ser coberta em uma aula. Em vários casos, entretanto, o professor achará desejável dedicar mais que uma aula a

* Ao traduzir o texto foram utilizadas, exclusivamente, unidades do SI, baseadas nos padrões de massa (kg), comprimento (m) e tempo (s). As grandezas, que no texto original eram expressas em unidades inglesas, foram transformadas para o SI usando os seguintes fatores de conversão aproximados:

1 polegada = 0,0254 m
1 pé = 0,305 m
1 libra (peso) = 4,448 N
1 milha (internacional) = 1 609 m
1 HP = 745,7 W

(N. do R. T.)

um certo assunto. Cada capítulo termina com uma recapitulação e sumário do assunto tratado. Subtítulos foram incluídos para auxiliar o estudante a organizar seu trabalho de recapitulação, assim como referência ao texto ajudam a localizar o material desejado.

Os problemas resolvidos foram estruturados na forma que, se espera, os estudantes usem na solução dos problemas propostos. Eles servem, assim, ao duplo propósito de completar o texto e demonstrar o tipo de trabalho limpo e organizado que o estudante deveria executar ao obter suas próprias soluções. Os problemas propostos são, em sua maioria, de natureza prática e deveriam ser de interesse dos estudantes de engenharia. Eles são, entretanto, destinados principalmente a ilustrar a matéria desenvolvida no texto e a auxiliar o estudante na compreensão dos princípios básicos da mecânica. Os problemas foram agrupados com as partes da matéria que eles ilustram e foram organizados em ordem de dificuldade crescente. Problemas que requerem atenção especial foram identificados com um asterisco. No fim do livro são dadas as respostas a todos os problemas de número par.

Os autores desejam agradecer os inúmeros e úteis comentários e sugestões oferecidos pelos usuários das edições anteriores de *Mecânica para Engenheiros* e de *Mecânica Vetorial para Engenheiros*.

F. P. B.

E. R. J. Jr.

Lista de Símbolos

a	Constante; raio; distância
A, B, C	Reações em vínculos
A, B, C	Pontos
A	Área
b	Largura; distância
c	Constante
C	Centróide
d	Distância
e	Base dos logaritmos naturais
F	Força; força de atrito
g	Aceleração da gravidade
G	Baricentro, constante de gravitação
h	Altura, flecha de cabo
i, j, k	Vetores unitários ao longo dos eixos coordenados
$I, I_x, \dots$	Momento de inércia
$\bar{I}$	Momento central de inércia

$I_{xy}, \dots$	Produto de inércia
J	Momento polar de inércia
k	Constante de mola
k_x, k_y, k_o	Raio de giração
$\bar{k}$	Raio de giração
l	Comprimento
L	Comprimento; vão
m	Massa
M	Momento; momento de um binário
M_O	Momento em relação ao ponto O
M_O^R	Momento resultante em relação ao ponto O
M	Módulo do momento; massa da Terra; módulo do momento de um binário
M_{OL}	Momento em relação ao eixo OL
N	Componente normal da reação
O	Origem de coordenadas
p	Pressão
P	Força; vetor
Q	Força; vetor
r	Vetor-posição
r	Raio; distância; coordenada polar
R	Força resultante; vetor resultante; reação
R	Raio da Terra
s	Vetor-posição
s	Comprimento de arco; comprimento de cabo
S	Força, vetor
t	Espessura
T	Força

T	Tração
U	Trabalho
V	Força cortante; produto vetorial
V	Volume; energia potencial; cisalhamento
w	Carga por unidade de comprimento
W, W	Força; carga
x, y, z	Coordenadas retangulares; distâncias
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas retangulares do centróide ou centro de gravidade
α, β, γ	Ângulos
γ	Peso específico
δ	Elongação
δ_r	Deslocamento virtual
δ_U	Trabalho virtual
λ	Vetor unitário ao longo de uma reta
η	Rendimento
θ	Coordenada angular; ângulo; coordenada polar
μ	Coefficiente de atrito
ρ	Massa específica
ϕ	Ângulo de atrito; ângulo

Capítulo 1

Introdução

1.1. O que é Mecânica? A Mecânica pode ser definida como a ciência que descreve e prediz as condições de repouso ou movimento de corpos sob a ação de forças. É dividida em três partes: Mecânica dos *Corpos Rígidos*, Mecânica dos *Corpos Deformáveis* e Mecânica dos *Fluidos*.

A Mecânica dos Corpos Rígidos é subdividida em Estática, Cinemática e Dinâmica – a primeira refere-se a corpos em repouso; a segunda e a terceira, a corpos em movimento. Nesta parte do estudo da Mecânica, os corpos são considerados perfeitamente rígidos. Contudo, as estruturas e as máquinas nunca são absolutamente rígidas, deformando-se sob as cargas a que estão submetidas. Mas essas deformações são geralmente pequenas e não alteram apreciavelmente as condições de equilíbrio ou de movimento da estrutura considerada. No entanto, essas deformações terão importância quando houver riscos de ruptura do material, sendo estudadas em Resistência dos Materiais, que é parte da Mecânica dos Corpos Deformáveis. A terceira divisão da Mecânica, a Mecânica dos Fluidos, é subdividida no estudo dos *fluidos incompressíveis* e dos *fluidos compressíveis*. Uma importante subdivisão do estudo de fluidos incompressíveis é a *hidráulica*, a qual se incumbe dos problemas que envolvem líquidos.

Mecânica é uma ciência física, pois trata de fenômenos físicos. Entretanto, alguns associam a Mecânica com a Matemática, enquanto muitos a consideram assunto de Engenharia. Ambos os pontos de vista são justificáveis em parte. A Mecânica é o fundamento da maioria das ciências de Engenharia e é um pré-requisito indispensável a seu estudo. Contudo, não tem o *empirismo* encontrado em algumas ciências de Engenharia, isto é, não confia somente na experiência e na observação; pelo rigor e ênfase colocados no raciocínio dedutivo, assemelha-se à Matemática. Mas não é uma ciência *abstrata* ou mesmo *pura*; Mecânica é uma ciência *aplicada*. A finalidade da

Mecânica é explicar e prever fenômenos físicos, estabelecendo, assim, os fundamentos para as aplicações da Engenharia.

1.2. Princípios e Conceitos Fundamentais. Embora o estudo da Mecânica se tenha iniciado no tempo de Aristóteles (384-322 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.), somente Newton (1642-1727) encontrou uma formulação satisfatória de seus princípios fundamentais. Esses princípios foram mais tarde expressos de forma diferente por D'Alembert, Lagrange e Hamilton. Sua validade permaneceu inalterada até Einstein formular a Teoria da Relatividade (1905). Apesar de suas limitações terem sido reconhecidas, a *Mecânica Newtoniana* ainda constitui a base das ciências atuais de Engenharia.

Os conceitos básicos usados na Mecânica são os de *espaço, tempo, massa e força*. Esses conceitos não podem ser exatamente definidos*; são aceitos com base em nossa intuição e experiência e usados como referência para nosso estudo de Mecânica.

O conceito de *espaço* é associado à noção de posição de um ponto *P*. A posição de *P* pode ser definida por três comprimentos** medidos a partir de um certo ponto de referência, ou de *origem*, segundo três direções dadas. Esses comprimentos são conhecidos como as *coordenadas* de *P*.

Para definir um evento, não é suficiente definir sua posição no espaço; o *tempo*, ou o instante em que o evento ocorre, também deve ser dado.

O conceito de *massa* é usado para caracterizar e comparar os corpos, com base em certas experiências mecânicas fundamentais. Por exemplo, dois corpos de mesma massa (admita que todas as demais condições sejam idênticas) serão atraídos pela Terra da mesma maneira; eles oferecerão, também, a mesma resistência a uma variação do movimento de translação.

A *força* representa a ação de um corpo sobre outro. Pode ser exercida por contato ou a distância, como no caso de forças gravitacionais e forças magnéticas. A força é caracterizada por seu *ponto de aplicação*, sua *intensidade*, *direção* e *sentido*; uma força é representada por um *vetor* (Seção 2.3).

Na *Mecânica Newtoniana*, *espaço*, *tempo* e *massa* são conceitos absolutos, sendo independentes um do outro. (Isto não é verdade na *Mecânica Relativista*, onde o tempo de um evento depende do observador, e onde a massa de um corpo varia com sua velocidade.) Por outro lado, o conceito de força não é independente dos outros três. Realmente, um dos princípios fundamentais da Mecânica Newtoniana, relacionados abaixo, indica que a força resultante que atua sobre um corpo depende da massa do corpo e da maneira como sua velocidade varia com o tempo.

(*) Esses conceitos podem ser definidos dentro de um contexto mais avançado da Mecânica Newtoniana e da Mecânica Relativista (N. do R. T.)

(**) Aqui, os comprimentos são valores algébricos, isto é, números dotados de sinal (N. do R. T.)

Estudaremos as condições de repouso ou de movimento de pontos materiais e de corpos rígidos em termos dos quatro conceitos básicos introduzidos. Por *ponto material* entendemos uma pequena porção da matéria que pode ser considerada como se ocupasse um ponto no espaço. Um *corpo rígido* é uma combinação de um grande número de pontos materiais que ocupam posições fixas, relativamente uns aos outros. O estudo da Mecânica dos pontos materiais é, obviamente, um pré-requisito para o dos corpos rígidos. Além disso, os resultados obtidos para um ponto material podem ser usados diretamente em grande número de problemas referentes a condições de repouso ou de movimento de corpos reais. O estudo da Mecânica elementar repousa em seis princípios fundamentais, baseados em evidências experimentais:

A Lei do Paralelogramo para a Adição de Forças. Estabelece que duas forças atuantes sobre um ponto material podem ser substituídas por uma única força, chamada *resultante*, obtida pela diagonal do paralelogramo cujos lados são iguais às forças dadas (Seção 2.2).

O Princípio de Transmissibilidade. Estabelece que as condições de equilíbrio ou de movimento de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força que atua num dado ponto do corpo rígido for substituída por outra de mesma intensidade, direção e sentido, mas que atua em um ponto diferente, desde que as duas forças tenham a mesma linha de ação (Seção 3.3).

As Três Leis Fundamentais de Newton. Formuladas por sir Isaac Newton, em fins do século XVII, essas leis podem ser enunciadas como se segue:

PRIMEIRA LEI*. Se a intensidade da força resultante** que atua sobre um ponto material é zero, este permanecerá em repouso (se estava originalmente em repouso) ou permanecerá com velocidade constante e em linha reta (se estava originalmente em movimento) (Seção 2.10).

SEGUNDA LEI*.** Se a força resultante que atua sobre um ponto material não é zero, este terá uma aceleração proporcional à intensidade da resultante e na direção desta, com o mesmo sentido.

Como veremos na Seção 12.2 esta lei pode ser expressa como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

* Também chamada de Lei de Inércia (N. do R. T.)

** Para a definição de força resultante, ver a Seção 2.5. (N. do R. T.)

*** Também chamada Lei Fundamental da Mecânica Newtoniana. (N. do R. T.)

onde F , m e a representam, respectivamente, a força resultante que atua sobre a partícula, sua massa e sua aceleração, expressas em um sistema de unidades coerente.*

TERCEIRA LEI.** As forças de ação e reação entre corpos em contato têm a mesma intensidade, mesma linha de ação e sentidos opostos (Seção 6.1).

Lei de Gravitação de Newton. Estabelece que dois pontos materiais de massas M e m são mutuamente atraídos com forças iguais e opostas F e $-F$ de intensidade F dada pela fórmula

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.2)$$

onde r = distância entre os pontos materiais

G = constante universal chamada *constante de gravitação*.

A lei da gravitação de Newton introduz a idéia de uma ação exercida a distância e amplia a faixa de aplicação da terceira lei de Newton: a ação F e a reação $-F$ na Fig. 1.1 são iguais e opostas, e têm a mesma linha de ação.

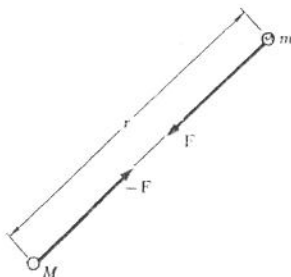


Figura 1.1

* As leis de Newton, como enunciadas, são válidas apenas quando os corpos são referidos a um sistema de referência inercial e o tempo é medido em uma escala uniforme ou escala newtoniana. (N. do R.T.)

** Também chamada Lei da Ação e Reação. (N. do R.T.)

Um caso particular de grande importância é o da atração da Terra sobre um ponto material localizado em sua superfície. A força F exercida pela Terra sobre o ponto é então definida como o seu peso P . Tomando M igual à massa da Terra, m igual à massa do ponto material e r igual ao raio R da Terra, e introduzindo a constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (1.3)$$

a intensidade P do peso de um ponto material de massa m pode ser expressa como*

$$P = mg \quad (1.4)$$

O valor de R na Eq. (1.3) depende da posição do ponto considerado, pois a Terra não é esférica. O valor de g varia, portanto, com a posição do ponto considerado. Enquanto o ponto estiver sobre a superfície da Terra, é suficientemente preciso supor $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ na maioria dos cálculos de engenharia.**

Os princípios que acabamos de enumerar serão introduzidos ao longo de nosso estudo de Mecânica à medida que se tornem necessários. O estudo da estática dos pontos materiais, desenvolvido no Cap. 2, será baseado somente na lei do paralelogramo para adição de forças e na primeira lei de Newton. O princípio da transmissibilidade será introduzido no Cap. 3, quando começarmos o estudo da estática dos corpos rígidos, e a terceira lei de Newton no Cap. 6, quando analisarmos as forças mútuas exercidas pelas partes que compõem uma estrutura. Observe que os quatro princípios mencionados anteriormente sustentam todo o estudo da estática dos pontos materiais, corpos rígidos e conjuntos de corpos rígidos. No estudo da dinâmica, serão introduzidas a segunda lei e a lei da gravitação de Newton. Será mostrado que o princípio da transmissibilidade poderia ser deduzido de outros princípios e, assim, eliminado (Seção 16.5). Até lá, entretanto, a primeira e a terceira leis de Newton, a lei do paralelogramo para adição de forças e o princípio de transmissibilidade, irão nos proporcionar a base necessária e suficiente para o estudo completo da estática.

* Uma definição mais precisa do peso P levaria em consideração a rotação da Terra, desde que se considere um observador situado na Terra, que não é um sistema inercial.

** Se desejarmos usar três algarismos significativos, o valor a ser adotado dependerá fortemente da posição. Assim, é melhor adotar o valor $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ com apenas dois algarismos significativos. (N. do R.T.)

Como foi observado anteriormente, os seis princípios fundamentais, acima citados, baseiam-se na demonstração experimental. Excetuando a primeira lei de Newton* e o princípio da transmissibilidade, são princípios independentes que não podem ser deduzidos matematicamente um do outro ou de qualquer outro princípio físico elementar. Sobre esses princípios repousa a maior parte da intrincada estrutura da Mecânica Newtoniana. Por mais de dois séculos, um número considerável de problemas referentes às condições de repouso e movimento de corpos rígidos, corpos deformáveis e fluidos tem sido resolvido pela aplicação desses princípios fundamentais. Muitas das soluções obtidas poderiam ser verificadas experimentalmente, permitindo então uma confirmação adicional dos princípios dos quais foram deduzidas. Somente nos últimos tempos é que a Mecânica de Newton foi considerada falha, ao se estudar o movimento dos átomos e de certos planetas, quando então foi complementada pela teoria da relatividade. Mas nas atividades humanas ou de engenharia, onde as velocidades são pequenas em relação à velocidade da luz, a Mecânica de Newton tem ainda validade.

1.3. Sistemas de Unidades. Aos quatro conceitos fundamentais introduzidos na seção precedente estão associadas as chamadas *unidades mecânicas*, isto é, as unidades de *comprimento*, *tempo*, *massa* e *força*. Essas unidades não podem ser escolhidas independentemente se a Eq. (1.1) deve ser satisfeita. Três das unidades podem ser definidas arbitrariamente; elas são, então, referidas como *unidades fundamentais*. A quarta unidade, entretanto, deve ser escolhida de acordo com a Eq. (1.1) e é chamada de *unidade derivada*. As unidades mecânicas selecionadas desse modo formam um *sistema coerente de unidades*.

Sistema Internacional de Unidades (SI de unidades). Nesse sistema as unidades básicas são as unidades de comprimento, massa e tempo, e são denominadas, respectivamente, *metro* (m), *quilograma* (kg) e *segundo* (s). As três são arbitrariamente definidas. O segundo, que representa 1/86 400 do dia solar médio, é atualmente definido como a duração de 9 192 631 770 ciclos da radiação associada com uma transição específica do átomo de césio. O metro, originariamente definido como um décimo milionésimo da distância do equador ao pólo, é agora definido como 1 650 763,73 comprimentos de onda da linha vermelha alaranjada do criptônio 86. O quilograma, que é aproximadamente igual à massa de 0,001 m³ de água**, é definido como a massa de um padrão de platina mantido na Repartição Internacional de Pesos e Medidas, em Sèvres, perto de Paris (França). A unidade de força é a unidade derivada. Chamada *newton* (N), é definida como a força que imprime uma aceleração de 1 m/s² à massa de 1 kg (Fig. 1.2). A partir da Eq. (1.1) escrevemos:

* Ver no volume "Dinâmica", nota do tradutor na Seção.

** Destilada, à temperatura de 4°C e à pressão de uma atmosfera

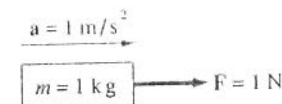


Figura 1.2

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (1.5)$$

As unidades do SI formam um *sistema absoluto* de unidades. Isto significa que as três unidades básicas escolhidas são independentes do local onde as medições são feitas. O metro, o quilograma e o segundo podem ser usados em qualquer parte da Terra; podem, até mesmo, ser usados em outro planeta. Eles terão sempre o mesmo significado.

Como qualquer outra força, o peso de um corpo (ou força gravitacional exercida sobre o corpo) é expresso em newtons. Da Eq. (1.4) segue-se que o peso de um corpo de massa 1 kg (Fig. 1.3) é

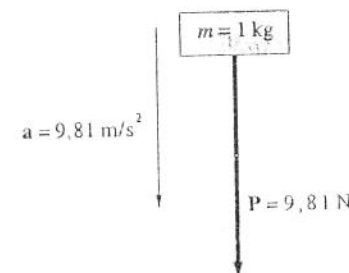


Figura 1.3

$$\begin{aligned} P &= mg \\ &= (1 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) \\ &= 9,81 \text{ N}^* \end{aligned}$$

* Ver nota do R.T. à página 5. (N. do R.T.)

Tabela 1.1 Prefixos do SI

Fator de multiplicação	Nome*	Símbolo
1 000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	exa	E
1 000 000 000 000 000 = 10^{15}	peta	P
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^9	giga	G
1 000 000 = 10^6	mega	M
1 000 = 10^3	quilo	k
100 = 10^2	hecto**	h
10 = 10^1	deca**	da
0,1 = 10^{-1}	deci**	d
0,01 = 10^{-2}	centi**	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a

* Na forma oral, os nomes dos múltiplos e submúltiplos decimais das unidades são pronunciados por extenso, prevalecendo a sílaba tônica da unidade.

As palavras quilômetro, decímetro, centímetro e milímetro, consagradas pelo uso com o acento tônico deslocado para o prefixo, são as únicas exceções a essa regra; assim sendo, os outros múltiplos e submúltiplos decimais do metro devem ser pronunciados com o acento tônico na penúltima sílaba (mé), por exemplo: megametro, micrometro (distinto de micrômetro, instrumento de medição), nanometro etc.

** O uso desses prefixos deve ser evitado, salvo para as medidas de áreas e volumes e para uso não técnico do centímetro, como para o corpo humano e medidas de roupas.

Os múltiplos e submúltiplos das unidades do SI podem ser obtidos por meio do uso dos prefixos definidos na Tabela 1.1. Os múltiplos e submúltiplos das unidades de comprimento, massa e força mais freqüentemente empregados em engenharia são, respectivamente, o *quilômetro* (km) e o *milímetro* (mm); o *megagrama** (Mg) e o *grama* (g); e o *quiloneuton* (kN). De acordo com a Tabela 1.1, temos

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1\,000 \text{ m} & 1 \text{ mm} &= 0,001 \text{ m} \\ 1 \text{ Mg} &= 1\,000 \text{ kg} & 1 \text{ g} &= 0,001 \text{ kg} \\ & & 1 \text{ kN} &= 1\,000 \text{ N} \end{aligned}$$

A conversão dessas unidades em metros, quilogramas e newtons, respectivamente, pode ser efetuada por simples mudança da vírgula três casas para a direita ou para a esquerda. Por exemplo, para converter 3,820 km em metros, move-se a vírgula três casas para a direita

$$3,820 \text{ km} = 3\,820 \text{ m}$$

De modo semelhante, 47,2 mm é convertido em metros movendo-se a vírgula três casas para a esquerda

$$47,2 \text{ mm} = 0,0472 \text{ m}$$

Usando a notação científica, pode-se também escrever

$$\begin{aligned} 3,820 \text{ km} &= 3,820 \times 10^3 \text{ m} \\ 47,2 \text{ mm} &= 47,2 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Os múltiplos da unidade de tempo são o *minuto* (min) e a *hora* (h). Como

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s} \quad \text{e} \quad 1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$$

esses múltiplos não podem ser convertidos tão prontamente quanto os outros.

* Também conhecida como tonelada métrica.

Pelo uso dos múltiplos ou submúltiplos apropriados de uma dada unidade, pode-se evitar escrever números muito grandes ou muito pequenos. Por exemplo, usualmente escreve-se 427,2 km em vez de 427 200 m e 2,16 mm em vez de 0,002 16 m*.

Unidades de Área e Volume. A unidade de área é o *metro quadrado* (m^2), que representa a área de um quadrado de 1 m de lado; a unidade de volume é o *metro cúbico* (m^3), igual ao volume de um cubo de 1 m de lado. A fim de evitar valores numéricos excessivamente pequenos ou grandes, no cálculo de áreas e volumes usam-se sistemas de unidades secundárias, obtidas, respectivamente, quadrando ou elevando ao cubo não somente o milímetro, mas também os dois submúltiplos intermediários do metro — a saber, o *decímetro* (dm) e o *centímetro* (cm). Sendo, por definição,

$$1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$$

os submúltiplos da unidade de área são

$$1 \text{ dm}^2 = (1 \text{ dm})^2 = (10^{-1} \text{ m})^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = (1 \text{ cm})^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$1 \text{ mm}^2 = (1 \text{ mm})^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$$

e os submúltiplos da unidade de volume são

$$1 \text{ dm}^3 = (1 \text{ dm})^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = (1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ mm}^3 = (1 \text{ mm})^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$$

Deve-se observar que, quando o volume de um líquido está sendo medido, o decímetro cúbico (dm^3) é usualmente substituído pelo *litro* (ℓ).

* Deve-se observar que, quando mais de quatro dígitos são usados em qualquer lado da vírgula para exprimir uma quantidade no SI de unidades — como em 427 200 m ou 0,002 16 m —, espaços, nunca pontos, devem ser usados para separar os dígitos em grupos de três. Isto se faz para evitar confusão com o ponto, usado em alguns países em lugar da vírgula. Recomendação do SINMETRO. (N. do R. T.)

Outras unidades derivadas do SI para a medida de momento de força, trabalho etc. são indicadas na Tabela 1.2. Essas unidades serão introduzidas nos capítulos posteriores, à medida que for necessário.

Tabela 1.2 Principais unidades do SI usadas em Mecânica

Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	metro por segundo, por segundo	...	m/s^2
Ângulo	radiano	rad	*
Aceleração angular	radiano por segundo, por segundo	...	rad/s^2
Área	metro quadrado	...	m^2
Comprimento	metro	m	**
Energia	joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Força	newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Frequência	hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	newton-segundo	...	$\text{N} \cdot \text{s}$
Massa	quilograma	kg	**
Massa específica	quilograma por metro cúbico	...	kg/m^3
Momento de uma força, Torque	newton-metro	...	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potência	watt	W	J/s
Pressão	pascal	Pa	N/m^2
Tensão	pascal	Pa	N/m^2
Tempo	segundo	s	**
Trabalho	joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Velocidade	metro por segundo	...	m/s
Velocidade angular	radiano por segundo	...	rad/s
Volume, sólidos	metro cúbico	...	m^3
Volume, líquidos	litro	ℓ ou L	10^{-3} m^3

Notas

** Unidade suplementar (1 revolução = $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$).

*** Unidade fundamental

1.4. Método de Resolução de Problemas. Os alunos devem abordar um problema de mecânica como sendo uma situação real de engenharia. Baseando-se em sua própria experiência e intuição, o aluno terá mais facilidade em compreender e equacionar o problema. Uma vez que o problema esteja claramente estabelecido, não há mais lugar para a imaginação do aluno em sua solução. *A solução deve ser baseada nos seis princípios fundamentais estabelecidos na Seção 1.2 ou nos teoremas deles derivados.* Cada passo dado deve ser justificado. As regras devem ser seguidas rigorosamente, pois conduzem à solução de modo quase automático, não deixando lugar para a intuição ou “palpite” do aluno. Após ter obtido uma resposta, esta deve ser verificada. Nesse estágio, o estudante pode novamente apelar para seu bom senso e experiência pessoal. Se não estiver completamente satisfeito com o resultado, deve verificar cuidadosamente o equacionamento do problema, a validade dos métodos utilizados para sua solução e a exatidão dos cálculos. O enunciado de um problema deve estar claro e preciso. Deve-se relacionar os dados e as informações necessárias. Um desenho nítido mostrando todas as quantidades envolvidas deve ser incluído. Diagramas separados devem ser desenhados para todos os corpos envolvidos, indicando claramente as forças que agem em cada corpo. Esses diagramas são conhecidos como *diagramas de corpo livre* e estão descritos em detalhe nas Seções 2.11 e 4.2.

Os princípios fundamentais da Mecânica enunciados na Seção 1.2 serão usados para formular equações que expressam as condições de repouso ou de movimento dos corpos considerados. Cada equação deve estar claramente relacionada a um dos diagramas de corpo livre. O estudante, então, as resolverá observando as regras usuais da álgebra, registrando claramente as várias passagens.

Após ter sido obtida a resposta, esta deverá ser *cuidadosamente verificada*. Erros no raciocínio podem muitas vezes ser revelados pela verificação das unidades. Por exemplo, para determinar o momento de uma força de 50 N em relação a um ponto 0,60 m distante de sua linha de ação, poderíamos ter escrito (Seção 3.11)

$$M = Fd = (50 \text{ N})(0,60 \text{ m}) = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

A unidade $\text{N} \cdot \text{m}$ obtida pela multiplicação de newtons por metros é a unidade correta para o momento de uma força; se outra unidade tivesse sido obtida, saberíamos que algum erro teria sido cometido.

Erros no cálculo serão comumente descobertos substituindo-se os valores numéricos obtidos em uma equação que ainda não tenha sido usada e verificando-se se a equação está satisfeita. É essencial lembrar que os cálculos em engenharia têm de ser corretos.

1.5. Precisão Numérica. A precisão do resultado de um problema depende de dois fatores: (1) a precisão dos dados fornecidos; (2) a precisão dos cálculos realizados.

A precisão do resultado não pode superar a do menos preciso desses dois fatores. Por exemplo, se a carga de uma ponte é de 375 kN, com um possível erro de 0,5 kN, o erro relativo que mede o grau de precisão do dado é

$$\frac{0,5 \text{ kN}}{375 \text{ kN}} = 0,0013 = 0,13\%$$

Não terá sentido, então, calcular a reação em um apoio da ponte como sendo de 71,60 kN. A precisão do resultado não pode ser maior que 0,13%, não importando quão exatos sejam os cálculos, e o erro possível na resposta deve ser tão grande quanto

$$(0,13/100)(71,60 \text{ kN}) \approx 0,1 \text{ kN}^*$$

O resultado será adequadamente registrado como $(71,6 \pm 0,1) \text{ kN}$.

Em problemas de engenharia, os dados raramente são conhecidos com precisão maior que 0,2%. É, portanto, desnecessário realizar cálculos com grande precisão. Por essa razão, todos os cálculos neste texto serão realizados com a precisão de 0,2%. Uma regra prática é usar 4 algarismos para registrar números começados por “1” e 3 algarismos nos demais casos. Salvo qualquer outra indicação, os dados nos problemas serão considerados conhecidos com esse grau de precisão. Uma força de 40 N, por exemplo, seria lida 40,0 N, e uma força de 15 N seria lida como 15,00 N.**

* Os desvios das medidas devem ser representados por apenas um algarismo significativo. (N. do R. T.)

** 40,0 N obtido com uma incerteza de 0,1 N, ou seja, $(40,0 \pm 0,1) \text{ N}$, tem um desvio relativo de $\frac{0,1 \text{ N}}{40,0 \text{ N}} = 0,0025 = 0,25\%$; 15,00 N obtido com uma incerteza de 0,03 N, ou seja $(15,00 \pm 0,03) \text{ N}$, tem um desvio relativo de $\frac{0,03 \text{ N}}{15,00 \text{ N}} = 0,002 = 0,2\%$, conseqüentemente, mais precisa que a anterior. (N. do R. T.)

Calculadoras eletrônicas de bolso são largamente usadas por engenheiros e por estudantes de engenharia. A velocidade e precisão dessas calculadoras facilita os cálculos numéricos na solução de muitos problemas. Entretanto, o estudante não deve registrar mais algarismos significativos que os necessários, simplesmente porque são facilmente obtidos. Como observamos acima, uma precisão maior que 0,2% é raramente necessária ou não tem significado na solução dos problemas na prática da engenharia.*

Capítulo 2

Estática dos Pontos Materiais

2.1. Introdução. Neste capítulo estudaremos o efeito de forças que atuam em pontos materiais. Em primeiro lugar aprenderemos como substituir duas ou mais forças que agem em um dado ponto material por uma única força que produz o mesmo efeito que as forças originais. Essa força única é a *resultante* das forças que atuam no ponto material. Mais adiante serão deduzidas relações entre as várias forças que atuam em um ponto material em *equilíbrio* e as utilizaremos para determinar algumas das forças que atuam noutro ponto, também em equilíbrio.

A utilização do nome “ponto material” não implica restringir o estudo a pequenos corpúsculos. Significa, sim, que o tamanho e a forma dos corpos em estudo não afetam significativamente a solução dos problemas tratados neste capítulo, de modo que todas as forças que atuam em um dado corpo serão consideradas como atuando em um único ponto. Sendo essa hipótese válida em muitas aplicações práticas, será possível, neste capítulo, resolver um certo número de problemas de engenharia.*

A primeira parte deste capítulo é dedicada ao estudo de forças contidas em um plano e, a segunda, à análise de forças no espaço tridimensional.

FORÇAS NO PLANO

2.2. Força sobre um Ponto Material. Resultante de Duas Forças. Uma força representa a ação de um corpo sobre outro. Ela é caracterizada por seu *ponto de*

* Todo corpo rígido, sujeito à ação de forças cujas linhas de ação concorram num mesmo ponto, pode ser tratado como uma partícula pois, não havendo momentos de força, não haverá rotação do corpo.

aplicação, sua intensidade, direção e sentido. Neste capítulo estudaremos o efeito de forças sobre pontos materiais, e que têm, portanto, o mesmo ponto de aplicação. Basta, então, dar a intensidade, a direção e o sentido de cada força.

A intensidade de uma força é caracterizada por um certo número de unidades. Como foi indicado no Cap. 1, as unidades do SI usadas pelos engenheiros para medir a intensidade de uma força são o newton (N) e seu múltiplo, o quilonewton (kN), igual a 10^3 N.

A direção de uma força é definida por sua *linha de ação*. A linha de ação é a reta ao longo da qual a força atua, sendo caracterizada pelo ângulo que forma com algum eixo fixo (Fig. 2.1). A força é representada por um segmento desta linha; usando uma escala apropriada, o comprimento desse segmento pode ser escolhido para representar a intensidade da força.

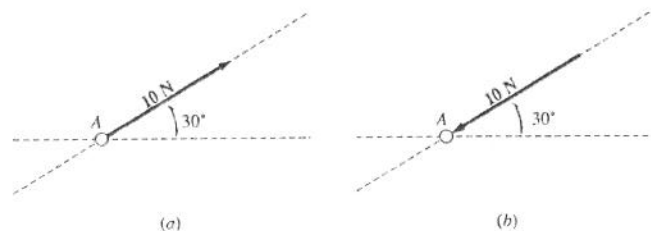


Figura 2.1

Finalmente, o sentido da força pode ser indicado por uma seta. É importante, ao definir uma força, indicar seu sentido. Duas forças, tais como as representadas na Fig. 2.1a e b, que têm a mesma intensidade e a mesma linha de ação mas sentidos diferentes, terão efeitos opostos sobre um ponto material.

Constata-se, experimentalmente, que duas forças **P** e **Q**, que atuam sobre um ponto material A (Fig. 2.2a), podem ser substituídas por uma única força **R** que tenha o mesmo efeito sobre esse ponto (Fig. 2.2c). Essa força é chamada *resultante* das forças **P** e **Q** e pode ser obtida, como mostra a Fig. 2.2b, pela construção de um paralelogramo, usando **P** e **Q** como lados do paralelogramo. A diagonal que passa por A representa a *resultante*. Isto é conhecido como a *lei do paralelogramo* para a adição de duas forças. Essa lei é baseada na experiência, não podendo ser provada ou deduzida matematicamente.

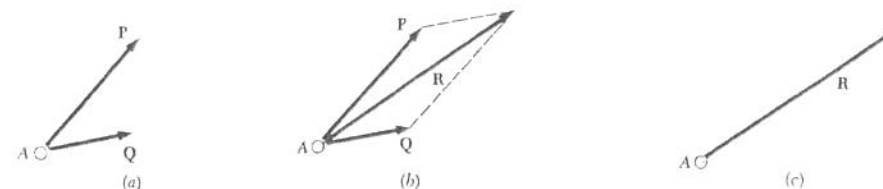


Figura 2.2

2.3. Vetores. Do que foi comentado acima, vê-se que as forças não obedecem às regras de adição definidas na aritmética ou na álgebra. Por exemplo, duas forças com linhas de ação perpendiculares, uma de 4 N e a outra de 3 N, têm como resultante uma força de 5 N e não de 7 N. As forças não são as únicas grandezas que seguem a lei de adição do paralelogramo. Como veremos mais adiante, *deslocamentos*, *velocidades*, *acelerações* e *momentos de força* são outros exemplos de quantidades físicas que possuem intensidade e direção e que são somadas de acordo com a lei do paralelogramo. Todas essas grandezas podem ser representadas matematicamente por *vetores*, enquanto aquelas que não possuem direção, tais como *volume*, *massa* ou *energia*, são representadas por números ordinários ou *escalares*.

Os vetores são definidos como *entes matemáticos que possuem intensidade, direção e sentido e que se somam de acordo com a lei do paralelogramo*.

Os vetores são representados, nas ilustrações, por setas, e serão diferenciados das grandezas escalares, neste texto, pelo uso de letras em negrito (**P**). Na escrita à mão, um vetor pode ser caracterizado por uma seta curta acima da letra usada para representá-lo ($\vec{P}$), ou sublinhando-se a mesma (P). O último processo está ganhando grande aceitação, pois pode ser usado, mais facilmente, em datilografia. A intensidade de um vetor determina o comprimento do segmento de reta usado para representá-lo. Neste texto, a letra itálica será usada para representar a intensidade de um vetor. Então, a intensidade de **P** será representada por *P*.

Um vetor usado para representar uma força que atua em um dado ponto material tem bem definido o seu ponto de aplicação, isto é, o próprio ponto material. Tal vetor é dito *fixo* ou *aplicado* e não pode ser deslocado sem modificar as condições do problema.

Contudo, outras quantidades físicas, tais como momentos (ver Cap. 3), são representadas por vetores que podem deslocar-se, paralelamente a si mesmos, livremente no espaço; estes vetores são chamados *vetores livres*. Ainda outras quantidades físicas, tais como forças atuantes em um corpo rígido (ver Cap. 3), são representadas por vetores que podem ser deslocados ao longo de sua linha de ação; são chamados *vetores deslizantes*.*

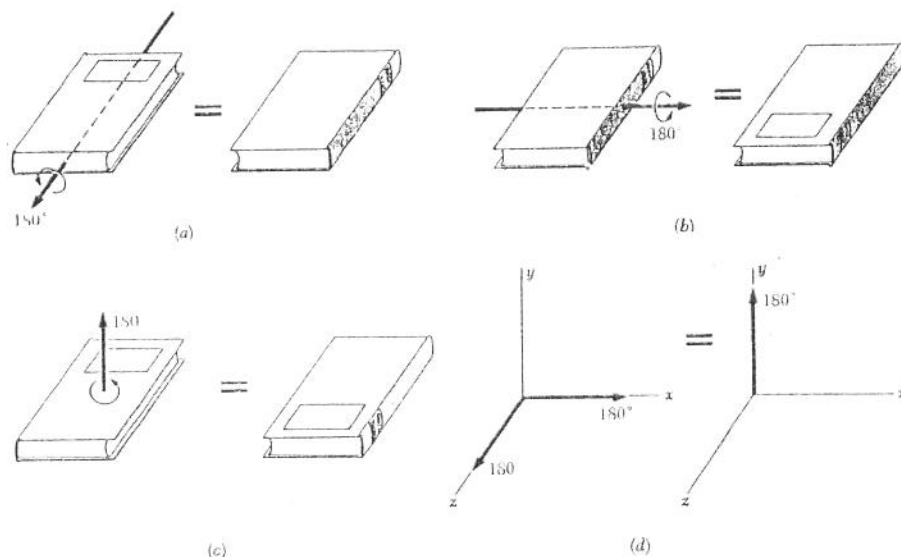


Figura 2.3 Rotações finitas de um corpo rígido.

* Algumas grandezas têm intensidade, direção e sentido, mas não se compõem conforme a lei do paralelogramo. Embora essas grandezas possam ser representadas por segmentos orientados, *não podem* ser consideradas como vetores.

As rotações finitas de um corpo rígido formam um conjunto de tais grandezas. Tome um livro fechado sobre uma mesa diante de você de tal modo que fique em posição de leitura, isto é, com a capa para cima e a lombada à esquerda. Gire-o agora de 180° em torno de um eixo paralelo à lombada (Fig. 2.3a); essa rotação pode ser representada por um segmento de comprimento igual a 180 unidades e orientado conforme mostra a figura. Tomando o livro na nova posição, gire-o de 180° em torno de um eixo horizontal perpendicular à lombada (Fig. 2.3b); essa segunda rotação pode ser representada por um segmento de reta de 180 unidades de comprimento e orientado conforme a figura. Mas o livro poderia ter sido colocado na posição final por meio de uma rotação de 180° em torno de um eixo vertical (Fig. 2.3c). Concluímos que a soma de duas rotações de 180°, representadas pelos segmentos de retas com orientação segundo os eixos z e x , respectivamente, é uma rotação de 180° indicada pelo segmento de reta com orientação segundo o eixo y (Fig. 2.3d). É, pois, evidente que as rotações finitas de um corpo rígido *não* obedecem à lei do paralelogramo para a adição, *não podendo*, pois, ser representadas por vetores.

Dois vetores de mesma intensidade, direção e sentido são ditos iguais, quer tenham ou não o mesmo ponto de aplicação (Fig. 2.4); vetores iguais podem ser indicados pela mesma letra.*

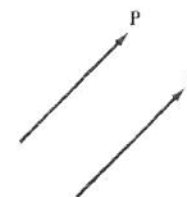


Figura 2.4

O *vetor oposto* de um dado vetor P é definido como sendo um vetor que tem a mesma intensidade e direção de P e sentido oposto ao de P (Fig. 2.5); o vetor oposto de P é representado por $-P$. Os vetores P e $-P$ são comumente chamados de *vetores diretamente opostos*. Obviamente temos

$$P + (-P) = O^{**}$$



Figura 2.5

* Este conceito de igualdade aplica-se apenas aos vetores chamados livres. Para vetores aplicados serem iguais é necessário que também tenham o mesmo ponto de aplicação. Dois vetores aplicados de mesma intensidade, direção e sentido são chamados equipolentes. (N. do R. T.)

** A soma de dois vetores diretamente opostos é o vetor nulo (O) e não o escalar 0 (zero). (N. do R. T.)

2.4. Adição de Vetores. Vimos na seção precedente que, por definição, os vetores são somados segundo a lei do paralelogramo. Então, a soma de dois vetores P e Q é obtida aplicando os dois vetores em um mesmo ponto A e construindo um paralelogramo que tem P e Q como lados (Fig. 2.6). A diagonal que passa por A representa a soma dos vetores P e Q , e essa soma é indicada por $P + Q$. O fato de o sinal $+$ ser usado para indicar tanto a soma vetorial como a escalar não causará qualquer ambigüidade se as grandezas vetoriais e escalares forem sempre distinguidas cuidadosamente. Assim, observamos que a intensidade do vetor $P + Q$ não é, em geral, igual à soma $P + Q$ das intensidades dos vetores P e Q .

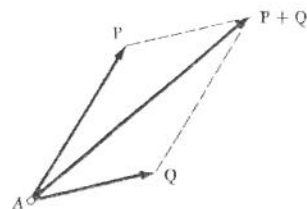


Figura 2.6

Como o paralelogramo construído com os vetores P e Q não depende da ordem segundo a qual P e Q são tomados, concluímos que a adição de dois vetores é *comutativa*, e escrevemos

$$P + Q = Q + P$$

(2.1)

Da lei do paralelogramo, podemos deduzir um método alternativo para a determinação da soma de dois vetores. Esse método, conhecido como a *regra do triângulo*, é deduzido como se segue: consideremos a Fig. 2.6, onde a soma dos vetores P e Q foi determinada pela lei do paralelogramo. Como o lado do paralelogramo oposto a Q é igual a Q em intensidade e direção, poderíamos desenhar apenas a metade do paralelogramo (Fig. 2.7a). A soma dos dois vetores pode ser então determinada pelo reposicionamento de P e Q , de modo que a origem de um vetor esteja sobre a extremidade do outro; e, então, unindo a origem de P com a extremidade de Q . Na Fig. 2.7b considera-se a outra metade do paralelogramo e obtém-se o mesmo resultado, unindo a origem de Q com a extremidade de P . Isto confirma o fato de que a adição vetorial é comutativa.

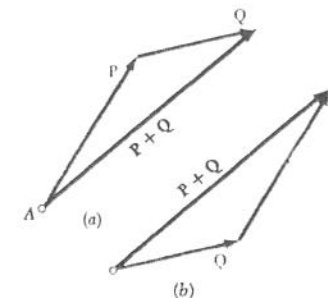


Figura 2.7

Subtrair um vetor é somar o correspondente vetor oposto. Então, o vetor $P - Q$, que representa a diferença entre os vetores P e Q , é obtido pela adição do vetor P ao vetor $-Q$ (Fig. 2.8). Escrevemos

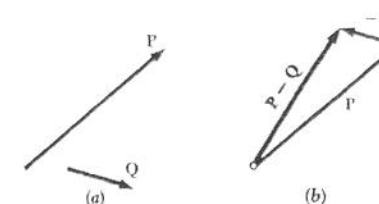


Figura 2.8

$$P - Q = P + (-Q)$$

(2.2)

Observamos, novamente, que o mesmo sinal é usado para significar uma subtração tanto vetorial como escalar; a ambigüidade será evitada tomando-se cuidado na distinção entre grandeza vetorial e escalar.

Consideremos agora a *soma de três ou mais vetores*. A soma de três vetores P , Q e S será, *por definição*, obtida pela adição inicial dos vetores P e Q e, então, somando o vetor S ao vetor $P + Q$. Assim, escrevemos

$$P + Q + S = (P + Q) + S$$

(2.3)

Analogamente, a soma de quatro vetores será obtida pela adição do quarto vetor à soma dos três primeiros. Segue-se que a soma de qualquer número de vetores pode ser obtida pela aplicação repetida da lei do paralelogramo aos sucessivos pares de vetores, até que todos os vetores tenham sido substituídos por um único vetor.

Se os vetores dados forem *coplanares*, isto é, se estiverem contidos no mesmo plano, será fácil obter sua soma graficamente. Nesse caso, a aplicação sucessiva da regra do triângulo será preferida à aplicação da lei do paralelogramo. Na Fig. 2.9, a soma dos vetores P , Q e S é obtida dessa maneira. A regra do triângulo foi primeiramente aplicada para a obtenção da soma $P + Q$ dos vetores P e Q e, então, aplicada novamente para se obter a soma dos vetores $P + Q$ e S . A determinação do vetor $P + Q$, entretanto, poderia ter sido omitida, sendo então a soma dos três vetores obtida diretamente, como mostra a Fig. 2.10, *pelo arranjo dos vetores, de modo que a origem de um vetor coincida com a extremidade do anterior e unindo a origem do primeiro vetor com a extremidade do último*. Isto é conhecido como a *regra do polígono* para a adição dos vetores.

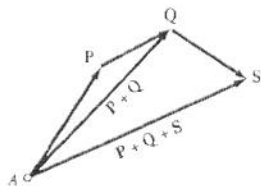


Figura 2.9

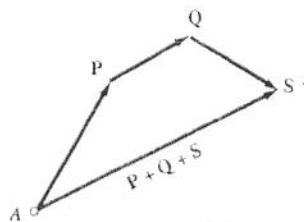


Figura 2.10

Observemos que o resultado obtido permaneceria inalterado se, como mostra a Fig. 2.11, os vetores Q e S fossem substituídos pela soma $Q + S$. Podemos, pois, escrever

$$P + Q + S = (P + Q) + S = P + (Q + S) \quad (2.4)$$

que exprime o fato de ser a adição vetorial, uma operação *associativa*. Lembrando que a adição vetorial no caso de dois vetores é comutativa, escrevemos:

$$\begin{aligned} P + Q + S &= (P + Q) + S = S + (P + Q) \\ &= S + (Q + P) = S + Q + P \end{aligned} \quad (2.5)$$

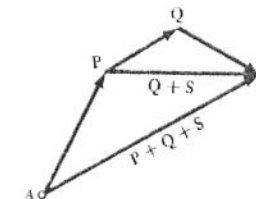


Figura 2.11

Como outras expressões similares que podem ser obtidas, esta expressão mostra que a ordem na qual os vários vetores são somados é irrelevante (Fig. 2.12).

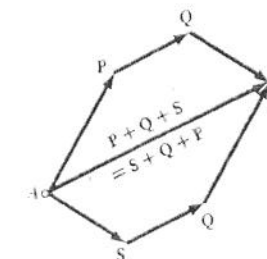


Figura 2.12

Produto de um Escalar por um Vetor. Como é conveniente chamar a soma $P + P$ por $2P$, a soma $P + P + P$ por $3P$ e, em geral, representar a soma de n vetores P iguais pelo produto nP , definiremos o *produto nP* , de um inteiro positivo n por um vetor P , como *um vetor que tenha a mesma direção e sentido de P e a intensidade nP* . Estendendo essa definição para incluir todos os escalares e lembrando a definição de vetor oposto apresentada na Seção 2.2, definimos o produto kP de um escalar k por

um vetor P como um vetor que tenha a mesma direção e sentido de P (se k for positivo) ou direção igual e sentido oposto ao de P (se k for negativo), e a intensidade igual ao produto de P pelo valor absoluto de k (Fig. 2.13).

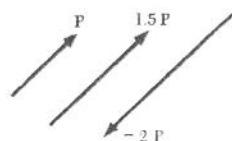


Figura 2.13

2.5. Resultante de Várias Forças Concorrentes. Considere um ponto material A sob a ação de diversas forças coplanares, isto é, várias forças contidas em um mesmo plano (Fig. 2.14a). Como todas as forças aqui consideradas passam pelo ponto A , são chamadas *concorrentes*. Os vetores representativos das forças que atuam sobre A podem ser somados pela regra do polígono (Fig. 2.14b). Como o uso da regra do polígono é equivalente à aplicação repetida da lei do paralelogramo, o vetor R obtido representa a resultante das referidas forças concorrentes, isto é, a força única que tem o mesmo efeito sobre o ponto material A que as forças originais dadas. Como indicamos acima, a ordem em que os vetores P , Q e S , representativos das forças dadas, são somados é irrelevante.

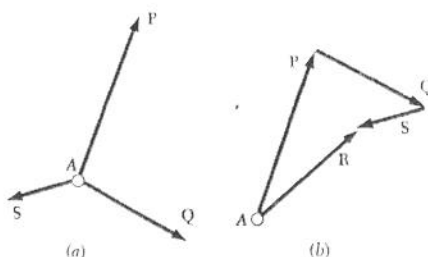


Figura 2.14

2.6. Decomposição de uma Força em Componentes. Vimos que duas ou mais forças atuantes sobre um ponto material podem ser substituídas por uma única força que tenha o mesmo efeito sobre o referido ponto. Reciprocamente, uma única força F que atua sobre um ponto material pode ser substituída por duas ou mais forças que,

juntas, tenham o mesmo efeito sobre o ponto material. Essas forças são chamadas de *componentes* da força original F , e o processo de substituição é chamado de *decomposição da força F em componentes*.

Obviamente, para cada força F existe um número infinito de conjuntos possíveis de componentes. Conjuntos de *duas componentes* P e Q são os mais importantes para aplicações práticas. Mas, mesmo assim, é ilimitado o número de maneiras pelas quais uma dada força F pode ser decomposta em duas componentes (Fig. 2.15). Dois casos são de particular interesse:

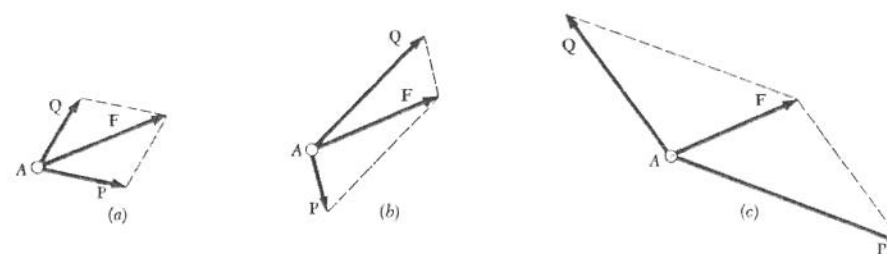


Figura 2.15

1. *Uma das duas componentes, P , é conhecida.* A segunda componente, Q , é obtida pela aplicação da regra do triângulo, unindo a extremidade de P com a extremidade de F (Fig. 2.16). A intensidade e a direção de Q são determinadas gráfica ou trigonometricamente. Uma vez que tenha sido determinada Q , ambas as componentes, P e Q , devem ser aplicadas em A .

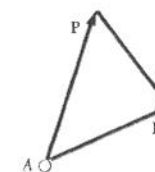


Figura 2.16

2. *A linha de ação de cada componente é conhecida.* A intensidade e o sentido das componentes são obtidos pela aplicação da lei do paralelogramo, traçando retas, paralelas às linhas de ação, que passam pela extremidade de F (Fig. 2.17). Esse processo

conduz a duas componentes **P** e **Q** bem definidas, que podem ser determinadas graficamente ou pela aplicação da lei dos senos.

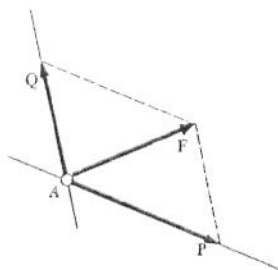
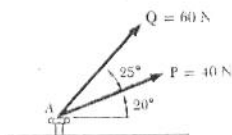


Figura 2.17

Podem ser encontrados muitos outros casos; por exemplo, a direção de uma das componentes pode ser conhecida, ao passo que a outra deve ter a menor intensidade possível (ver Problema Resolvido 2.2). Em todos os casos, pode ser desenhado um triângulo ou paralelogramo adequado, de modo a satisfazer às condições dadas.

Problema Resolvido 2.1

As forças **P** e **Q** agem sobre um parafuso **A**. Determinar sua resultante.

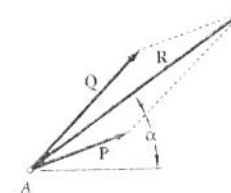


Solução Gráfica. Um paralelogramo de lados iguais a **P** e **Q** é desenhado em escala. A intensidade e a direção da resultante são, então, medidas, encontrando-se os valores

$$R = 98 \text{ N}$$

$$\alpha = 35^\circ$$

$$R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \Leftarrow$$

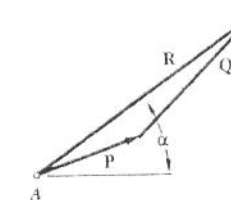


A regra do triângulo também pode ser usada. As forças **P** e **Q** são desenhadas de modo que a origem de uma esteja sobre a extremidade da outra. Novamente, a intensidade e a direção da resultante são medidas

$$R = 98 \text{ N}$$

$$\alpha = 35^\circ$$

$$R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \Leftarrow$$

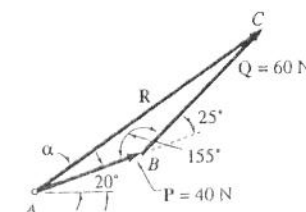


Solução Trigonométrica. A regra do triângulo é de novo usada; dois lados e o ângulo por eles formados são conhecidos. Aplicamos a lei dos co-senos

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$

$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ$$

$$R = 97,7 \text{ N}$$



Agora, aplicando a lei dos senos, escrevemos

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \quad \frac{\sin A}{60 \text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97,7 \text{ N}} \quad (1)$$

Resolvendo a Eq. (1) para $\sin A$, temos

$$\sin A = \frac{(60 \text{ N}) \sin 155^\circ}{97,7 \text{ N}}$$

Usando uma calculadora, primeiro calculamos o quociente, a seguir o arco seno e obtemos

$$A = 15,0^\circ \quad \alpha = 20^\circ + A = 35,0^\circ$$

$$R = 97,7 \text{ N} \quad \angle \quad 35,0^\circ \quad \Leftarrow$$

Solução Trigonométrica Alternativa. Construimos o triângulo retângulo BCD e calculamos

$$CD = (60 \text{ N}) \sin 25^\circ = 25,4 \text{ N}$$

$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54,4 \text{ N}$$

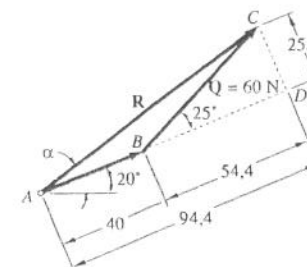
Usando agora o triângulo ACD, obtemos

$$\operatorname{tg} A = \frac{25,4 \text{ N}}{94,4 \text{ N}} \quad A = 15,0^\circ$$

$$R = 25,4 / \sin A \quad R = 97,7 \text{ N}$$

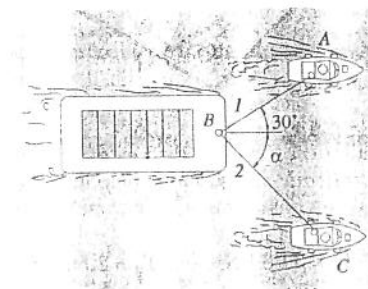
E novamente

$$\alpha = 20^\circ + A = 35,0^\circ \quad R = 97,7 \text{ N} \quad \angle \quad 35,0^\circ \quad \Leftarrow$$



Problema Resolvido 2.2

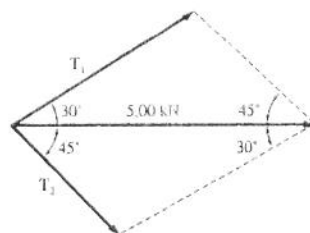
Uma barçaça é puxada por dois rebocadores. Se a resultante das forças exercidas pelos rebocadores é de 5,00 kN e tem a direção do eixo da barçaça, determine: (a) a tração em cada corda, sabendo que $\alpha = 45^\circ$ e (b) o valor de α para que a tração na corda 2 seja mínima.



a) **Tração para $\alpha = 45^\circ$.** **Solução gráfica.** Utiliza-se a lei do paralelogramo. Sabe-se que a diagonal (resultante) tem 5,00 kN e é dirigida para a direita. Os lados são desenhados paralelamente às cordas. Se o desenho é feito em escala*, mede-se

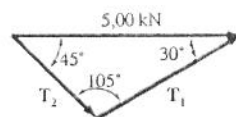
* Usando-se o módulo de escala $\frac{1 \text{ mm}}{0,1 \text{ kN}}$ teremos 50 mm $\equiv$ 5,0 kN. Para manter a precisão seria necessário usar o módulo $\frac{1 \text{ mm}}{0,01 \text{ kN}}$ mas isso implicaria em representar 5,00 kN por um segmento de reta com 500 mm de comprimento.

$$T_1 = 3,6 \text{ kN} \quad T_2 = 2,6 \text{ kN}$$



Solução Trigonométrica. Utiliza-se a lei do triângulo. O triângulo da figura abaixo corresponde à parte inferior do paralelogramo da figura acima. A lei dos senos permite escrever

$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5,00 \text{ kN}}{\sin 105^\circ}$$

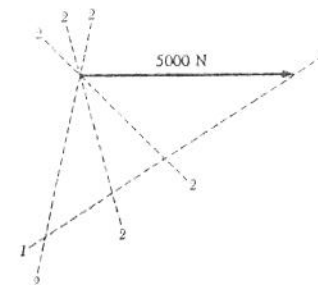


Com uma calculadora, calcula-se e guarda-se na memória o valor do último quociente. Esse valor, multiplicado sucessivamente por $\sin 45^\circ$ e $\sin 30^\circ$, determina

$$T_1 = 3,66 \text{ kN} \quad T_2 = 2,59 \text{ kN}$$

b) **Valor de α para T_2 Mínimo.** A fim de determinar o valor de α que torne mínima a tração na corda 2, utiliza-se a lei do triângulo. No esboço a linha 1-1 tem a direção de T_1 . As linhas 2-2 mostram possíveis direções de T_2 . Nota-se que o valor mínimo de T_2 ocorre quando T_1 e T_2 são ortogonais. O valor mínimo de T_2 é

$$T_2 = (5,00 \text{ kN}) \sin 30^\circ = 2,50 \text{ kN}$$

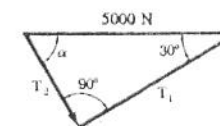


Os valores correspondentes de T_1 e α são

$$T_1 = (5,00 \text{ kN}) \cos 30^\circ = 4,33 \text{ kN}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \Leftarrow$$



Problemas*

2.1 e 2.2 Determine graficamente a intensidade, a direção e o sentido da resultante das duas forças ilustradas, utilizando em cada problema (a) a lei do paralelogramo e (b) a regra do triângulo.

2.3 Duas peças, B e C, estão rebitadas em um suporte A. Sabendo que ambas sofrem compressão por forças de 1200 N em B e 1600 N em C, determine graficamente o módulo, a direção e o sentido da força resultante que age no suporte.

* As respostas dos problemas pares estão no fim do livro.

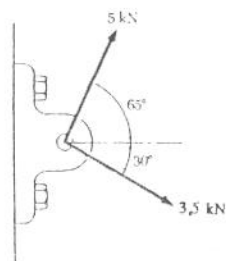


Figura P2.1

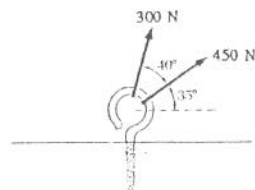


Figura P2.2

2.4 Duas peças B e C estão rebidas em um suporte A. Ambas sofrem compressão por forças de 8 kN, em B, e 12 kN em C. Determine graficamente o módulo, a direção e o sentido da força resultante que age em A.

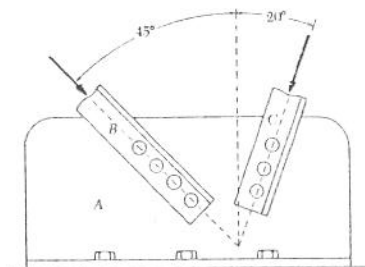


Figura P2.3 e P2.4

2.5 A força F , de intensidade igual a 500 N, é decomposta em duas componentes segundo as direções $a-a$ e $b-b$. Determine, por trigonometria, o ângulo α , sabendo que a componente de F ao longo da linha $a-a$ é de 400 N.

2.6 A força F , de intensidade igual a 400 N, é decomposta em duas componentes segundo as direções $a-a$ e $b-b$. Determine, por trigonometria, o ângulo α , sabendo que a componente de F segundo a linha $b-b$ é de 150 N.

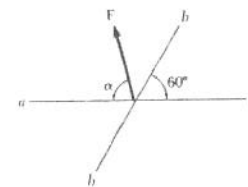


Figura P2.5 e P2.6

2.7 Uma estaca é arrancada do solo com o auxílio de duas cordas, como na figura abaixo. (a) Com $\alpha = 30^\circ$ e utilizando trigonometria, determine o módulo da força P necessário para que a resultante na estaca seja vertical. (b) Qual o módulo correspondente da resultante?

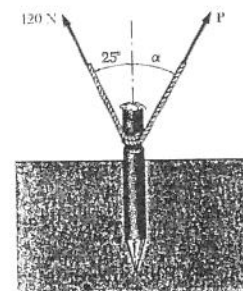


Figura P2.7 e P2.12

2.8 Um carro avariado é puxado por duas cordas, como na figura abaixo. A tração em AB é de 400 N, e o ângulo α é de 20° . Sabendo que a resultante das duas forças aplicadas em A tem a direção do eixo do carro, utilizando trigonometria determine: (a) a tração na corda AC e (b) a intensidade da resultante das duas forças aplicadas em A.

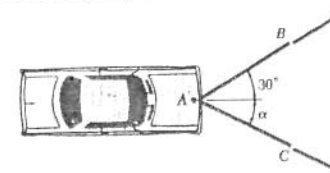


Figura P2.8 e P2.11

2.9 Resolva o Probl. 2.8 supondo que a tração na corda AB é de 2,4 kN e que $\alpha = 25^\circ$.

2.10 Resolva o Probl. 2.7 tomando $\alpha = 40^\circ$.

2.11 Um carro avariado é puxado por duas cordas, como mostra a figura. Sendo a tração na corda AB igual a 500 N, determine por trigonometria a tração na corda AC e o valor de α para que a força resultante em A tenha a direção do eixo do carro e intensidade de 800 N.

2.12 Uma estaca é puxada com o auxílio de duas cordas, como na Fig. P2.7. Sabendo que a força na corda da esquerda é de 120 N, determine por trigonometria o módulo, a direção e o sentido da força P para que a resultante seja uma força vertical de 160 N.

2.13 Resolva o Probl. 2.1 por trigonometria.

2.14 Utilizando trigonometria, determine o módulo e a direção da resultante das duas forças da figura abaixo.

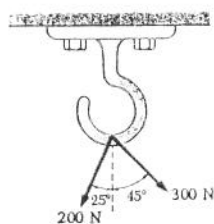


Figura P2.14

2.15 Impondo que a resultante das duas forças aplicadas à estaca do Probl. 2.7 seja vertical, determine: (a) o valor de α para o qual a intensidade de P seja mínima e (b) a intensidade correspondente de P.

2.7. Componentes Cartesianas de uma Força. Vetores Unitários.* Em muitos problemas é desejável decompor uma força em duas componentes normais uma à outra. Na Fig. 2.18, a força F foi decomposta nas componentes F_x , segundo o eixo x , e F_y , segundo o eixo y . O paralelogramo desenhado para a obtenção das duas componentes é um retângulo, e F_x e F_y são denominadas *componentes cartesianas*.

* As propriedades estabelecidas nas Seções 2.7 e 2.8 podem ser estendidas às componentes cartesianas de qualquer grandeza vetorial.

Os eixos y e x são escolhidos usualmente segundo as direções vertical e horizontal*, como na Fig. 2.18, embora possam ser tomados segundo duas direções perpendiculares quaisquer, como mostra a Fig. 2.19. Na determinação das componentes cartesianas de uma força, o estudante deveria considerar as linhas de construção ilustradas nas Figs. 2.18 e 2.19 como sendo *paralelas* aos eixos x e y , em vez de *perpendiculares* aos referidos eixos. Essa prática ajudará a evitar erros na determinação das componentes oblíquas, como na Seção 2.6.

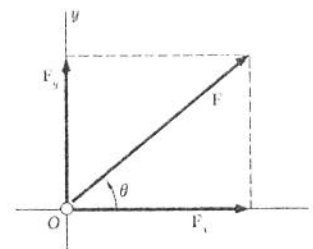


Figura 2.18

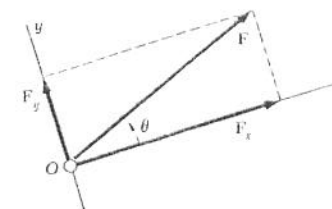


Figura 2.19

Definimos, agora, dois vetores de intensidade** 1, orientados, respectivamente, segundo os eixos positivos x e y . Tais vetores, chamados *vetores-unitários*, são representados por i e j , respectivamente (Fig. 2.20). Relembrando a definição do produto de um escalar por um vetor, dada na Seção 2.4, observamos que as componentes cartesianas F_x e F_y de uma força F podem ser obtidas pela respectiva multiplicação dos vetores unitários i e j por escalares adequados (Fig. 2.21). Escrevemos

$$F_x = F_x i \quad F_y = F_y j \quad (2.6)$$

e

$$F = F_x i + F_y j \quad (2.7)$$

* A posição da horizontal e da vertical depende, é claro, da posição do livro (N. do R.T.)

** Em álgebra vetorial corrente usa-se *módulo* em lugar de intensidade, por razões óbvias. (N. do R.T.)

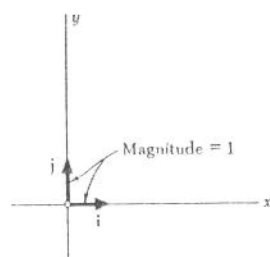


Figura 2.20

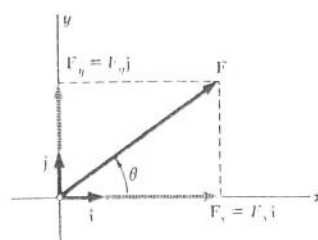


Figura 2.21

Enquanto os escalares F_x e F_y podem ser positivos ou negativos, dependendo do sentido de F_x e F_y , seus valores absolutos são respectivamente iguais às intensidades das forças componentes F_x e F_y . Os escalares F_x e F_y são chamados de *componentes escalares* da força F , enquanto as forças componentes F_x e F_y são denominadas *componentes vetoriais* de F . Entretanto, quando não existir possibilidade de confusão, as componentes tanto vetoriais como escalares de F serão chamadas simplesmente de *componentes* de F . Observamos que a componente escalar F_x será positiva quando a componente vetorial F_x tiver o mesmo sentido que o vetor unitário i (isto é, o mesmo sentido do eixo x) e negativa quando F_x tiver sentido oposto. Uma conclusão análoga pode ser obtida para o sinal da componente escalar F_y .

Denominando F a intensidade da força F e θ o ângulo entre F e o eixo x , medido a partir desse eixo no sentido anti-horário (Fig. 2.21), podemos exprimir as componentes escalares de F como

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Observamos que as relações obtidas são válidas para qualquer ângulo θ entre 0° e 360° e que definem os sinais e os valores absolutos das componentes escalares F_x e F_y .

Exemplo 1. Uma força de 800 N é exercida sobre um parafuso A, como mostra a Fig. 2.22a. Determine as componentes vertical e horizontal da força.

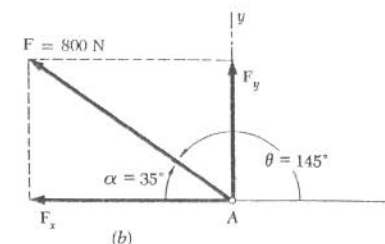
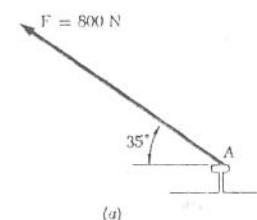


Figura 2.22

A fim de obter o sinal correto para as componentes escalares F_x e F_y , o valor θ^* das relações (2.8) é $\theta = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$. No entanto, será mais prático determinar, por inspeção, os sinais de F_x e F_y (Fig. 2.22b) e usar as funções trigonométricas do ângulo $\alpha = 35^\circ$. Por conseguinte, escrevemos

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N}$$

$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

As componentes vetoriais de F são, então,

$$F_x = -(655 \text{ N})i \quad F_y = +(459 \text{ N})j$$

e podemos escrever F na forma

$$F = -(655 \text{ N})i + (459 \text{ N})j$$

Exemplo 2. Um homem puxa, com uma força de 300 N, uma corda fixada a uma construção, como mostra a Fig. 2.23a. Quais as componentes horizontal e vertical da força exercida pela corda no ponto A?

* O ângulo θ entre um vetor e o eixo x é sempre medido a partir do semi-eixo positivo, no sentido positivo de rotação, ou seja, anti-horário.

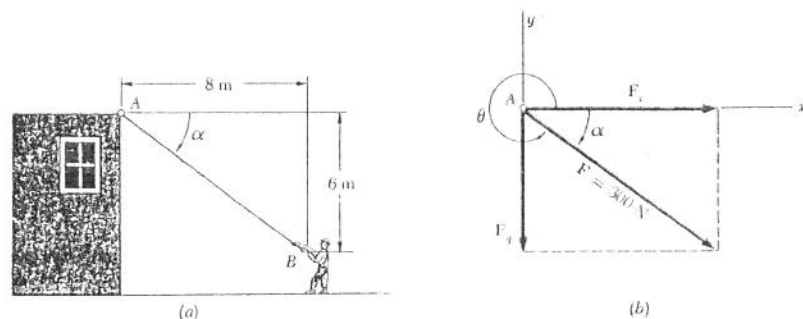


Figura 2.23

Vê-se na Fig. 2.23b que

$$F_x = + (300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = - (300 \text{ N}) \sin \alpha$$

Observando que $AB = 10 \text{ m}$, encontramos, da Fig. 2.23a,

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{AB} = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{6 \text{ m}}{AB} = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Obtemos, então,

$$F_x = + (300 \text{ N}) \frac{4}{5} = + 240 \text{ N} \quad F_y = - (300 \text{ N}) \frac{3}{5} = -180 \text{ N}$$

e escrevemos

$$\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (180 \text{ N})\mathbf{j}$$

Quando uma força $\mathbf{F}$ é definida por suas componentes cartesianas F_x e F_y (ver Fig. 2.21), o ângulo θ que define sua direção pode ser calculado pela expressão

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

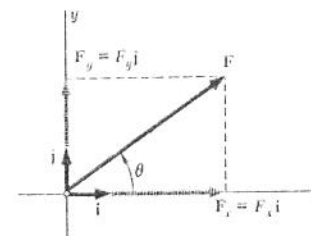


Figura 2.21 (repetida)

A intensidade F da força pode ser obtida pela aplicação do teorema de Pitágoras, isto é

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

No entanto, tendo sido encontrado θ , geralmente é mais fácil determinar a intensidade da força a partir de uma das Eqs. (2.8).

Exemplo 3. A força $\mathbf{F} = (3,50 \text{ kN})\mathbf{i} + (7,50 \text{ kN})\mathbf{j}$ é aplicada a um parafuso A . Determine a intensidade da força e o ângulo que ela forma com a horizontal.

Inicialmente, desenhamos um diagrama mostrando as duas componentes cartesianas da força e o ângulo θ (Fig. 2.24). Da Eq. (2.9), escrevemos

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{7,50 \text{ kN}}{3,50 \text{ kN}}$$

Usando uma calculadora,* entramos com 7,5 kN e dividimos por 3,5 kN; calculando o arco tangente do quociente, obtemos $\theta = 65,0^\circ$. Resolvendo a segunda das Eqs. (2.8) para F , temos

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{7,50 \text{ kN}}{\sin 65,0^\circ} = 8,28 \text{ kN}$$

O último cálculo seria facilitado se o valor de F_y fosse armazenado quando da entrada original; poderia, então, ser recuperado e dividido por $\sin \theta$.

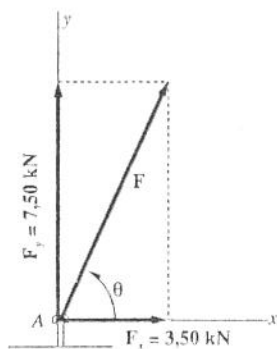


Figura 2.24

2.8. Adição de Forças pela Soma das Componentes segundo x e y. Foi visto, na Seção 2.2, que as forças devem ser adicionadas pela lei do paralelogramo. Dessa lei, outros dois métodos, mais rapidamente aplicáveis à solução gráfica, foram deduzidos nas Seções 2.4 e 2.5: a regra do triângulo, para a adição de duas forças, e a regra do polígono, para a adição de três ou mais forças. Foi também visto que o triângulo de forças, utilizado para definir a resultante de duas forças, pode ser usado para a obtenção de uma solução trigonométrica.

* Admite-se que a calculadora usada tem teclas para cálculos de funções trigonométricas diretas e inversas. Algumas calculadoras também têm teclas para conversão direta de coordenadas cartesianas em polares e vice-versa. Tais calculadoras eliminam a necessidade de cálculo das funções trigonométricas nos Exemplos 1, 2 e 3 e em problemas do mesmo tipo.

Quando devem ser adicionadas três ou mais forças, não se pode obter uma solução trigonométrica prática da regra do polígono de forças que defina a resultante dessas forças. Nesse caso, uma solução *analítica* do problema pode ser obtida pela decomposição de cada uma das forças em duas componentes cartesianas.* Consideremos, por exemplo, três forças P , Q e S atuantes em um ponto material A (Fig. 2.25a). Sua resultante R é definida pela relação

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \quad (2.11)$$

Decompondo cada força em suas componentes cartesianas, escrevemos

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

do que se segue

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.12)$$

ou, de forma compacta,

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad (2.13)$$

Então, concluímos que as componentes escalares R_x e R_y da resultante R de várias forças atuantes sobre um ponto material são obtidas pela adição algébrica das correspondentes componentes escalares das forças dadas.**

Na prática, a determinação da resultante R desenvolve-se em três etapas, como ilustra a Fig. 2.25. Inicialmente, as forças dadas, esquematizadas na Fig. 2.25a, são decompostas em suas componentes x e y (Fig. 2.25b). Adicionando essas componentes, obtemos as componentes x e y de R (Fig. 2.25c). Finalmente, a resultante $R = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ é determinada pela aplicação da lei do paralelogramo (Fig. 2.25d). O procedimento que acaba de ser descrito se desenvolverá mais eficientemente se os cálculos forem orga-

* Estão sendo estudadas forças no plano. (N. do T.)

** Esse resultado se aplica também, obviamente, à adição de qualquer outra grandeza vetorial, tal como velocidade, aceleração ou momento.

organizadas em uma tabela. Além de ser o único método analítico prático para a adição de três ou mais forças, é, muitas vezes, preferido à solução trigonométrica, no caso de adição de duas forças

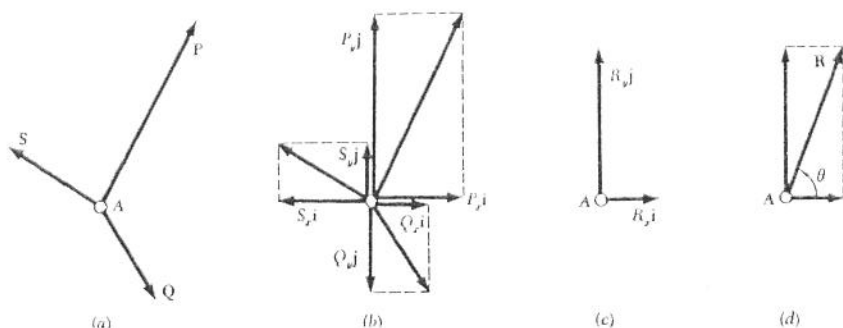
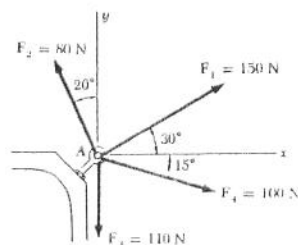


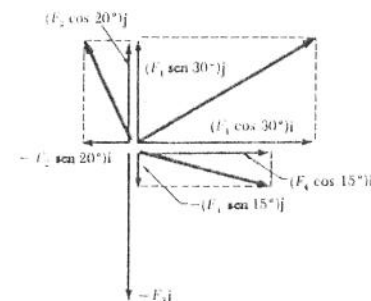
Figura 2.25

Problema Resolvido 2.3

Quatro forças atuam no parafuso A da figura. Determine a resultante das forças que agem no parafuso.



Solução. As componentes x e y de cada força são determinadas como na figura. Segundo a convenção adotada na Seção 2.7, o escalar que representa uma componente de uma força é positivo se a componente tem o mesmo sentido que o eixo coordenado correspondente. Assim, as componentes x que apontam para a direita e as componentes y que apontam para cima são representadas por números positivos.



Força	Intensidade, N	Componentes x , N	Componente y , N
F_1	150	+129,9	+75,0
F_2	80	-27,4	+75,2
F_3	110	0	-110,0
F_4	100	+96,6	-25,9
		$R_x = +199,1$	$R_y = +14,3$

Assim, a resultante das quatro forças é

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = (199,1\text{N})\mathbf{i} + (14,3\text{N})\mathbf{j} \quad \leftarrow$$

A intensidade e a direção da resultante são determinadas a seguir. Do triângulo da figura na outra página temos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14,3 \text{ N}}{199,1 \text{ N}} \quad \alpha = 4,11^\circ$$

$$R = \frac{14,3 \text{ N}}{\sin \alpha} = 199,6 \text{ N}$$

$$R = 199,6 \text{ N} \angle 4,11^\circ \leftarrow$$



Com uma calculadora, o último cálculo pode ser facilitado se o valor de R_y for armazenado ao ser digitado; ele pode ser recuperado para ser dividido por $\sin \alpha$. (Veja, também, a nota no rodapé da página 26.)

Problemas

2.16 a 2.19 Determine as componentes x e y de cada força das figuras.

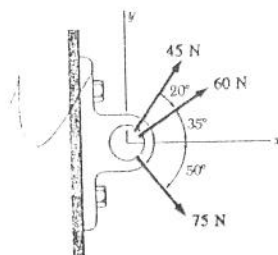


Figura P2.16

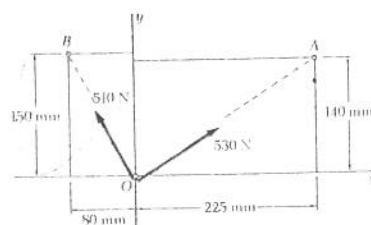


Figura P2.18

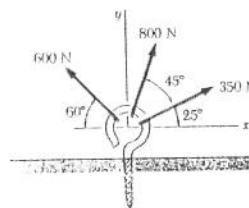


Figura P2.17

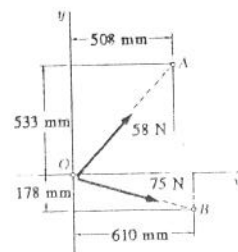


Figura P2.19

2.20 A haste CB exerce no bloco B uma força P dirigida ao longo da reta CB . Sabendo que P tem uma componente horizontal de 200 N, determine: (a) a intensidade da força P e (b) sua componente vertical.

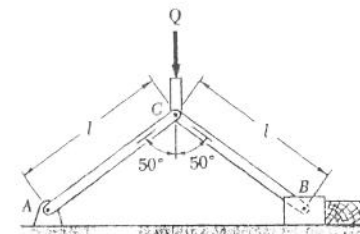


Figura P2.20

2.21 O cilindro hidráulico GE aplica à haste DF uma força P dirigida ao longo da reta GE . Sabendo que P deve ter uma componente de 600 N na direção perpendicular a DF , determine: (a) a intensidade da força P e (b) sua componente paralela a DF .

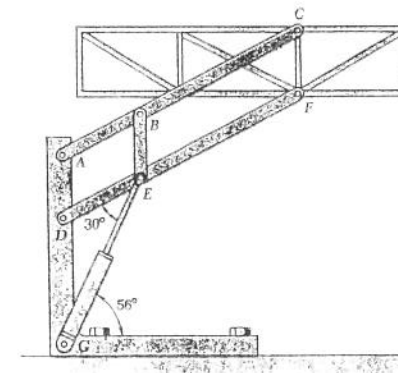


Figura P2.21

2.22 A tração no cabo AC é de 370 N. Determine as componentes horizontal e vertical da força exercida em C .

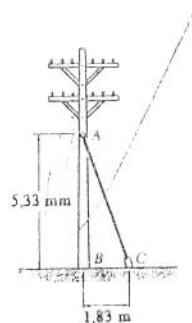


Figura P2.22

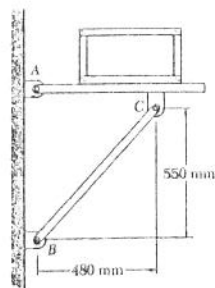


Figura P2.23

2.23 A haste de compressão BC exerce no pino C uma força dirigida ao longo de BC de intensidade 365 N. Determine as componentes horizontal e vertical dessa força.

2.24 Utilizando componentes x e y , resolva o Probl. 2.2.

2.25 Utilizando componentes x e y , resolva o Probl. 2.1.

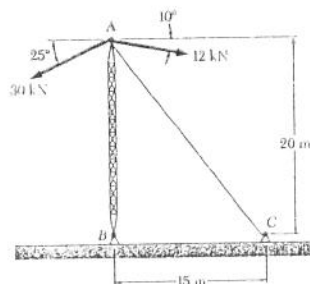
2.26 Determine a resultante das três forças do Probl. 2.17.

2.27 Determine a resultante das três forças do Probl. 2.16.

2.28 Determine a resultante das duas forças do Probl. 2.18.

2.29 Determine a resultante das duas forças do Probl. 2.19.

2.30 Dois cabos sujeitos a trações conhecidas estão presos ao ponto A . Um terceiro cabo, AC , é usado para sustentação. Determine a tração em AC sabendo que a resultante das três forças aplicadas em A deve ser vertical.



Figuras P2.30

2.31 Duas cargas são aplicadas na ponta C da haste BC . Determine a tração no cabo AC , sabendo que a resultante das três forças que atuam em C deve ter a direção de BC .

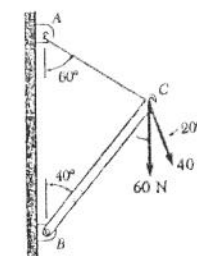


Figura 2.31

2.32 O carrinho da figura é solicitado por três forças. Determine: (a) o valor do ângulo α para o qual a resultante das três forças é vertical e (b) a correspondente intensidade da resultante.

2.33 Uma manga que pode deslizar ao longo de um eixo vertical está sujeita a três forças. Determine: (a) o valor do ângulo α para que a resultante das três forças seja horizontal e (b) a intensidade correspondente da resultante.

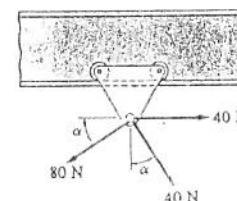


Figura 2.32

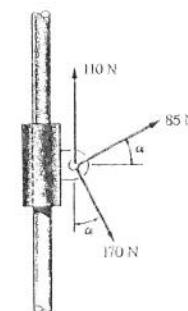


Figura 2.33

2.9. Equilíbrio de um Ponto Material. Nas seções precedentes discutimos os métodos para a determinação da resultante de várias forças que atuam sobre um ponto material. Embora não tenha ocorrido em nenhum dos problemas considerados até agora, é possível que a resultante seja uma força nula. Nesse caso, o efeito global das forças dadas é nulo, e o ponto material está em equilíbrio. Temos, então, a seguinte definição: Quando a resultante de todas as forças que atuam sobre um ponto material é zero, este ponto está em equilíbrio.*

Um ponto material submetido à ação de duas forças estará em equilíbrio quando essas duas forças tiverem a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos, pois nesse caso a resultante das duas forças é zero. Tal caso está ilustrado na Fig. 2.26.

Outro caso de equilíbrio de um ponto material é apresentado na Fig. 2.27, onde são mostradas quatro forças atuantes em A. Na Fig. 2.28 é determinada a resultante das forças dadas pela regra do polígono. Começando do ponto O com F_1 e arranjando as forças de modo que a origem de uma recaia sobre a extremidade da anterior, verificamos que a extremidade de F_4 coincide com o ponto O. Então a resultante R do sistema de forças dadas é zero, e o ponto material se encontra em equilíbrio.



Figura 2.26

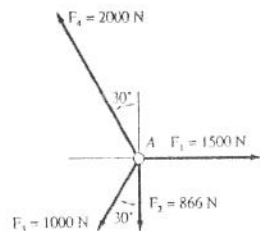


Figura 2.27

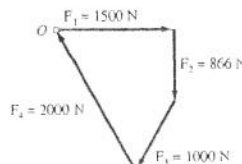


Figura 2.28

O polígono fechado, desenhado na Fig. 2.28, proporciona uma expressão gráfica do equilíbrio de A. Para exprimir algebricamente as condições necessárias de equilíbrio de um ponto material, escrevemos

$$R = \sum F = 0$$

(2.14)

* Repouso ou movimento retilíneo e uniforme, segundo a primeira lei de Newton. (N. do R. T.)

Decompondo cada força F em componentes cartesianas, temos

$$\sum (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = 0 \quad \text{ou} \quad (\sum F_x) \mathbf{i} + (\sum F_y) \mathbf{j} = 0$$

Concluimos que a condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um ponto material é

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

Voltando ao ponto ilustrado na Fig. 2.27, verificamos que são satisfeitas as condições de equilíbrio. Escrevemos

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 1500 \text{ N} - (1000 \text{ N}) \sin 30^\circ - (2000 \text{ N}) \sin 30^\circ \\ &= 1500 \text{ N} - 500 \text{ N} - 1000 \text{ N} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= -866 \text{ N} - (1000 \text{ N}) \cos 30^\circ + (2000 \text{ N}) \cos 30^\circ \\ &= -866 \text{ N} - 866 \text{ N} + 1732 \text{ N} = 0 \end{aligned}$$

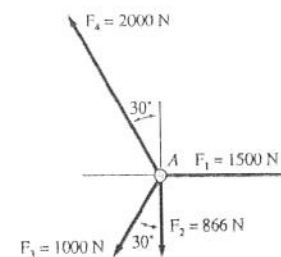


Figura 2.27 (repetida)

2.10. Primeira Lei do Movimento de Newton. Em fins do século XVII, Sir Isaac Newton formulou três leis fundamentais nas quais se baseia a ciência da Mecânica. A primeira dessas leis pode ser assim enunciada:

Se a força resultante que atua sobre um ponto material tem intensidade igual a zero, esse ponto permanece em repouso (se estava originalmente em repouso) ou se move ao longo de uma reta com velocidade constante (se originalmente estava em movimento).

Dessa lei e da definição de equilíbrio dada na Seção 2.9, conclui-se que um ponto material em equilíbrio está em repouso ou movimenta-se em linha reta com velocidade constante. Nas seções seguintes serão estudados vários problemas referentes ao equilíbrio de um ponto material.

2.11. Problemas Relacionados ao Equilíbrio de um Ponto Material.
Diagrama de Corpo Livre. Na prática, um problema de engenharia mecânica é tirado de uma situação física real. Um esquema mostrando as condições físicas do problema é conhecido como *diagrama espacial*.

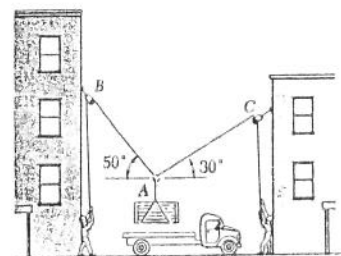
Os métodos de análise discutidos nas seções precedentes aplicam-se a um sistema de forças atuantes sobre um ponto material. Grande número de problemas que envolvem estruturas reais pode ser reduzido, efetivamente, a problemas referentes ao equilíbrio de um ponto material. Isto é feito escolhendo-se um ponto material conveniente e esquematizando-se, em um diagrama separado, todas as forças que sobre ele são exercidas. Tal diagrama é chamado *diagrama de corpo livre*.

Como exemplo, consideremos um caixote de 75 kg, ilustrado no diagrama espacial da Fig. 2.29a. Este caixote estava entre dois prédios e está agora sendo colocado sobre um caminhão, que o removerá. O caixote é suportado por um cabo vertical, unido em A a duas cordas que passam por roldanas fixadas nos prédios, em B e C. Deseja-se determinar a tração em cada uma das cordas AB e AC.

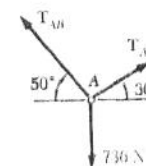
Para resolver este problema, é necessário traçar um diagrama de corpo livre que mostre o ponto material em equilíbrio. Como estamos interessados nas trações das cordas, o diagrama de corpo livre deveria incluir ao menos uma dessas trações ou, se possível, ambas. O ponto A é adequado para servir como corpo livre para este problema. O diagrama de corpo livre do ponto A é a Fig. 2.29b. Ele mostra as forças exercidas sobre A, pelo cabo vertical e pelas duas cordas. A força exercida pelo cabo é dirigida diretamente para baixo e igual ao peso P do caixote. Recordando a Eq. (1.4), escrevemos

$$P = mg = (75 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

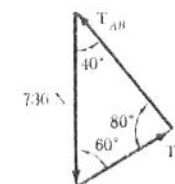
e indicamos esse valor no diagrama de corpo livre. As forças exercidas pelas duas cordas não são conhecidas. Como são iguais em intensidade, respectivamente, às trações nas cordas AB e AC, as representamos por T_{AB} e T_{AC} e as traçamos partindo de A nas direções mostradas no diagrama espacial. Nenhum outro detalhe é incluído no diagrama de corpo livre.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.29 (a) Diagrama espacial (b) Diagrama de corpo livre (c) Triângulo de forças

Como o ponto A está em equilíbrio, as três forças exercidas sobre ele devem formar um triângulo fechado, quando desenhadas de modo que a origem de uma coincida com a extremidade da anterior. Esse *triângulo de forças* foi desenhado na Fig. 2.29c. Os valores T_{AB} e T_{AC} das trações nos cabos poderão ser determinados graficamente se o triângulo for desenhado em escala ou trigonometricamente. Escolhendo o último método, utilizaremos a lei dos senos e escreveremos

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Quando um ponto material está em *equilíbrio sob a ação de três forças*, o problema sempre pode ser resolvido pelo desenho de um triângulo de forças. Quando um ponto material está em *equilíbrio sob a ação de mais de três forças*, o problema pode ser resolvido graficamente pelo desenho de um polígono de forças. Se se deseja uma solução analítica, as *equações de equilíbrio*, dadas na Seção 2.9, devem ser resolvidas:

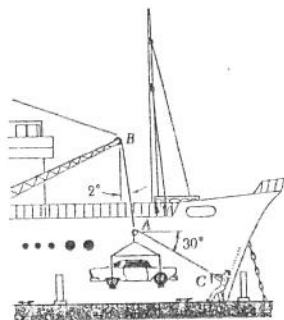
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

Tais equações apresentam solução para um máximo de *duas incógnitas*. Analogamente, o triângulo de forças, usado no caso de equilíbrio de três forças, pode ser resolvido para duas incógnitas apenas.

Os tipos de problemas mais comuns são aqueles nos quais as duas incógnitas representam (1) as duas componentes (ou a intensidade e a direção) de uma única força ou (2) a intensidade de duas forças cujas direções são conhecidas. Também são encontrados problemas que exigem a determinação dos valores máximo e mínimo da intensidade de uma força (ver Probs. 2.44 e 2.45).

Problema Resolvido 2.4

Numa operação de descarga de navio, um automóvel de 17,50 kN é suportado por um cabo. Uma corda é amarrada ao cabo em A e puxada a fim de que o automóvel seja centralizado na posição desejada. O ângulo entre o cabo e a vertical é de 2° , enquanto o ângulo entre a corda e a horizontal é de 30° . Qual a tração nessa corda?



Solução. O ponto A é escolhido para corpo livre e desenha-se um diagrama completo de corpo livre. T_{AB} é a tração do cabo AB, e T_{AC} é a tração na corda AC.

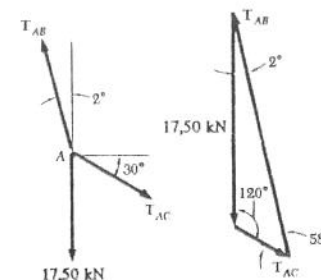
Condição de Equilíbrio. Como somente três forças agem sobre o corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para o equilíbrio. Usando a lei dos senos, escrevemos

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{17,50 \text{ kN}}{\sin 58^\circ}$$

Com uma calculadora, primeiro calculamos e armazenamos o último quociente. Multiplicando sucessivamente esse valor por $\sin 120^\circ$ e $\sin 2^\circ$, obtemos

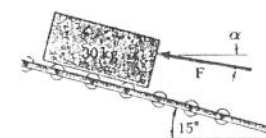
$$T_{AB} = 17,87 \text{ kN}$$

$$T_{AC} = 0,720 \text{ kN}$$



Problema Resolvido 2.5

Determinar a intensidade, a direção e o sentido da menor força F que manterá a caixa em equilíbrio. Observe que a força exercida pelos roletes sobre a caixa é perpendicular ao plano inclinado.



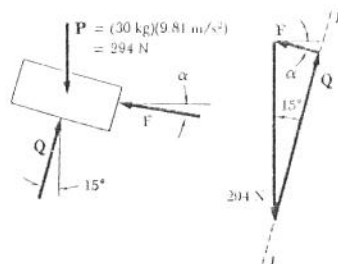
Solução. Escolhemos a caixa como um corpo livre, supondo que possa ser tratada como um ponto material. Traçamos o correspondente diagrama de corpo livre.

Condição de Equilíbrio. Como somente três forças agem no corpo livre, desenhamos um triângulo de forças para o equilíbrio. A linha 1-1 representa a direção conhecida de Q. A fim de obter o mínimo valor da força F, escolhemos a direção de F perpendicular a Q. Da geometria do triângulo obtido, temos

$$F = (294 \text{ N}) \sin 15^\circ = 76,1 \text{ N}$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$F = 76,1 \text{ N} \quad \angle 15^\circ \leftarrow$$



Problema Resolvido 2.6

Como parte do projeto de um novo veleiro deseja-se determinar a força de arrasto a uma dada velocidade. Com esse objetivo, um modelo do casco é colocado em um canal para testes, sendo mantido alinhado com o eixo do canal por meio de três cabos presos a sua proa. Leituras de dinamômetro indicam que, para uma dada velocidade da água, a tração no cabo AB é de 200 N e de 300 N no cabo AE. Determine a força de arrasto no casco e a tração no cabo AC.

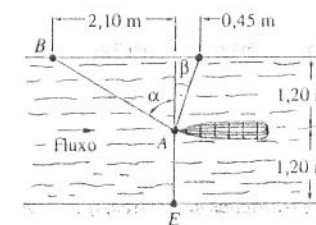
Solução. Em primeiro lugar calculam-se os ângulos α e β , que determinam as direções dos cabos AB e AC. Temos

$$\tan \alpha = \frac{2,10 \text{ m}}{1,20 \text{ m}} = 1,75$$

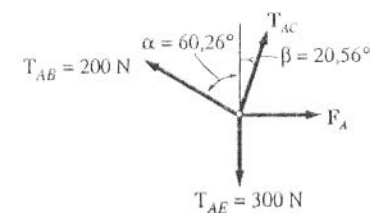
$$\tan \beta = \frac{0,45 \text{ m}}{1,20 \text{ m}} = 0,375$$

$$\alpha = 60,26^\circ$$

$$\beta = 20,56^\circ$$



Escolhe-se o casco para corpo livre e desenha-se o diagrama mostrado. Ele inclui as forças devidas aos três cabos e a força de arrasto F_A devida ao fluxo de água.



Condição de Equilíbrio. Expressa-se a condição de equilíbrio do casco impondo que a resultante de todas as forças seja nula:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_A = \mathbf{0} \quad (1)$$

Como há mais de três forças envolvidas, vamos decompô-las segundo direções x e y :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{AB} &= -(200 \text{ N}) \sin 60,26^\circ \mathbf{i} + (200 \text{ N}) \cos 60,26^\circ \mathbf{j} \\ &= -(173,7 \text{ N}) \mathbf{i} + (99,21 \text{ N}) \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{AC} &= T_{AC} \sin 20,56^\circ \mathbf{i} + T_{AC} \cos 20,56^\circ \mathbf{j} \\ &= 0,3512 T_{AC} \mathbf{i} + 0,9363 T_{AC} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{AE} = -(300 \text{ N}) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_A = F_A \mathbf{i}$$

Substituindo as expressões obtidas na Eq. (1) e pondo em evidência os vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, obtemos

$$(-173,7 \text{ N} + 0,3512T_{AC} + F_A)\mathbf{i} + (99,21 \text{ N} + 0,9363T_{AC} - 300 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

Essa equação é satisfeita se, e somente se, os coeficientes de $\mathbf{i}$ e de $\mathbf{j}$ forem iguais a zero. Obtemos, assim, as duas equações seguintes, que expressam, respectivamente, que a soma das componentes x e a soma das componentes y das forças envolvidas devem ser nulas.

$$(\sum F_x = 0): -173,7 \text{ N} + 0,3512T_{AC} + F_A = 0 \quad (2)$$

$$(\sum F_y = 0): 99,21 \text{ N} + 0,9363T_{AC} - 300 \text{ N} = 0 \quad (3)$$

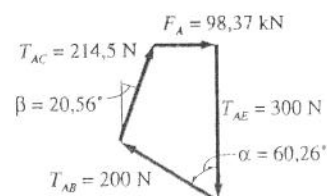
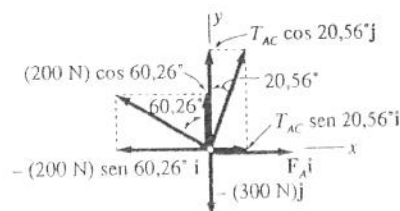
Da Eq. (3) resulta

$$T_{AC} = +214,5 \text{ N}$$

que, substituído na Eq. (2), determina

$$F_A = +98,37 \text{ N}$$

Ao desenhar o diagrama de corpo livre, supusemos um sentido para cada força desconhecida. Um sinal positivo na resposta indica que a hipótese a respeito do sentido é correta. O polígono completo de forças pode ser desenhado para verificar os resultados.



Problemas

2.34 a 2.37 Dois cabos estão atados em C, onde é aplicada uma carga. Determine as trações em AC e BC.

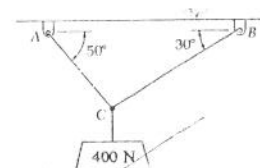


Figura P2.34

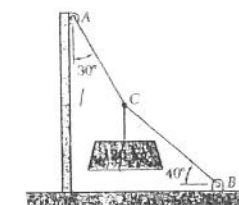


Figura P2.35

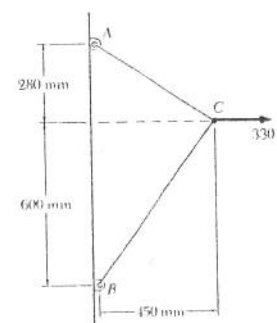


Figura P2.36

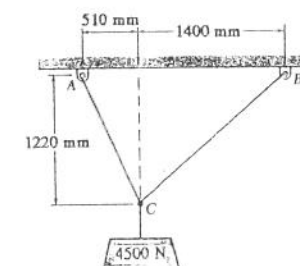


Figura P2.37

2.38 Dois cabos estão atados em C, onde é aplicada uma carga. Sabendo que $P = 400 \text{ N}$ e $\alpha = 75^\circ$, determine as trações em AC e BC.

2.39 Dois cabos são atados em C, onde é aplicada uma carga. Sabendo que $\alpha = 25^\circ$, determine as trações em AC e BC.

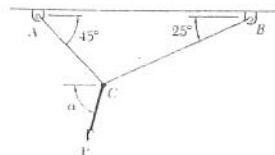


Figura P2.38

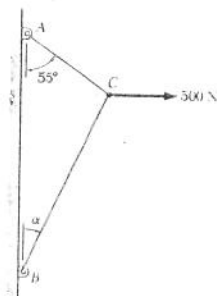
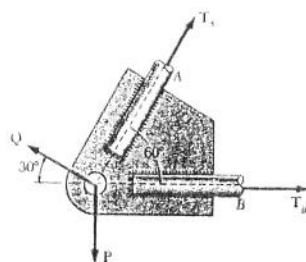


Figura P2.39

2.40 Duas forças P e Q de intensidade $P = 600$ N e $Q = 800$ N são aplicadas a uma conexão de avião. Sabendo que a conexão está em equilíbrio, determine a tração nas barras A e B .

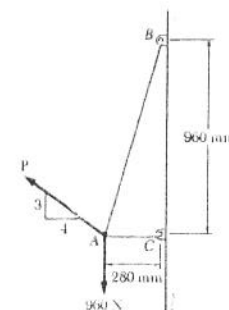
2.41 Duas forças P e Q são aplicadas a uma conexão de avião. Determine a intensidade de cada uma das forças sabendo que a conexão está em equilíbrio e que as trações nas barras A e B são $T_A = 1200$ N e $T_B = 2500$ N.



Figuras P2.40 e P2.41

2.42 Na Fig. P2.42, dois cabos estão atados no ponto A, sujeito a uma carga de 960 N. Sabendo que $P = 640$ N, determine a tração em cada cabo.

2.43 Dois cabos são atados no ponto A (Fig. P2.43) e sujeitos a uma carga de 960 N. Determine o intervalo de valores de P para os quais os dois cabos permanecem esticados.



Figuras P2.42 e P2.43

2.44 Determine o ângulo α da Fig. P2.39 para o qual a tração é a menor possível: (a) no cabo BC e (b) simultaneamente nos dois cabos. Em cada caso, determine as trações nos dois cabos.

2.45 Nos cabos da Fig. P2.38, a maior tração permitida é de 300 N no cabo AC e de 400 N no cabo BC . Determine: (a) a maior força P que pode ser aplicada em C e (b) o valor correspondente de α .

2.46 A manga A com 7,5 kg desliza sem atrito em um eixo vertical. Ela está presa por um fio, através de uma polia sem atrito a um peso de 8,5 kg. Determine a altura h para que o sistema esteja em equilíbrio.

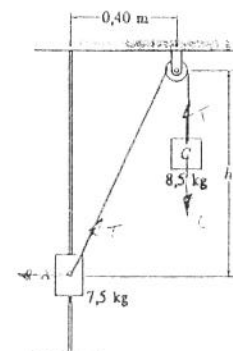


Figura P2.46

2.47 Uma caixa e seu conteúdo pesam 480 kg. Determine o menor tamanho da corrente, ACB , que pode ser utilizada para levantar a caixa e seu conteúdo se a tração na corrente não pode exceder 3650 N.

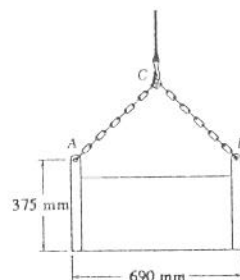


Figura P2.47

2.48 Caixotes de 300 kg estão suspensos por diversas combinações de corda e roldana. Determine, em cada caso, a tração na corda. (A tração na corda é a mesma dos dois lados da roldana. Isto pode ser provado com os métodos que serão vistos no Cap. 4*.)

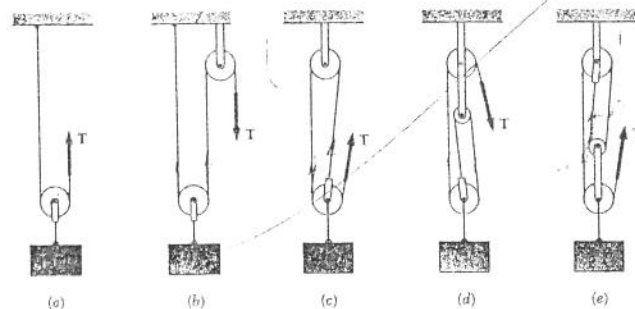


Figura P2.48

* Desprezando atritos na roldana. (N. do T.)

2.49 Resolva as partes b e d do Probl. 2.48 supondo que a ponta livre da corda seja presa ao caixote.

2.50 A força P é aplicada a uma pequena roda que se desloca sobre um cabo ACB . Sabendo que a tração nas duas partes do cabo é de 750 N, determine o módulo e a direção de P .

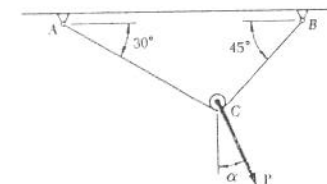


Figura P2.50

2.51 Um caixote de 300 kg deve ser sustentado pelo arranjo de cordas e polias da figura. Determine o módulo e a direção da força F que deve ser aplicada à extremidade da corda.

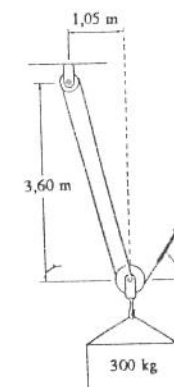


Figura P2.51

2.52 A manga A pode deslizar livremente sobre o eixo horizontal, sem atrito. A mola presa à manga tem constante 1751 N/m e elongação nula quando a manga está diretamente embaixo do suporte B . Determine a intensidade da força P necessária para manter o equilíbrio quando: (a) $c = 228$ mm e (b) $c = 406$ mm.

2.53 Um bloco de 150 kg pende de uma pequena polia que pode rolar sobre o cabo ACB. A polia e sua carga são mantidas na posição ilustrada na figura por um segundo cabo DE, paralelo ao trecho CB do cabo. Determine: (a) a tração no cabo ACB e (b) a tração no cabo DE. Despreze o raio da polia e a massa dos cabos e da roldana.

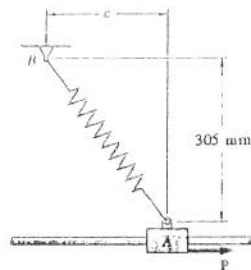


Figura P2.52

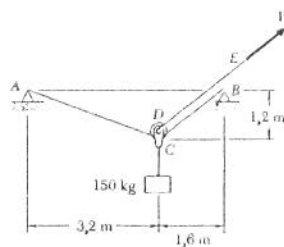


Figura P2.53

Forças no Espaço

2.12. Componentes Cartesianas de uma Força no Espaço. Os problemas considerados na primeira parte deste capítulo envolviam somente duas dimensões, isto é, podiam ser formulados e resolvidos em um plano. Nesta seção e nas restantes deste capítulo, discutiremos problemas que envolvem as três dimensões do espaço.

Consideremos uma força F aplicada na origem O de um sistema de coordenadas cartesianas x, y e z . Para definir a direção de F , podemos desenhar o plano vertical $OBAC$, mostrado na Fig. 2.30a, que contém F . Esse plano contém o eixo vertical y , e sua orientação é definida pelo ângulo ϕ que forma com o plano xy , enquanto a direção de F dentro desse plano é definida pelo ângulo θ_y que F forma com o eixo y . A força F pode ser decomposta em uma componente vertical F_y e uma componente horizontal F_h . Essa operação, ilustrada na Fig. 2.30b, é executada dentro do plano $OBAC$ de acordo com as regras desenvolvidas na primeira parte deste capítulo. As componentes escalares são

$$F_y = F \cos \theta_y \quad F_h = F \sin \theta_y \quad (2.16)$$

Mas F_h pode ser decomposta em duas componentes cartesianas F_x e F_z segundo os eixos x e z , respectivamente. Essa operação, ilustrada na Fig. 2.30c, é efetuada no plano xz . Obtemos, então, as seguintes expressões para as componentes escalares correspondentes:

$$F_x = F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \quad (2.17)$$

$$F_z = F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$

A força dada F foi, pois, decomposta em três componentes vetoriais F_x , F_y e F_z orientadas segundo os três eixos coordenados.

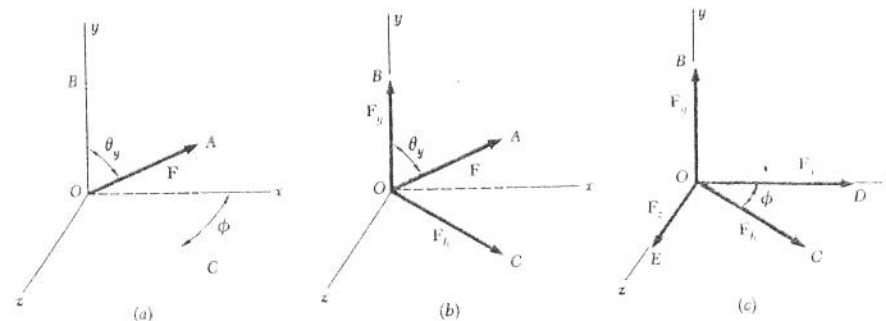


Figura 2.30

Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos OAB e OCD da Fig. 2.30, escrevemos

$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2$$

$$F_h^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2$$

Eliminando F_h^2 dessas duas equações e calculando F , obtemos a seguinte relação entre a intensidade de F e suas correspondentes componentes escalares cartesianas:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

A relação existente entre a força F e suas três componentes F_x , F_y e F_z será entendida mais facilmente se for desenhada uma caixa que tenha F_x , F_y e F_z por arestas, como mostra a Fig. 2.31. A força F é então representada pela diagonal OA dessa caixa. A Fig. 2.31b mostra o triângulo retângulo OAB , utilizado para deduzir a primeira das fórmulas (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. Nas Figs. 2.31a e c, dois outros triângulos retângulos foram também desenhados: OAD e OAE . Como vemos, esses triângulos ocupam posições na caixa comparáveis à do triângulo OAB . Denominando θ_x e θ_z , respectivamente, os ângulos que F forma com os eixos x e z , podemos deduzir duas fórmulas semelhantes a $F_y = F \cos \theta_y$. Então escrevemos

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

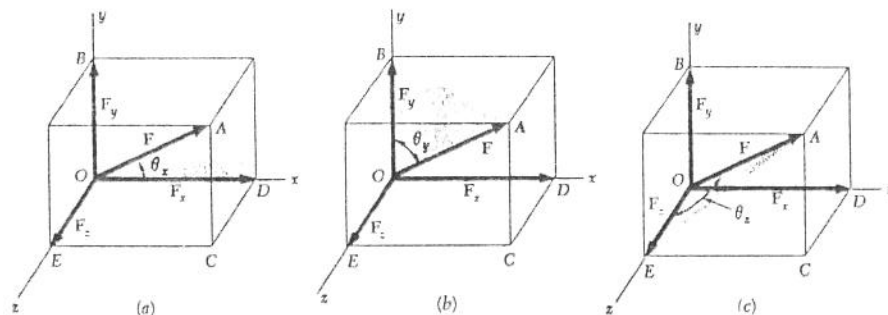


Figura 2.31

Os três ângulos θ_x , θ_y e θ_z definem a direção da força F . São mais comumente usados que os ângulos θ_y e ϕ apresentados no início desta seção. Os co-senos de θ_x , θ_y e θ_z são conhecidos como os *co-senos diretores* da força F .

Introduzindo os vetores unitários i , j e k , orientados segundo os eixos x , y e z respectivamente (Fig. 2.32), podemos exprimir F na forma

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (2.20)$$

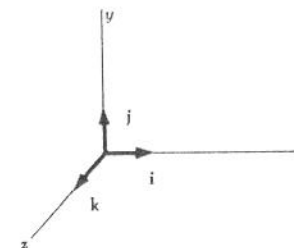


Figura 2.32

onde as componentes escalares F_x , F_y e F_z são definidas pelas Eqs. (2.19).

Exemplo 1. Uma força de 500 N forma ângulos de 60° , 45° e 120° , respectivamente, com os eixos x , y e z . Determine as componentes F_x , F_y e F_z da força.

Substituindo $F = 500$ N, $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$ e $\theta_z = 120^\circ$ nas Eq. (2.19), obtemos

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N}$$

$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N}$$

Levando os valores obtidos para as componentes escalares de F na Eq. (2.20), temos

$$F = (250 \text{ N})i + (354 \text{ N})j - (250 \text{ N})k$$

Como no caso de problemas bidimensionais, o sinal positivo indica que a componente tem mesmo sentido do eixo correspondente e o sinal negativo indica que ela tem sentido oposto.

O ângulo que uma força F forma com um eixo será medido a partir do semi-eixo positivo e estará sempre compreendido entre 0° e 180° . Um ângulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que F (supostamente aplicada em O) está do mesmo lado do plano yz que o semi-eixo positivo x ; nesse caso, $\cos \theta_x$ e F_x serão positivos. Um ângulo θ_x maior que 90° (obtusos) indicará que F está do outro lado do plano yz ; nesse caso, $\cos \theta_x$ e F_x serão ambos negativos. No Exemplo 1, os ângulos θ_x e θ_y são agudos, enquanto θ_z é obtuso; conseqüentemente, F_x e F_y são positivos, e F_z é negativo.

Substituindo em (2.20) as expressões obtidas para F_x , F_y e F_z em (2.19), escrevemos

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

que mostra que a força F pode ser expressa como o produto do escalar F pelo vetor

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

Obviamente, o vetor $\boldsymbol{\lambda}$ é um vetor de módulo unitário e de mesma direção e sentido que F . (Fig. 2.33). Nos referiremos a $\boldsymbol{\lambda}$ como o vetor unitário segundo a linha de ação de F . Segue-se da Eq. (2.22) que as componentes do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ são, respectivamente, iguais aos co-senos diretores da linha de ação de F .

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (2.23)$$

Devemos observar que os valores dos três ângulos θ_x , θ_y e θ_z não são independentes. Levando em conta que a soma dos quadrados das componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ é igual ao quadrado de seu módulo, escrevemos

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

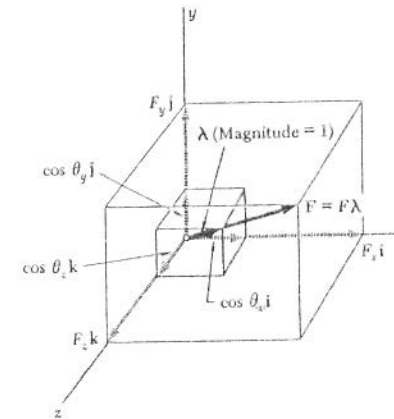


Figura 2.33

ou, substituindo λ_x , λ_y e λ_z de (2.23),

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

No Exemplo 1, uma vez escolhidos os valores $\lambda_x = 60^\circ$ e $\lambda_y = 45^\circ$, o valor de λ_z deve ser igual a 60° ou 120° , para satisfazer a identidade (2.24).

Quando forem dadas as componentes F_x , F_y e F_z de uma força F , o módulo F da força será obtido da Eq. (2.18).* As Eqs. (2.19) podem, então, ser resolvidas para os co-senos diretores

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

e os ângulos θ_x , θ_y e θ_z , que caracterizam a direção de F , podem ser determinados.

* Com uma calculadora programada para converter coordenadas cartesianas em polares, o seguinte procedimento possibilitará maior rapidez para o cálculo de F : primeiro, determine F_h de suas duas componentes cartesianas F_x e F_y (Fig. 2.30c); então determine F de suas duas componentes cartesianas F_h e F_z (Fig. 2.30b). A ordem na qual as três componentes F_x , F_y e F_z são apresentadas é irrelevante.

Exemplo 2. Uma força $\mathbf{F}$ tem as componentes $F_x = 100 \text{ N}$, $F_y = -150 \text{ N}$ e $F_z = 300 \text{ N}$. Determine seu módulo F e os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que ela forma com os eixos coordenados.

Da Eq. (2.18) obtemos*

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(100 \text{ N})^2 + (-150 \text{ N})^2 + (300 \text{ N})^2} \\ &= \sqrt{122,5 \times 10^3 \text{ N}^2} = 350 \text{ N} \end{aligned}$$

Substituindo os valores das componentes e do módulo de $\mathbf{F}$ nas Eqs. (2.25), escrevemos

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{100 \text{ N}}{350 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-150 \text{ N}}{350 \text{ N}} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{300 \text{ N}}{350 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco co-seno, obtemos

$$\theta_x = 73,4^\circ \quad \theta_y = 115,4^\circ \quad \theta_z = 31,0^\circ$$

Os cálculos indicados podem facilmente ser realizados com uma calculadora.

2.13. Força Definida por seu Módulo e Dois Pontos de sua Linha de Ação. Em muitas aplicações, a direção de uma força $\mathbf{F}$ é definida pelas coordenadas de dois pontos, $M(x_1, y_1, z_1)$ e $N(x_2, y_2, z_2)$, localizados sobre sua linha de ação (Fig. 2.34).

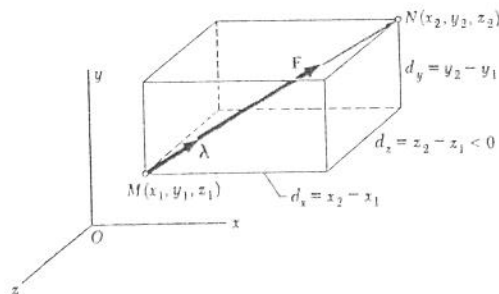


Figura 2.34

* Com uma calculadora programada para converter coordenadas cartesianas em polares, o seguinte procedimento possibilitará maior rapidez para o cálculo de F : primeiro, determine F_h de suas duas componentes cartesianas F_x e F_z (Fig. 2.30c.); então determine F de suas duas componentes cartesianas F_h e F_y (Fig. 2.30b). A ordem na qual as três componentes F_x , F_y e F_z são apresentadas é irrelevante.

Consideremos o vetor $\vec{MN}$, que liga os pontos M e N e que tem o mesmo sentido que $\mathbf{F}$. Representando suas componentes escalares por d_x , d_y e d_z , respectivamente, escrevemos

$$\vec{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

O vetor unitário λ ao longo da linha de ação de $\mathbf{F}$ (isto é, ao longo da linha MN) pode ser obtido dividindo-se o vetor $\vec{MN}$ por seu módulo MN . Utilizando $\vec{MN}$ de (2.26) e observando que MN é igual à distância d de M a N , escrevemos

$$\lambda = \frac{\vec{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Lembrando que $\mathbf{F}$ é igual ao produto de F por λ tem-se

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

do que se segue que as componentes escalares de $\mathbf{F}$ são, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

As Eqs. (2.29) simplificam consideravelmente a determinação das componentes de uma força $\mathbf{F}$ de dada intensidade F , quando a linha de ação de $\mathbf{F}$ é definida por dois pontos M e N . Subtraindo as coordenadas de M das de N , determinamos inicialmente as componentes do vetor $\vec{MN}$ e a distância d de M a N

$$\begin{aligned} d_x &= x_2 - x_1 & d_y &= y_2 - y_1 & d_z &= z_2 - z_1 \\ d &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} \end{aligned}$$

Introduzindo os valores de F , d_x , d_y , d_z e d nas Eqs. (2.29), obtemos as componentes F_x , F_y e F_z da força.

Os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que F forma com os eixos coordenados podem, então, ser obtidos das Eqs. (2.25). Comparando as Eqs. (2.22) e (2.27), podemos, também, escrever

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (2.30)$$

e determinar os ângulos θ_x , θ_y e θ_z diretamente das componentes e módulo do vetor $\vec{MN}$.

2.14. Adição de Forças Concorrentes no Espaço. Determinaremos a resultante R de duas ou mais forças no espaço pela soma de suas componentes cartesianas. Os métodos gráficos e trigonométricos não são geralmente práticos no caso de forças no espaço.

O método aqui seguido é análogo ao usado na Seção 2.8 com forças coplanares. Tomando

$$R = \Sigma F$$

decompomos cada força em suas componentes cartesianas e escrevemos

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} &= \Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} + (\Sigma F_z) \mathbf{k} \end{aligned}$$

da qual decorre que

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

O módulo da resultante R e os ângulos θ_x , θ_y e θ_z formados com os eixos coordenados são obtidos pelo método da Seção 2.12.

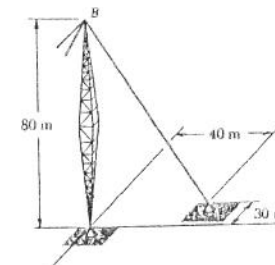
Escrevemos

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.32)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.33)$$

Problema Resolvido 2.7

O cabo de sustentação de uma torre está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é de 2 500 N. Determinar: (a) as componentes F_x , F_y e F_z da força que atua sobre o parafuso, (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que definem a direção da força.



a) **Componentes da Força.** A linha de ação da força que atua sobre o parafuso passa por A e B e está orientada de A para B. As componentes do vetor $\vec{AB}$, que tem a mesma direção da força, conforme figura na página seguinte, são:

$$d_x = -40 \text{ m}$$

$$d_y = +80 \text{ m}$$

$$d_z = +30 \text{ m}$$

A distância total de A a B é

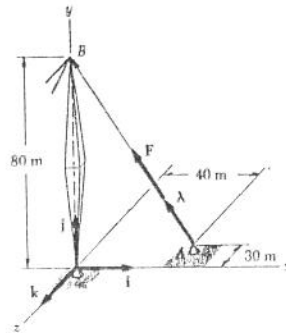
$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94,3 \text{ m}$$

Designando por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos

$$\vec{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduzindo o vetor $\lambda = \vec{AB}/AB$, escrevemos

$$\mathbf{F} = F\lambda = F \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{2500 \text{ N}}{94,3 \text{ m}} \vec{AB}$$



Substituindo pela expressão encontrada para $\vec{AB}$, obtemos

$$\mathbf{F} = \frac{2500 \text{ N}}{94,3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1060 \text{ N})\mathbf{i} + (2120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

As componentes de $\mathbf{F}$ são, portanto,

$$F_x = -1060 \text{ N} \quad F_y = +2120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N} \leftarrow$$

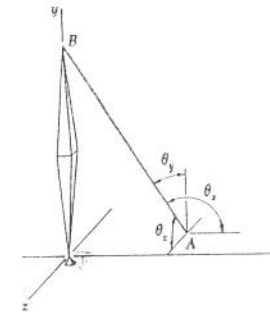
b) Direção da Força. Usando as Eqs. (2.25), escrevemos

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1060 \text{ N}}{2500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2120 \text{ N}}{2500 \text{ N}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2500 \text{ N}}$$

Calculando sucessivamente cada quociente e seu arco co-seno, obtemos

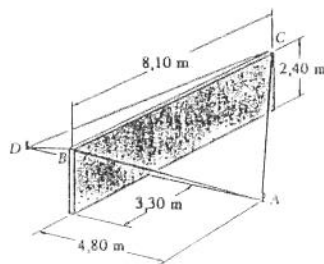
$$\theta_x = 115,1^\circ \quad \theta_y = 32,0^\circ \quad \theta_z = 71,5^\circ \leftarrow$$



(Nota. Esse resultado poderia ter sido obtido pelo uso das componentes e módulo do vetor $\vec{AB}$, em vez dos referentes à força $\mathbf{F}$.)

Problema Resolvido 2.8

Uma placa de concreto pré-moldado é temporariamente sustentada pelos cabos da figura. Conhecendo as trações de 4200 N, no cabo AB, e 6000 N, no cabo AC, determine o módulo e a direção da resultante das forças aplicadas pelos cabos AB e AC na estaca em A.



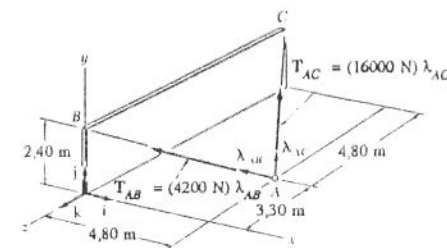
Solução. A força aplicada por cada cabo na estaca A será decomposta segundo as direções x , y e z . Começaremos determinando as componentes e o módulo dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, com origem em A. Representando por i , j e k os vetores unitários ao longo dos eixos coordenados, temos

$$\vec{AB} = -(4,80 \text{ m})i + (2,40 \text{ m})j + (3,30 \text{ m})k \quad AB = 6,30 \text{ m}$$

$$\vec{AC} = -(4,80 \text{ m})i + (2,40 \text{ m})j - (4,80 \text{ m})k \quad AC = 7,20 \text{ m}$$

Seja λ_{AB} o vetor unitário de AB. Temos

$$T_{AB} = T_{AB} \lambda_{AB} = T_{AB} \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{4200 \text{ N}}{6,30 \text{ m}} \vec{AB}$$



Substituindo $\vec{AB}$ pela expressão acima, obtemos

$$T_{AB} = \frac{4200}{6,30 \text{ m}} [-(4,80 \text{ m})i + (2,40 \text{ m})j + (3,30 \text{ m})k]$$

$$T_{AB} = -(3200 \text{ N})i + (1600 \text{ N})j + (2200 \text{ N})k$$

Seja λ_{AC} o vetor unitário de $\vec{AC}$. De maneira semelhante obtemos:

$$T_{AC} = T_{AC} \lambda_{AC} = T_{AC} \frac{\vec{AC}}{AC} = \frac{6000 \text{ N}}{7,20 \text{ m}} \vec{AC}$$

$$T_{AC} = -(4000 \text{ N})i + (2000 \text{ N})j - (4000 \text{ N})k$$

A resultante R das forças aplicadas pelos dois cabos é

$$R = T_{AB} + T_{AC} = -(7200 \text{ N})i + (3600 \text{ N})j - (1800 \text{ N})k$$

O módulo e a direção são agora calculados:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-7200)^2 + (3600)^2 + (-1800)^2}$$

$$R = 8250 \text{ N} \quad \leftarrow$$

Das Eqs. (2.33) obtemos

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-7200 \text{ N}}{8250 \text{ N}}$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+3600 \text{ N}}{8250 \text{ N}}$$

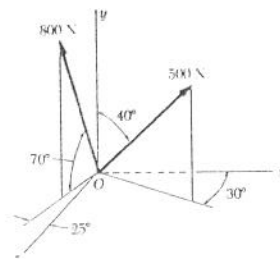
$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-1800 \text{ N}}{8250 \text{ N}}$$

Calculando cada quociente e seus arcos, obtemos

$$\theta_x = 150,8^\circ \quad \theta_y = 64,1^\circ \quad \theta_z = 102,6^\circ \leftarrow$$

Problemas

2.54 Determine: (a) as componentes cartesianas da força de 500 N e (b) os ângulos θ_x , θ_y , θ_z que a força forma com os eixos coordenados.



Figuras P2.54 e P2.55

2.55 Determine: (a) as componentes cartesianas da força de 800 N e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que a força forma com os eixos coordenados.

2.56 Uma arma é apontada para um ponto A que está 35° a leste em relação ao norte. Se o cano da arma forma um ângulo de 40° com a horizontal e se a força máxima de recuo tem intensidade de 400 N, determine: (a) as componentes cartesianas dessa força e (b) os valores dos ângulos θ_x , θ_y e θ_z da força de recuo com os eixos coordenados (tome os eixos x, y e z, respectivamente, nas direções: leste, vertical e sul).

2.57 Resolva o Probl. 2.56 supondo que o ponto A está 15° ao norte em relação ao oeste e que o cano da arma forma um ângulo de 25° com a horizontal.

2.58 O cabo AB, de 19,5 m, está sujeito a uma tração de 19 500 N. Determine: (a) as componentes cartesianas da força aplicada pelo cabo em B e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que definem a direção da força aplicada em B.

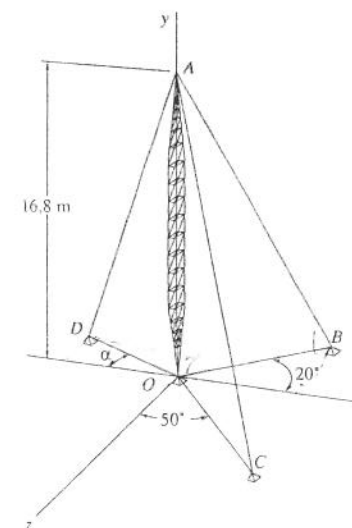


Figura P2.58 e P2.59

2.59 O cabo AC, de 21 m, está sujeito a uma tração de 26 250 N. Determine: (a) as componentes cartesianas da força exercida pelo cabo em C e (b) os ângulos θ_x , θ_y e θ_z que determinam a direção da força aplicada em C.

2.60 Determine o módulo e a direção da força $\mathbf{F} = (650 \text{ N})\mathbf{i} - (320 \text{ N})\mathbf{j} - (760 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.61 Determine o módulo e a direção da força

$$\mathbf{F} = (2\,900\text{ N})\mathbf{i} + (3\,450\text{ N})\mathbf{j} - (1\,500\text{ N})\mathbf{k}$$

2.62 Uma força é aplicada na origem e tem direção determinada pelos ângulos $\theta_x = 75^\circ$ e $\theta_z = 130^\circ$. Sabendo que a componente y da força é $+1\,500\text{ N}$, determine: (a) as componentes e o módulo da força e (b) o valor de θ_y .

2.63 Uma força é aplicada na origem e tem direção determinada pelos ângulos $\theta_y = 55^\circ$ e $\theta_z = 45^\circ$. Sabendo que a componente x da força é -500 N , determine: (a) as outras componentes e o módulo da força e (b) o valor de θ_x .

2.64 A fim de remover um caminhão acidentado, dois cabos são atados em A e puxados por dois guinchos – B e C . Sabendo que a tração no cabo AB é de 10 kN , determine as componentes da força exercida pelo cabo AB no caminhão.

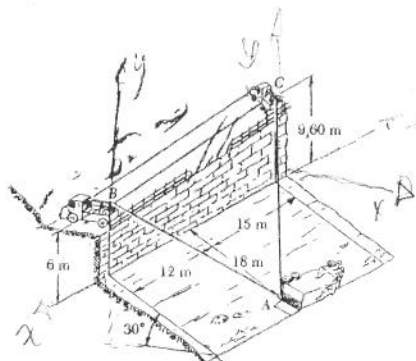


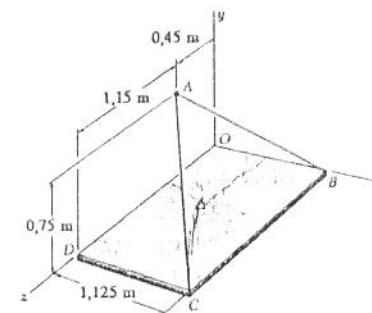
Figura P2.64

2.65 Com referência ao Probl. 2.64, sabendo que a tração no cabo AC é de $7,5\text{ kN}$, determine as componentes da força exercida pelo cabo AC no caminhão.

2.66 Sabendo que a tração no cabo AB é de 1425 N , determine as componentes da força aplicada no ponto B da placa.

2.67 Sabendo que a tração no cabo AC é de 2130 N , determine as componentes da força aplicada no ponto C da placa.

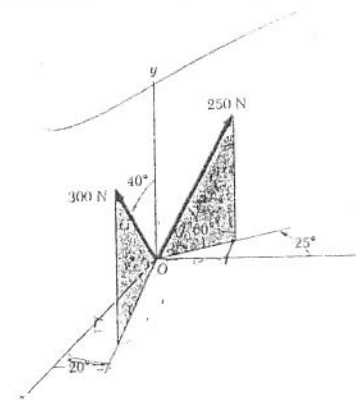
2.68 Sabendo que a tração no cabo AB é de 1425 N e no cabo AC é de 2130 N , determine o módulo e a direção da resultante das forças aplicadas em A pelos dois cabos.



Figuras P2.66, P2.67 e P2.68

2.69 Com referência ao Probl. 2.64, e sabendo que a tração no cabo AB é de 10 kN e de $7,5\text{ kN}$ no cabo AC , determine o módulo e a direção da resultante das forças aplicadas pelos cabos no caminhão.

2.70 Determine a resultante das forças da figura:



Figuras P2.70

2.71 Com referência aos Problemas 2.58 e 2.59, lembramos que as trações são de $19\,500\text{ N}$ no cabo AB e de $26\,250\text{ N}$ no cabo AC . (a) Determine o módulo e a direção da resultante das forças aplicadas em A pelos cabos AB e AC . (b) Sabendo que a resultante das forças aplicadas em A pelos três cabos deve ser vertical, determine o ângulo α que a linha OD forma com o semi-eixo negativo do eixo x .

2.72 A barra OA é aplicada uma carga P . Sabendo que a tração no cabo AB é de 850 N e que a resultante da carga P e das forças aplicadas pelos cabos em A deve ter a direção de OA , determine a tração no cabo AC .

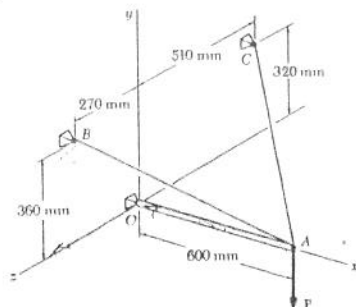


Figura P2.72

2.73 Nas condições do Prob. 2.72, determine o módulo da carga P .

2.15. **Equilíbrio de um Ponto Material no Espaço.** De acordo com a definição dada na Seção 2.9, um ponto material A está em equilíbrio se a resultante de todas as forças atuantes sobre A é zero. As componentes R_x , R_y e R_z da resultante são dadas pelas Eqs. (2.31); para exprimir o fato de que as componentes da resultante são nulas, escrevemos

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (2.34)$$

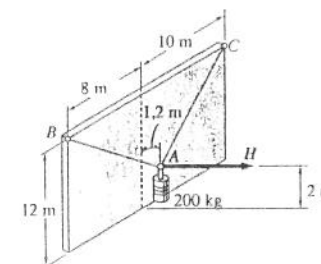
As Eqs. (2.34) representam as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um ponto material no espaço. Elas servem para resolver problemas referentes ao equilíbrio de um ponto material que não envolva mais de três incógnitas.

Para resolver tais problemas, devemos fazer primeiro um diagrama de corpo livre que mostre o ponto material em equilíbrio e *todas* as forças que atuam sobre esse ponto. Podemos, então, escrever as equações de equilíbrio (2.34) e resolvê-las para três incógnitas. Nos tipos mais usuais de problemas, essas incógnitas representam (1) as

três componentes de uma única força ou (2) os módulos de três forças de direção conhecida.

Problema Resolvido 2.9

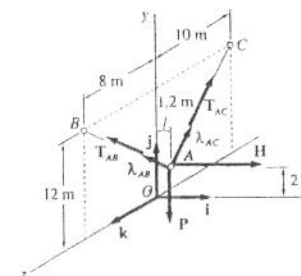
Um cilindro de 200 kg é pendurado por meio de dois cabos, AB e AC , amarrados ao topo de uma parede vertical. Uma força H , horizontal e perpendicular à parede, mantém o peso na posição ilustrada. Determinar a intensidade de H e a tração em cada cabo.



Solução. O ponto A é escolhido como corpo livre; esse ponto está submetido a quatro forças, três das quais têm módulo desconhecido. Introduzindo os vetores unitários i, j e k , decomponemos cada força em componentes cartesianas.

$$H = H i$$

$$P = -mg j = -(200 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) j = -(1\,962 \text{ N}) j \quad (1)$$



No caso de T_{AB} e T_{AC} , é necessário, inicialmente, determinar as componentes e os módulos dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Denominando λ_{AB} o vetor unitário segundo AB , escrevemos

$$\vec{AB} = -(1,2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \quad AB = 12,86 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\vec{AB}}{12,86 \text{ m}} = -0,0933 \mathbf{i} + 0,778 \mathbf{j} + 0,622 \mathbf{k}$$

$$T_{AB} = T_{AB} \lambda_{AB} = -0,0933 T_{AB} \mathbf{i} + 0,778 T_{AB} \mathbf{j} + 0,622 T_{AB} \mathbf{k} \quad (2)$$

Denominando λ_{AC} o vetor unitário segundo AC , escrevemos analogamente

$$\vec{AC} = -(1,2)\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \quad AC = 14,19 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\vec{AC}}{14,19 \text{ m}} = -0,0846 \mathbf{i} + 0,705 \mathbf{j} - 0,705 \mathbf{k}$$

$$T_{AC} = T_{AC} \lambda_{AC} = -0,0846 T_{AC} \mathbf{i} + 0,705 T_{AC} \mathbf{j} - 0,705 T_{AC} \mathbf{k} \quad (3)$$

Condição de Equilíbrio. Como o ponto A está em equilíbrio, devemos ter

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad T_{AB} + T_{AC} + H + P = 0$$

ou, substituindo as várias forças pelas Eqs. (1), (2) e (3) e fatorando $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} & (-0,0933 T_{AB} - 0,0846 T_{AC} + H) \mathbf{i} + \\ & + (0,778 T_{AB} + 0,705 T_{AC} - 1962 \text{ N}) \mathbf{j} + (0,622 T_{AB} - 0,705 T_{AC}) \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

Fazendo os coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ iguais a zero,* escrevemos três equações escalares, que expressam ser a soma das componentes x , y , z das forças respectivamente iguais a zero:

$$(\Sigma F_x = 0): \quad -0,0933 T_{AB} - 0,0846 T_{AC} + H = 0$$

$$(\Sigma F_y = 0): \quad +0,778 T_{AB} + 0,705 T_{AC} - 1962 \text{ N} = 0$$

$$(\Sigma F_z = 0): \quad +0,622 T_{AB} - 0,705 T_{AC} = 0$$

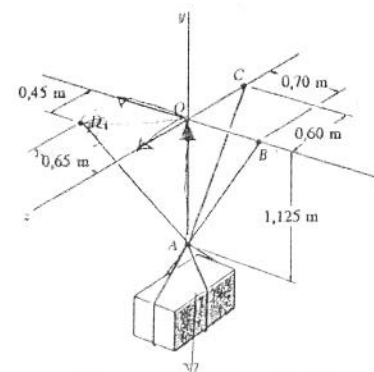
Resolvendo essas equações, obtemos

$$H = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1401 \text{ N} \quad T_{AC} = 1236 \text{ N} \leftarrow$$

Problemas

2.74 Uma caixa está suspensa por três cabos, como ilustrado. Determine o peso P da caixa sabendo que a tração no cabo AD é de 4 620 N.

2.75 Uma caixa está suspensa por três cabos, como ilustrado. Determine o peso P da caixa sabendo que a tração no cabo AB é de 6 890 N.



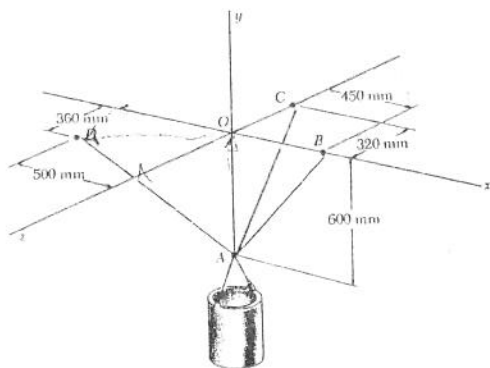
Figuras P2.74 e P.2.75

* Os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ são linearmente independentes. (N. do R.T.)

2.76 Um recipiente está suspenso por três cabos, como ilustrado. Determine o peso P do recipiente sabendo que a tração no cabo AB é de 4 kN.

2.77 Um recipiente está suspenso por três cabos, como ilustrado. Determine o peso P do recipiente sabendo que a tração no cabo AD é de 3,87 kN.

2.78 Um recipiente de peso $P = 1\,165\text{ N}$ está suspenso por três cabos, como ilustrado. Determine a tração em cada cabo.



Figuras P2.76, P2.77 e P2.78

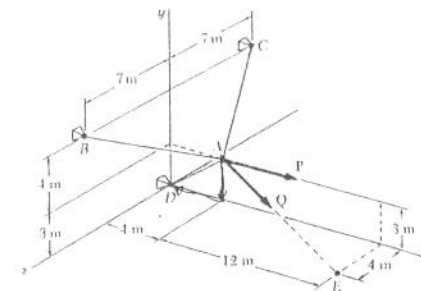
2.79 Três cabos estão atados em A, onde são aplicadas as forças P e Q , como ilustrado. Determine a tração em cada cabo sabendo que $P = 5,60\text{ kN}$ e $Q = 0$.

2.80 Três cabos estão atados em A, onde são aplicadas as forças P e Q , como ilustrado. Determine a tração em cada cabo sabendo que $P = 0$ e $Q = 7,28\text{ kN}$.

2.81 Três cabos estão atados em A, onde são aplicadas as forças P e Q , como ilustrado. Sabendo que $Q = 7,28\text{ kN}$ e que a tração no cabo AD é zero, determine: (a) o módulo e o sentido de P e (b) a tração nos cabos AB e AC .

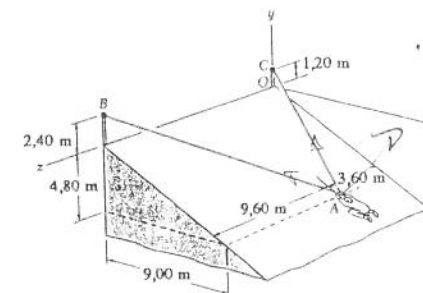
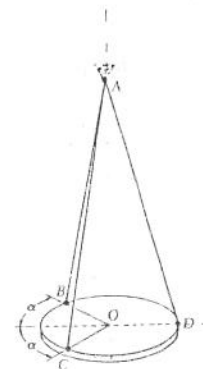
2.82 Uma placa circular de 6 kg e 17,5 cm de raio está suspensa, como ilustrado, por três fios, cada um com 62,5 cm de comprimento. Determine a tração em cada cabo sabendo que $\alpha = 30^\circ$.

2.83 Resolva o Probl. 2.82 supondo $\alpha = 45^\circ$.



Figuras P2.79, P2.80 e P2.81

2.84 Tentando cruzar uma superfície gelada e escorregadia, um homem de 90 kg utiliza duas cordas, AB e AC . Sabendo que a força exercida pela superfície no homem é perpendicular à superfície, determine a tração em cada corda.



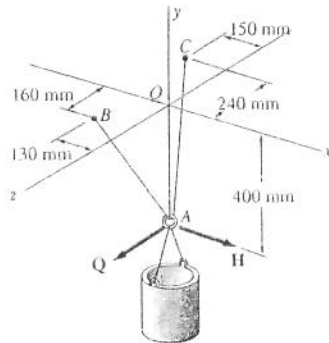
Figuras P2.82 e P2.84

2.85 Resolva o Probl. 2.84 supondo que um amigo esteja auxiliando o homem aplicando-lhe uma força $P = -(300\text{ N})\mathbf{k}$.

2.86 Um recipiente de peso $P = 400\text{ N}$ é suspenso por dois cabos AB e AC atados ao anel A. Sabendo que $Q = 0$, determine: (a) o módulo da força H que deve ser aplicada ao anel para manter o recipiente na posição ilustrada e (b) os valores correspondentes da tração nos cabos AB e AC .

2.87 Resolva o Probl. 2.86 com $\mathbf{Q} = (80 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.88 Um recipiente pende de um cabo único, que passa através de um anel, sem atrito, e é atado aos pontos fixos B e C . Duas forças, $\mathbf{H} = H\mathbf{i}$ e $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$, são aplicadas ao anel, a fim de que o recipiente permaneça na posição ilustrada. Sabendo que o peso do recipiente é $P = 376 \text{ N}$, determine os módulos de H e Q . (Sugestão: A tração é a mesma nas partes AB e AC do cabo.)



Figuras P2.86 e P2.88

2.89 Determine o peso P do recipiente do Probl. 2.88 sabendo que $H = 164 \text{ N}$.

2.90 O cabo BAC passa, sem atrito, através do anel A e é atado aos pontos fixos B e C . Os cabos AD e AE são ambos atados ao anel e, respectivamente, aos suportes D e E . Determine a tração nos três cabos sabendo que uma carga vertical P de 750 N de intensidade é aplicada ao anel A .

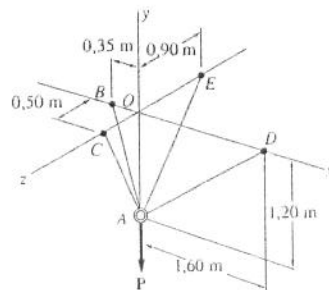


Figura P2.90

2.91 Sabendo que a tração no cabo AE do Probl. 2.90 é de 250 N , determine: (a) o módulo da carga P e (b) a tração nos cabos BAC e AD .

2.92 Uma placa circular de 10 kg tem 250 mm de raio e está suspensa por três fios iguais, de comprimento L . Sabendo que $\alpha = 30^\circ$, determine o menor valor possível de L para que a tração não exceda o valor de 50 N em qualquer dos fios.

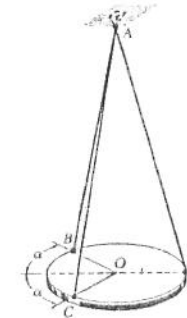
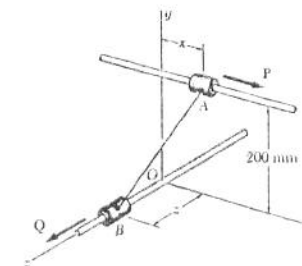


Figura P2.92

2.93 As mangas A e B estão ligadas por um cabo de 250 mm de comprimento e podem deslizar sem atrito sobre os respectivos eixos. Se uma força Q de módulo 100 N é aplicada à manga B , como ilustrado, determine: (a) a tração no cabo quando $x = 90 \text{ mm}$ e (b) a correspondente intensidade da força P necessária para manter o sistema em equilíbrio.

* 2.94 As mangas A e B estão ligadas por um cabo de 250 mm de comprimento e podem deslizar sem atrito sobre os respectivos eixos. Determine as distâncias x e z para as quais o sistema fica em equilíbrio com $P = 200 \text{ N}$ e $Q = 100 \text{ N}$.



Figuras P2.93 e P2.94

Problemas de Recapitulação

2.95 (a) Obtenha a expressão do peso P' em função de P , d e h no equilíbrio. (b) Para $P' = 500$ N, $P = 150$ N e $d = 400$ mm, determine o valor de h correspondente ao equilíbrio.

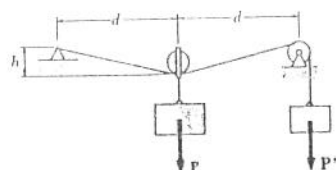


Figura P2.95

2.96 Um laço de corrente de 1,25 m envolve uma peça de madeira de 250 x 250 mm. Sabendo que a massa da madeira é de 175 kg, determine a tração na corrente nas duas situações ilustradas.

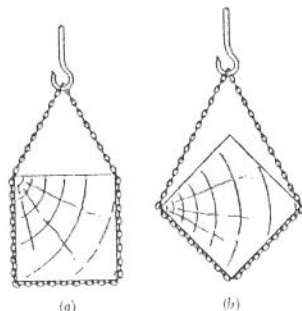
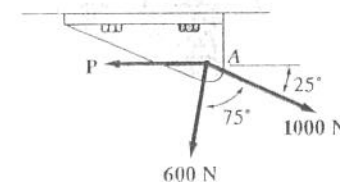


Figura P2.96

2.97 Sabendo que o módulo da força P é 500 N, determine a resultante das três forças aplicadas em A .

2.98 Determine o intervalo de variação dos valores de P para os quais o módulo da resultante das três forças aplicadas em A não excede 1 125 N.



Figuras P2.97 e P2.98

2.99 Um cilindro de peso $P = 650$ N é sustentado por dois cabos, AC e BC , que estão atados ao topo de dois postes verticais. Uma força horizontal F , perpendicular ao plano que contém os postes, mantém o cilindro na posição ilustrada. Determine: (a) a intensidade de F e (b) a tração em cada cabo.

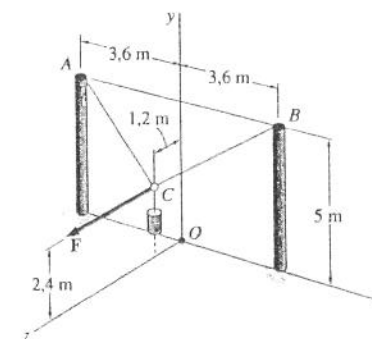


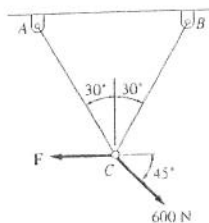
Figura P.2.99

2.100 No Prob. 2.99 determine os ângulos θ_x , θ_y e θ_z da força em B devida ao cabo BC .

2.101 Sabendo que $F = 400$ N, determine a tração nos cabos AC e BC .

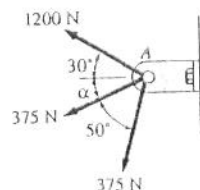
2.102 Determine o intervalo de valores de F para os quais ambos os cabos ficam esticados.

2.103 As direções das forças de 275 N podem variar, porém o ângulo entre essas forças é mantido igual a 50° . Determine o valor de α para o qual a resultante das forças aplicadas em A tem direção horizontal e aponta para a esquerda.



Figuras P2.101 e P2.102

- 2.104 Determine a resultante das três forças aplicadas em A, quando: (a), $\alpha = 0$ e (b) $\alpha = 25^\circ$.



Figuras P2.103 e P2.104

- 2.105 Uma força 8 kN está aplicada na origem e tem sua direção definida pelos ângulos $\theta_y = 35^\circ$ e $\theta_z = 65^\circ$. Sabe-se, ainda, que a componente x da força é positiva. Determine o valor de θ_x e as componentes da força.

- 2.106 Três cabos estão presos no ponto D, que fica 225 mm abaixo do plano do suporte ABC. Determine a tração em cada cabo quando um cilindro de 300 N é preso ao ponto D, como está ilustrado.

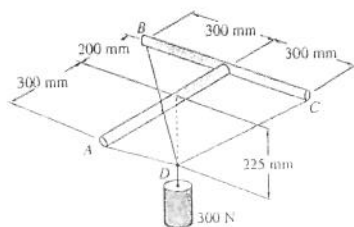


Figura P2.106

Recapitulação e Sumário

Neste capítulo estudamos o efeito de forças sobre pontos materiais, isto é, sobre corpos de forma e tamanho tais que pode-se supor que todas as forças que atuam sobre eles estão aplicadas em um só ponto.

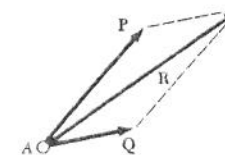


Figura 2.35

Resultante de duas forças

Forças são *grandezas vetoriais*; elas são caracterizadas por um *ponto de aplicação*, um *módulo*, uma *direção* e um *sentido*. Somam-se de acordo com a *regra do paralelogramo* (Fig. 2.36). O módulo, a direção e o sentido da resultante R de duas forças P e Q podem ser determinados graficamente ou por trigonometria, utilizando a lei dos co-senos e a lei dos senos [Problema Resolvido 2.1].

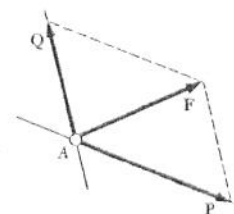


Figura 2.36

Componentes de uma força

Uma dada força pode ser decomposta em duas ou mais *componentes*, isto é, pode ser substituída por duas ou mais forças que têm o mesmo efeito sobre o ponto

material. Uma força F pode ser decomposta em componentes P e Q desenhando um paralelogramo cuja diagonal é a força F ; as forças P e Q são dois lados adjacentes do paralelogramo (Fig. 2.17) que podem ser determinados graficamente ou por trigonometria [Seção 2.6].

Componentes cartesianas e vetores unitários

Diz-se que uma força foi decomposta em duas *componentes cartesianas* se suas componentes F_x e F_y são mutuamente perpendiculares e têm direções paralelas aos eixos coordenados (Fig. 2.37). Definindo os *vetores unitários* i, j e k orientados segundo os eixos x e y , respectivamente, escrevemos [Seção 2.7]

$$F_x = F_x i \quad F_y = F_y j \quad (2.6)$$

$$F = F_x i + F_y j \quad (2.7)$$

onde F_x e F_y são as *componentes escalares* de F . Estas componentes, que podem ser positivas ou negativas, são definidas pelas relações

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

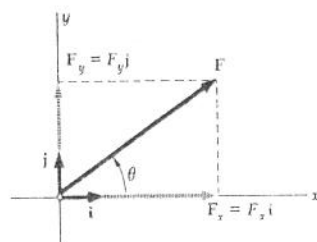


Figura 2.37

Quando as componentes cartesianas F_x e F_y de uma força F são dadas, o ângulo θ entre a força F e o eixo x pode ser determinado a partir de

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

O módulo F da força pode ser obtido resolvendo-se uma das equações (2.8) ou através do teorema de Pitágoras

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Resultante de várias forças coplanares

Quando *três ou mais forças coplanares* agem sobre um ponto material, as componentes cartesianas da sua resultante R podem ser obtidas somando algebricamente as componentes correspondentes das forças dadas [Seção 2.8]. Temos as equações

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad (2.13)$$

O módulo e a direção de R podem ser determinados a partir de relações semelhantes às equações (2.9) e (2.10) [Problema Resolvido 2.3].

Força no espaço

Uma força no *espaço tridimensional* pode ser decomposta em componentes cartesianas F_x , F_y e F_z [Seção 2.12]. Representando por θ_x , θ_y e θ_z , respectivamente, os ângulos que F forma com os eixos x , y e z (Fig. 2.38), temos

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

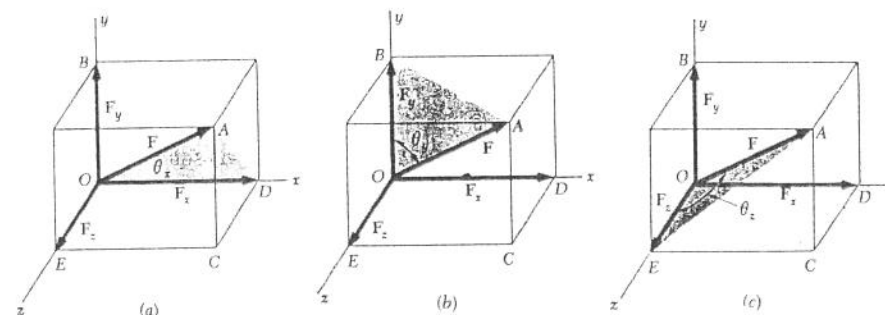


Figura 2.38

Co-senos diretores

Os co-senos de θ_x , θ_y e θ_z são conhecidos como *co-senos diretores* da força $\mathbf{F}$. Definindo os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ segundo os eixos coordenados, escrevemos

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

ou

$$\mathbf{F} = F (\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

que mostra (Fig. 2.33) que $\mathbf{F}$ é o produto do seu módulo F pelo vetor unitário

$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

Como o módulo de λ é igual a um, deve-se ter

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

Quando as componentes cartesianas F_x , F_y e F_z de uma força $\mathbf{F}$ são dadas, o módulo F da força é determinado pela equação

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

e os co-senos diretores de $\mathbf{F}$ pelas equações (2.19). Tem-se

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

Quando uma força é definida no espaço tridimensional pelo seu módulo F e por dois pontos M e N de sua linha de ação [Seção 2.13], suas componentes cartesianas podem ser obtidas da seguinte maneira: em primeiro lugar escreve-se o vetor $\overrightarrow{MN}$ que une os pontos M e N em termos de suas componentes d_x , d_y e d_z (Fig. 2.40); escrevemos

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

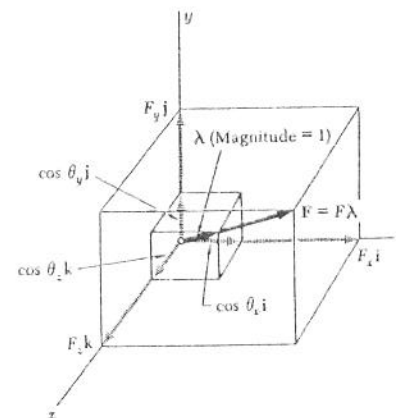


Figura 2.39

Em seguida determinamos o vetor unitário λ , paralelo à linha de ação de $\mathbf{F}$, dividindo $\overrightarrow{MN}$ pelo seu módulo $MN = d$:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Lembrando que $\mathbf{F}$ é dada pelo produto de F e λ obtemos

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de onde se obtém [Problemas Resolvidos 2.7 e 2.8] que as componentes escalares de $\mathbf{F}$ são:

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

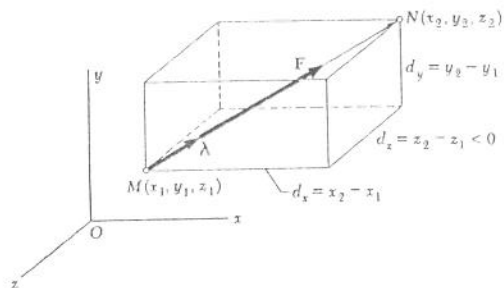


Figura 2.40

Resultantes de forças no espaço

Quando duas ou mais forças agem sobre um ponto material no espaço tridimensional, as componentes cartesianas da sua resultante $\mathbf{R}$ podem ser obtidas somando-se algebricamente as componentes correspondentes das forças dadas [Seção 2.14]. Temos

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad R_z = \sum F_z \quad (2.31)$$

O módulo e a direção de $\mathbf{R}$ podem ser obtidos de relações análogas às equações (2.18) e (2.25) [Problema Resolvido 2.8].

Equilíbrio de um ponto material

Diz-se que um ponto material está em *equilíbrio* quando a resultante de todas as forças que atuam nele é nula [(Seção 2.9)]. O ponto material permanecerá em repouso (se estava inicialmente em repouso) ou estará em movimento retilíneo com velocidade constante (se estava inicialmente em movimento) [Seção 2.10].

Diagrama de corpo livre

Para resolver um problema de um ponto material em equilíbrio, começa-se desenhando um *diagrama de corpo livre* do ponto material onde estejam representadas todas as forças que agem sobre ele [Seção 2.11]. Se apenas três forças coplanares atuam sobre o ponto material pode-se desenhar um *triângulo de forças* para expressar o fato

do ponto material estar em equilíbrio. O triângulo pode ser resolvido graficamente ou por trigonometria quando não há mais de duas incógnitas [Problema Resolvido 2.4]. Se houver mais de três forças coplanares, as equações de equilíbrio

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

devem ser utilizadas para calcular até duas incógnitas [Problema Resolvido 2.6].

Equilíbrio no espaço

Quando um ponto material está em *equilíbrio no espaço tridimensional* (Seção 2.15) utilizam-se as três equações de equilíbrio

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (2.34)$$

para calcular até três incógnitas [Problema Resolvido 2.9].

Capítulo 3

Corpos Rígidos: Sistemas Equivalentes de Forças

3.1. Introdução. No capítulo precedente considerou-se que cada corpo poderia ser tratado como um ponto material. No entanto, nem sempre isso é possível e, de maneira geral, um corpo deve ser tratado como um conjunto de grande número de pontos materiais. O tamanho do corpo deverá ser levado em consideração, em virtude do fato de as forças atuarem em pontos diferentes e, portanto, terem diferentes pontos de aplicação.

A maioria dos corpos tratados na Mecânica elementar é supostamente formada por *corpos rígidos*; considerando-se como *corpo rígido* aquele que não se deforma. As estruturas e as máquinas reais, no entanto, nunca são absolutamente rígidas e deformam-se sob as cargas a que estão submetidas. Mas, normalmente, essas deformações são pequenas e não alteram sensivelmente as condições de equilíbrio ou de movimento da estrutura em estudo. São importantes, no entanto, quando há riscos de ruptura da estrutura, sendo estudadas em Resistência dos Materiais.

Neste capítulo estudaremos o efeito de forças aplicadas em um corpo rígido e aprenderemos como substituir um dado sistema de forças por um sistema equivalente mais simples. A hipótese fundamental sobre a qual se baseará nossa análise é a de que o efeito de uma dada força em um corpo rígido não se altera se a força é deslocada ao longo de sua linha de ação (*princípio da transmissibilidade*). Resulta disto que forças aplicadas em um corpo rígido podem ser representadas por *vetores deslizantes*, como indicado na Seção 2.3.

Dois conceitos importantes, associados ao efeito de uma força sobre um corpo rígido, são o *momento de uma força em relação a um ponto* (Seção 3.6) e o *momento de uma força em relação a um eixo* (Seção 3.11). Como a determinação dessas grandezas envolve o cálculo de produtos vetoriais e de produtos escalares de dois vetores, os

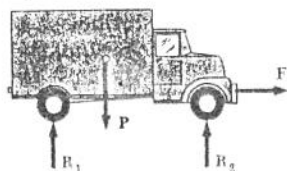
fundamentos da álgebra vetorial serão introduzidos neste capítulo e aplicados à solução de problemas que envolvem forças aplicadas a corpos rígidos.

Um outro conceito apresentado neste capítulo é o de *binário*, isto é, a combinação de duas forças que têm mesma intensidade, linhas de ação paralelas e sentidos opostos (Seção 3.12). Veremos que qualquer sistema de forças aplicado a um corpo rígido pode ser substituído por um sistema equivalente composto de uma força aplicada a um certo ponto e de um binário. Esse sistema básico é denominado *sistema força-binário*. No caso de forças concorrentes, coplanares ou paralelas, o sistema equivalente força-binário pode ser simplificado ainda mais reduzindo-se a uma única força, denominada *resultante* do sistema, ou a um único *binário resultante* do sistema.

3.2. Forças Internas e Externas. As forças que atuam em corpos rígidos podem ser classificadas em dois grupos: (1) *forças externas* e (2) *forças internas*.

1. As *forças externas* representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido considerado, sendo inteiramente responsáveis pelo comportamento externo do corpo rígido. Causarão o movimento ou assegurarão a permanência em repouso. Neste capítulo e nos Caps. 4 e 5, nos preocuparemos somente com as forças externas.
2. As *forças internas* são as que mantêm unidos os pontos materiais que formam o corpo rígido. Se o corpo rígido é estruturalmente composto de diversas partes, as forças que mantêm essas partes unidas são também chamadas forças internas. As forças internas serão estudadas nos Caps. 6 e 7.

Como exemplo de forças externas consideraremos as forças que atuam sobre um caminhão avariado que está sendo puxado para a frente por meio de uma corda atada ao pára-choque dianteiro (Fig. 3.1). As forças externas que atuam no caminhão são representadas num *diagrama de corpo livre* (Fig. 3.2). Consideremos inicialmente o *peso* do caminhão. Embora o efeito da atração da Terra se verifique para cada um dos pontos materiais constituintes do caminhão, o peso pode ser representado por uma única força **P**. O *ponto de aplicação* dessa força, isto é, o ponto no qual consideraremos que ela atua, é chamado *baricentro do caminhão*. Será visto no Cap. 5 como se determina o baricentro de um corpo. O peso **P** tende a fazer com que o caminhão se desloque verticalmente para baixo, isto é, cairá, se não fosse a presença do solo. O solo se opõe ao movimento descendente do caminhão por intermédio das reações R_1 e R_2 . Essas forças são exercidas pelo solo sobre o caminhão e devem então ser incluídas entre as forças externas que atuam no referido veículo.



Figuras 3.1 e 3.2

Os homens que puxam a corda exercem força F . O ponto de aplicação de F está no pára-choque dianteiro. A força F tende a fazer com que o caminhão se mova para a frente segundo uma linha reta, e realmente o faz, já que nenhuma força externa se opõe a esse movimento. (A resistência ao rolamento foi desprezada para efeito de simplificação.) Esse movimento do caminhão para a frente, durante o qual todas as linhas retas permanecem paralelas a si mesmas (o assoalho do caminhão permanece horizontal e suas paredes permanecem verticais), é conhecido como *translação*. Outras forças poderiam mover o caminhão diferentemente. Por exemplo, a força exercida por um macaco sob o eixo dianteiro causaria um giro do caminhão em torno do eixo traseiro. Tal movimento seria uma *rotação*. Pode-se concluir, por conseguinte, que cada uma das *forças externas* que atuam num *corpo rígido*, se não for neutralizada, é capaz de comunicar ao corpo rígido um movimento de translação, de rotação ou ambos.

3.3. Princípio da Transmissibilidade. Forças Equivalentes. O princípio da transmissibilidade estabelece que as condições de equilíbrio ou de movimento de um corpo rígido permanecem inalteradas se uma força F , que atua em um dado ponto do corpo rígido, é substituída por uma força F' de mesmo módulo, direção e sentido, mas que atua num ponto diferente, desde que as duas forças tenham a mesma linha de ação (Fig. 3.3). As duas forças F e F' têm o mesmo efeito sobre o corpo rígido e são ditas *equivalentes*. Esse princípio, que estabelece o fato de a ação de uma força poder ser transmitida ao longo de sua linha de ação, é consequência de demonstração experimental. Não pode ser deduzido de propriedades estabelecidas até aqui, neste texto, e deve, portanto, ser aceito como uma lei experimental.* Entretanto, como veremos na

* Na realidade é equivalente a se supor que duas forças diretamente opostas não têm efeito algum em um corpo rígido, fato que é usado, explicitamente, no exemplo da Fig. 3.5. (N. do R.T.)

Seção 16.5, o princípio de transmissibilidade pode ser deduzido do estudo da dinâmica dos corpos rígidos; porém esse estudo exige a introdução de todas as três leis de Newton e de alguns outros conceitos. Apoiaremos, pois, nosso estudo da estática dos corpos rígidos nos três princípios introduzidos até aqui, isto é, na lei do paralelogramo para adição de forças, na primeira lei de Newton e no princípio de transmissibilidade.

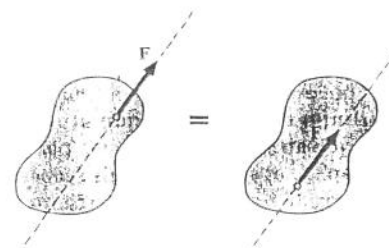


Figura 3.3

Vimos, no Cap. 2, que as forças que atuam em um ponto material podem ser representadas por vetores. Esses vetores têm um ponto de aplicação bem definido, que é o próprio ponto material, e são, por conseguinte, vetores fixos ou aplicados. Contudo, no caso de forças que atuam em um corpo rígido, o ponto de aplicação da força não interessa, desde que a linha de ação da força permaneça inalterada. Então, as forças que atuam em um corpo rígido podem ser representadas por uma espécie diferente de vetores, conhecidos como *vetores deslizantes*, visto que lhes é permitido deslizar ao longo de suas linhas de ação. Observa-se que todas as propriedades que forem deduzidas, nas seções seguintes, para forças atuantes em um corpo rígido terão validade geral para qualquer sistema de vetores deslizantes. Entretanto, com o objetivo de manter nossa apresentação mais intuitiva, utilizaremos forças físicas em vez de vetores deslizantes matemáticos.

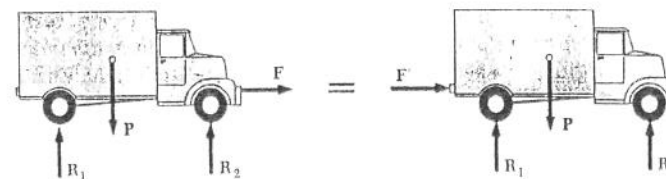


Figura 3.4

Retornando ao exemplo do caminhão, observemos inicialmente que a linha de ação da força F é uma linha horizontal que passa através dos pára-choques dianteiro e traseiro do caminhão (Fig. 3.4). Usando o princípio de transmissibilidade, podemos, portanto, substituir a força F por uma *força equivalente* F' agindo no pára-choque traseiro. Em outras palavras, não se alteram as condições de movimento, e todas as outras forças externas que atuam no caminhão (P , R_1 e R_2) permanecem as mesmas, se os homens empurrarem o pára-choque traseiro em vez de puxarem o dianteiro.

O princípio de transmissibilidade e o conceito de forças equivalentes têm, contudo, limitações. Considere, por exemplo, uma barra curta AB sob a ação de forças axiais iguais e opostas P_1 e P_2 , como mostra a Fig. 3.5a. De acordo com o princípio de transmissibilidade, a força P_2 pode ser substituída por uma força P'_2 de mesmo módulo, direção e sentido e mesma linha de ação, mas que atua no ponto A em vez de B (Fig. 3.5b). As forças P_1 e P'_2 que atuam sobre o mesmo ponto podem ser adicionadas de acordo com as regras do Cap. 2, e, como são iguais e opostas, sua soma é zero. O sistema de forças originais ilustrado na Fig. 3.5a é, portanto, equivalente a nenhuma força (Fig. 3.5c) do ponto de vista do comportamento externo da barra.

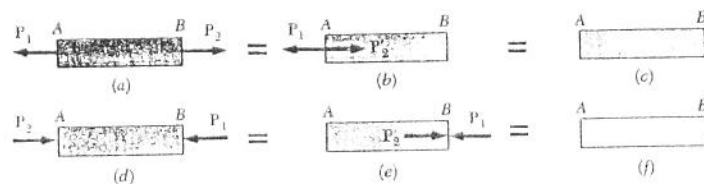


Figura 3.5

Consideremos agora as duas forças iguais e opostas P_1 e P_2 que atuam na barra AB , como mostra a Fig. 3.5d. A força P_2 pode ser substituída por uma força P'_2 que tenha mesmo módulo, mesma direção e sentido e mesma linha de ação, mas que atua em B em vez de A (Fig. 3.5e). As forças P_1 e P'_2 podem então ser adicionadas, e sua soma será zero novamente (Fig. 3.5f). Do ponto de vista da Mecânica dos Corpos Rígidos, os sistemas ilustrados na Fig. 3.5a e d são, portanto, equivalentes. Mas as *forças internas* e as *deformações* produzidas pelos dois sistemas são, obviamente, diferentes. A barra da Fig. 3.5a está sendo tracionada e, se não for absolutamente rígida, terá levemente aumentado o seu comprimento; a barra da Fig. 3.5d está sendo comprimida e, se não for absolutamente rígida, terá seu comprimento levemente diminuído. Então, embora o princípio de transmissibilidade possa ser usado livremente para determinar as condições de movimento ou de equilíbrio dos corpos rígidos e para o cálculo das forças externas que atuam nesses corpos, deve ser evitado ou, ao menos, usado com cuidado na determinação de forças internas e deformações.

3.4. Produto Vetorial de Dois Vetores. Para conseguir melhor conhecimento do efeito de uma força sobre um corpo rígido, apresentaremos um novo conceito; o conceito do *momento de uma força em relação a um ponto*. Esse conceito será mais claramente entendido, e estaremos mais bem preparados para aplicá-lo, depois de acrescentarmos aos instrumentos matemáticos a nossa disposição a definição de *produto vetorial* de dois vetores.

O produto vetorial de dois vetores P e Q é definido como sendo o vetor V , que satisfaz às seguintes condições:

1. A linha de ação de V é perpendicular ao plano que contém P e Q (Fig. 3.6).

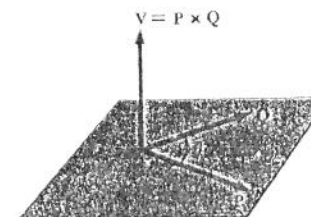


Figura 3.6

2. O módulo de V é o produto dos módulos de P e Q e do seno do ângulo θ formado por P e Q (cuja medida será sempre menor ou igual a 180°); temos, então,

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

3. O sentido de V é tal que uma pessoa colocada na extremidade de V observará como sendo anti-horária a rotação θ que traz o vetor P sobre o vetor Q ; observe que se P e Q não tiverem um ponto de aplicação comum deverão ser colocados, inicialmente, com as origens no mesmo ponto. Os três vetores P , Q e V – tomados nessa ordem – formam um *triedro positivo*.*

*Devemos observar que os eixos x , y e z usados no Cap. 2 formam um triedro positivo de eixos ortogonais e que os vetores unitários i , j e k , definidos na Seção 2.12 formam também um triedro positivo.

Como foi estabelecido na página anterior, o vetor V que satisfaz a essas três condições (que o definem univocamente) é denominado *produto vetorial* de P e Q e representado pela expressão matemática

$$V = P \times Q \quad (3.2)$$

Segue-se da Eq. (3.1) que, quando dois vetores P e Q têm a mesma direção e sentidos iguais ou opostos, seu produto vetorial é nulo. No caso geral, quando o ângulo θ formado pelos dois vetores não é 0° nem 180° , à Eq. (3.1) pode-se dar uma interpretação geométrica simples: o módulo V do produto vetorial de P e Q mede a área* do paralelogramo que tem P e Q por lados (Fig. 3.7). O produto vetorial $P \times Q$ permanecerá inalterado se substituirmos Q por um vetor Q' coplanar a P e Q tal que, ligando por uma linha as extremidades de Q e Q' , esta seja paralela a P . Podemos escrever

$$V = P \times Q = P \times Q' \quad (3.3)$$

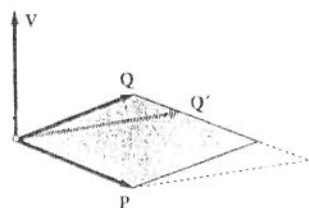


Figura 3.7

Da terceira condição usada para definir o produto vetorial V de P e Q , condição que estabelece que P , Q e V devem formar um triedro positivo, segue-se que os produtos vetoriais *não são comutativos*, isto é, $Q \times P$ não é igual $P \times Q$. Na realidade, podemos verificar que $Q \times P$ é representado pelo vetor $-V$, igual e oposto a V . Então, escrevemos

$$Q \times P = -(P \times Q) \quad (3.4)$$

* Área é a grandeza física associada ao tamanho de uma superfície e sua unidade legal é o m^2 . Por associação de ideias o termo área é usado nas representações gráficas de outras grandezas físicas. Nestes casos essas áreas não são medidas em m^2 , mas dependem dos produtos das grandezas envolvidas. (N. do R. T.)

Exemplo. Calculemos o produto vetorial $V = P \times Q$ do vetor P de módulo 6, situado no plano zx formando um ângulo de 30° com o eixo x , e o vetor Q de módulo 4, situado ao longo do eixo x (Fig. 3.8). Segue-se imediatamente da definição de produto vetorial que o vetor V deve situar-se ao longo do eixo y , ter o módulo

$$V = PQ \sin \theta = (6)(4) \sin 30^\circ \sin 30^\circ = 12$$

e ser orientado para cima.

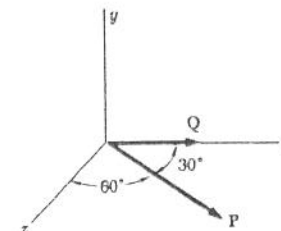


Figura 3.8

Vimos que a propriedade comutativa não se aplica aos produtos vetoriais. Poderíamos querer saber se a propriedade *distributiva* é mantida, isto é, se a relação

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2 \quad (3.5)$$

é válida. A resposta é *sim*. Muitos leitores estão provavelmente querendo aceitar a resposta sem uma prova formal, porque, intuitivamente, sentem que está correta. Contudo, como toda a estrutura da álgebra vetorial, e da estática, dependerá da relação (3.5), trataremos agora de deduzi-la.

Podemos, sem perda de generalidade, supor que P está orientado segundo o eixo y (Fig. 3.9a). Denominando Q a soma de Q_1 e Q_2 , baixamos perpendiculares das extremidades de Q , Q_1 e Q_2 , ao plano zx , definindo assim os vetores Q' , Q'_1 e Q'_2 . Esses vetores serão chamados, respectivamente, de *projeções* de Q , Q_1 e Q_2 sobre o plano zx .

Lembrando a propriedade expressa pela Eq. (3.3), observamos que o membro à esquerda da Eq. (3.5) pode ser substituído por $P \times Q'$ e que, analogamente, os produtos vetoriais $P \times Q_1$ e $P \times Q_2$ podem, respectivamente, ser substituídos por $P \times Q'_1$ e $P \times Q'_2$. Então a relação a ser provada pode ser expressa na forma

$$P \times Q' = P \times Q'_1 + P \times Q'_2 \quad (3.5')$$

Observamos, agora, que $P \times Q'$ pode ser obtido de Q' pela multiplicação desse vetor pelo escalar P , girando de 90° no sentido anti-horário no plano zx (Fig. 3.9b); os outros dois produtos vetoriais em (3.5') podem ser obtidos na mesma maneira de Q'_1 e Q'_2 , respectivamente. Agora, como a projeção de um paralelogramo sobre um plano arbitrário é um paralelogramo, a projeção Q' da soma Q de Q_1 e Q_2 deve ser a soma das projeções Q'_1 e Q'_2 de Q_1 e Q_2 sobre o mesmo plano (Fig. 3.9a). Essa relação entre os vetores Q' , Q'_1 e Q'_2 será válida mesmo depois de esses vetores serem multiplicados pelo escalar P e girados de 90° (Fig. 3.9b). Então a relação (3.5') fica provada e podemos agora estar seguros de que a propriedade distributiva é válida para os produtos vetoriais.

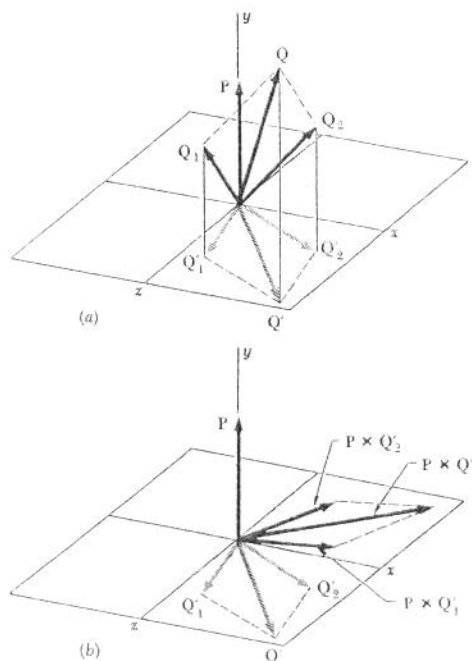


Figura 3.9

A terceira propriedade, a propriedade associativa, não se aplica aos produtos vetoriais. Temos em geral*

$$(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S) \quad (3.6)$$

3.5. Produto Vetorial Expresso em Termos das Componentes Cartesianas. Determinaremos, agora, os produtos vetoriais de qualquer par dos vetores unitários i , j e k , definidos no Cap. 2. Consideremos, primeiramente, o produto $i \times j$ (Fig. 3.10a). Como ambos os vetores têm módulo igual a um e formam um ângulo reto, seu produto vetorial será também um vetor unitário. Esse vetor unitário deve ser k , já que os vetores i , j e k são mutuamente ortogonais e formam entre si um triedro positivo. Por outro lado, o produto $j \times i$ será igual a $-k$, pois a rotação de 90° que traz j a i é observada como anti-horária por alguém colocado na extremidade de $-k$ (Fig. 3.10b). Finalmente, deve-se observar que o produto vetorial de um vetor unitário por si mesmo, tal como $i \times i$, é igual a zero, pois ambos os vetores têm a mesma direção.

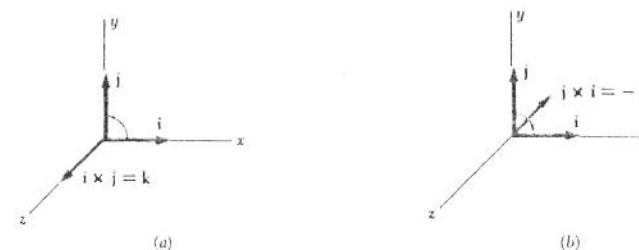


Figura 3.10

Os produtos dos diversos pares possíveis de vetores unitários são

$$\begin{array}{lll} i \times i = 0 & j \times i = -k & k \times i = j \\ i \times j = k & j \times j = 0 & k \times j = -i \\ i \times k = -j & j \times k = i & k \times k = 0 \end{array} \quad (3.7)$$

* Basta considerar, por exemplo, o caso $(i \times j) \times i \neq i \times (j \times i)$. (N. do R. T.)

Pela disposição em uma circunferência e em ordem anti-horária das letras representativas dos vetores unitários (Fig. 3.11), podemos simplificar a determinação do sinal do produto vetorial de dois vetores unitários: o produto de dois vetores unitários será positivo se seguirem um ao outro em ordem anti-horária e negativo em caso contrário.

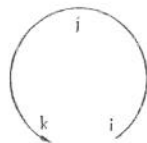


Figura 3.11

Podemos, agora, exprimir facilmente o produto vetorial $\mathbf{V}$ de dois vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ em termos das componentes cartesianas desses vetores. Decompondo $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ em suas componentes cartesianas, escrevemos, primeiramente,

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Fazendo uso da propriedade distributiva, expressamos $\mathbf{V}$ como a soma de produtos vetoriais, tais como $P_x \mathbf{i} \times Q_y \mathbf{j}$. Observando que cada uma das expressões obtidas é igual ao produto vetorial de dois vetores unitários, tais como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicados pelo produto de dois escalares, tais como P_x e Q_y , e lembrando as identidades (3.7), obtemos, após fatorar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$,

$$\mathbf{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

As componentes cartesianas do produto vetorial $\mathbf{V}$ são, portanto,

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Retornando à Eq. (3.8), observamos que o segundo membro representa a expansão de um determinante. O produto vetorial $\mathbf{V}$ pode então ser expresso da seguinte forma, mais facilmente memorizável:†‡

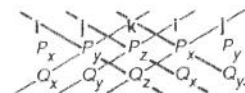
$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

3.6. Momento de uma Força em Relação a um Ponto. Consideremos, agora, uma força $\mathbf{F}$ que atua num corpo rígido (Fig. 3.12). Como sabemos, a força $\mathbf{F}$ é representada por um vetor que define seu módulo, direção e sentido. Contudo, o efeito da força sobre o corpo rígido depende, também, de seu ponto de aplicação A . A posição de A pode ser convenientemente definida pelo vetor $\mathbf{r}$, que une o ponto de referência fixo O com A ; esse vetor é conhecido como *vetor-posição* de A .** O vetor-posição $\mathbf{r}$ e a força $\mathbf{F}$ definem o plano ilustrado na Fig. 3.12a.

Definiremos o *momento de $\mathbf{F}$ em relação a O* como sendo o produto vetorial de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

* Qualquer determinante constituído de três linhas e três colunas pode ser calculado pela repetição da primeira e segunda colunas e formando os produtos ao longo de cada linha diagonal. A soma dos produtos obtidos ao longo das linhas tracejadas é então subtraída da soma dos produtos obtidos ao longo das linhas contínuas.



† A forma (3.10) é usualmente utilizada como definição de produto vetorial. O estudante pode, a partir desta, deduzir todas as propriedades discutidas nas Seções 3.3 e 3.4, de maneira simples e direta. (N. do R. T.)

‡ É importante notar que a condição necessária e suficiente para que dois vetores não nulos sejam paralelos é que seu produto vetorial seja nulo. (N. do R.T.)

** Podemos verificar facilmente que os vetores-posição obedecem à lei de adição de vetores e, portanto, são realmente vetores. Consideremos, por exemplo, os vetores-posição $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ de A , com respeito aos pontos de referência O e O' , e o vetor-posição $\mathbf{s}$ de O em relação a O' (Fig. 3.40a, Seção 3.16). Verificamos que o vetor-posição $\mathbf{r}' = \vec{O'A}$ pode ser obtido dos vetores $\mathbf{s} = \vec{OO'}$ e $\mathbf{r} = \vec{OA}$ pela aplicação da regra do triângulo para adição vetorial.

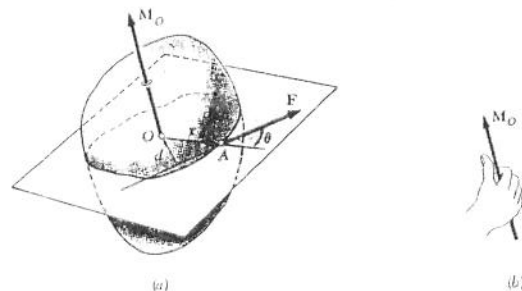


Figura 3.12

De acordo com a definição de produto vetorial dada na Seção 3.4, o momento M_O deve ser perpendicular ao plano que contém O e a força F . O sentido de M_O é definido pelo sentido da rotação que faria o vetor r alinhar-se com o vetor F . Essa rotação seria observada como *anti-horária* por um observador localizado na extremidade de M_O . Outra maneira de definir o sentido de M_O é fornecida pela *regra da mão direita*: feche sua mão direita e mantenha-a de modo que seus dedos estejam curvados, no sentido da rotação que F tende a comunicar ao corpo rígido, em torno de um eixo fixo, dirigido ao longo da linha de ação de M_O ; seu polegar indicará o sentido do momento M_O (Fig. 3.12b).

Finalmente, denominando θ o ângulo entre as linhas de ação do vetor-posição r e da força F , encontramos que o módulo do momento de F em relação a O é

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

onde d representa a distância de O à linha de ação de F . Como a tendência de uma força F de fazer girar um corpo rígido em torno de um eixo fixo perpendicular à força depende da distância de F a esse eixo, bem como do módulo de F *, observamos que o módulo de M_O mede a tendência de a força F fazer o corpo rígido girar em torno de um eixo fixo, dirigido segundo M_O .

No SI, onde a força é expressa em newtons (N) e a distância em metros (m), o momento da força será expresso em newtons-metros (N · m).

* Essa afirmação é baseada em mera intuição. Sua prova é dada no estudo da Dinâmica dos Corpos Rígidos (N. do R. T.)

Devemos observar que o momento M_O de uma força em relação a um ponto, embora dependa do módulo, da linha de ação e do sentido da força, *não* depende da posição do ponto de aplicação da força ao longo de sua linha de ação. Reciprocamente, o momento M_O de uma força F não caracteriza a posição do ponto de aplicação de F .

Contudo, o momento M_O de uma força F , de dado módulo, direção e sentido, *define completamente a linha de ação de F* . De fato, a linha de ação de F deve se situar em um plano que contenha O e seja perpendicular ao momento M_O ; sua distância d de O deve ser igual ao quociente M_O/F dos módulos de M_O e F ; o sentido de M_O determina se a linha de ação de F é traçada de um lado ou do outro do ponto O .

Relembrando a Seção 3.3, o princípio de transmissibilidade estabelece que duas forças F e F' são equivalentes (isto é, têm o mesmo efeito sobre o corpo rígido) se têm o mesmo módulo, a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma linha de ação. Esse princípio pode ser agora reformulado como se segue: duas forças F e F' são equivalentes se, e somente se, são iguais* (isto é, têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido) e têm momentos iguais em relação a um dado ponto O . A condição necessária e suficiente para que duas forças F e F' sejam equivalentes é, portanto,

$$F = F' \quad \text{e} \quad M_O = M'_O \quad (3.13)$$

Do que foi estabelecido podemos concluir que, se as relações (3.13) são válidas para um dado ponto O , serão válidas, também, para qualquer outro ponto.

Problemas Envolvendo Somente Duas Dimensões. Muitas aplicações se referem a estruturas bidimensionais, isto é, estruturas que têm comprimento e largura, mas espessura desprezível, e que estão submetidas a forças contidas no plano da estrutura. Estruturas bidimensionais e as forças que nelas atuam podem ser rapidamente representadas numa folha de papel ou num quadro-negro. Sua análise é, portanto, consideravelmente mais simples que a das estruturas e forças tridimensionais.

Consideremos, por exemplo, uma lâmina sob a ação de uma força F (Fig. 3.13). O momento de F em relação ao ponto O , escolhido no plano da figura, é representado por um vetor M_O , perpendicular a esse plano e de módulo Fd . No caso da Fig. 3.13a, o vetor M_O aponta para fora do papel, enquanto no da Fig. 3.13b, aponta para dentro do papel. Olhando a figura, observamos que a ação de F no primeiro caso é anti-horária e,

* Lembramos que vetores aplicados iguais têm mesmo ponto de aplicação. Neste livro, vetores aplicados iguais devem ser entendidos como sendo equipolentes, na linguagem da álgebra linear. (N. do R. T.)

no segundo, horário. Contudo, é comum referir-se ao sentido do momento F em relação a O na Fig. 3.13a como anti-horário) e na Fig. 3.13b como horário).

Como o momento de uma força F que atua no plano da figura deve ser perpendicular a esse plano, necessitamos especificar somente o módulo e o sentido do momento de F em relação a O . Isto pode ser feito atribuindo-se ao módulo M_O do momento um sinal positivo ou negativo conforme o vetor M_O aponte para fora ou para dentro do papel.

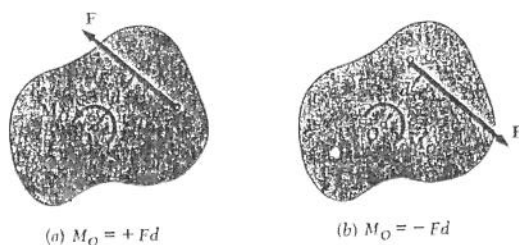


Figura 3.13

3.7. Teorema de Varignon. Podemos utilizar a propriedade distributiva do produto vetorial para determinar o momento da resultante de diversas forças concorrentes. Se diversas forças $F_1, F_2, \dots$ estão aplicadas num mesmo ponto A (Fig. 3.14) e se denominamos r o vetor-posição de A , concluímos imediatamente, da fórmula (3.5), que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.14)$$

Em palavras, o momento em relação a um dado ponto O da resultante de diversas forças concorrentes é igual à soma dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto O . Essa propriedade foi enunciada originalmente pelo matemático francês Varignon (1654-1722), muito antes da utilização da álgebra vetorial, e é conhecida como Teorema de Varignon.

A relação (3.14) torna possível substituir a determinação direta do momento de uma força F pela determinação dos momentos de duas ou mais forças componentes. Como veremos na próxima seção, F será geralmente decomposta em componentes paralelas aos eixos coordenados. Entretanto, pode ser mais fácil, em alguns casos,

decompor F em componentes que não sejam paralelas aos eixos coordenados (ver Problema Resolvido 3.3.).

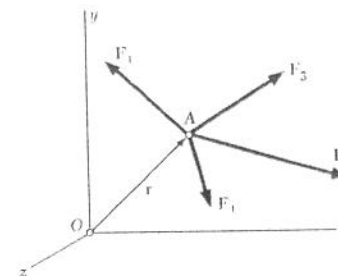


Figura 3.14

3.8. Componentes Cartesianas do Momento de uma Força. Em geral, a determinação do momento de uma força no espaço será simplificada consideravelmente se a força e o vetor-posição de seu ponto de aplicação forem decompostos em componentes cartesianas x, y e z . Consideremos, por exemplo, o momento M_O , em relação a O , de uma força F de componentes F_x, F_y e F_z , aplicada a um ponto A , de coordenadas x, y e z (Fig. 3.15). Observando que as componentes do vetor-posição r são, respectivamente, iguais às coordenadas x, y e z do ponto A , escrevemos

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (3.16)$$

Substituindo r e F de (3.15) e (3.16) em

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

e lembrando os resultados obtidos na Seção 3.4, escrevemos o momento M_O de F em relação a O na forma

$$\mathbf{M}_O = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k} \quad (3.17)$$

onde as componentes M_x , M_y e M_z são definidas pelas relações

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

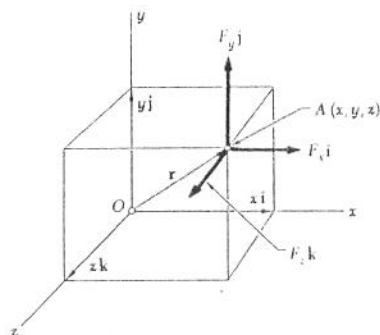


Figura 3.15

Como veremos na Seção 3.11, as componentes escalares M_x , M_y e M_z do momento $\mathbf{M}_O$ medem a tendência da força $\mathbf{F}$ de produzir no corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente. Substituindo as Eqs. (3.18) em (3.17), podemos também escrever $\mathbf{M}_O$ na forma de um determinante *

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular o momento $\mathbf{M}_B$ em relação a um ponto arbitrário B , da força $\mathbf{F}$ aplicada em A (Fig. 3.16), devemos substituir o vetor posição $\mathbf{r}$ na Eq. (3.11) pelo vetor

* Ver Eq. (3.10). (N. do R. T.)

$\rightarrow$ $\mathbf{r}_{A/B}$. Esse vetor é o vetor-posição de A em relação a B , que será representado por $\mathbf{r}_{A/B}$. Observando que $\mathbf{r}_{A/B}$ pode ser obtido pela subtração de $\mathbf{r}_B$ de $\mathbf{r}_A$ e escrevemos

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

ou, na forma de um determinante,

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

onde Δx , Δy e Δz são as componentes do vetor $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$\Delta x = x_A - x_B \quad \Delta y = y_A - y_B \quad \Delta z = z_A - z_B$$

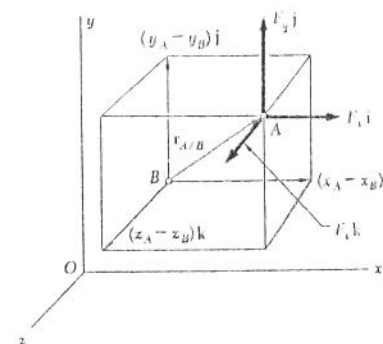


Figura 3.16

No caso de problemas que envolvem apenas duas dimensões, podemos supor que a força $\mathbf{F}$ se situa no plano xy (Fig. 3.17).

Fazendo $z = 0$ e $F_z = 0$ nas relações (3.19), obtemos

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

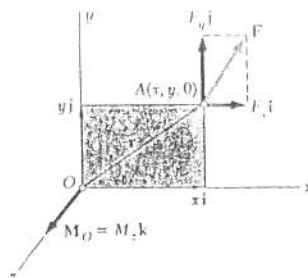


Figura 3.17

Verificamos que o momento de $\mathbf{F}$ em relação ao ponto O é perpendicular ao plano da figura e é definido completamente pelo escalar

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \quad (3.22)$$

Como observado anteriormente, um valor positivo para M_O indica que o vetor $\mathbf{M}_O$ aponta para fora do papel (a força $\mathbf{F}$ tende a girar o corpo no sentido anti-horário, em torno de O) e um valor negativo, que o vetor $\mathbf{M}_O$ aponta para dentro do papel (a força $\mathbf{F}$ tende a girar o corpo no sentido horário, em torno de O).

Para calcular o momento em relação a $B(x_B, y_B)$ de uma força contida no plano xy e aplicada em $A(x_A, y_A)$ (Fig. 3.18), fazemos $\Delta z = 0$ e $F_z = 0$ nas relações (3.21) e verificamos que o vetor $\mathbf{M}_B$ é perpendicular ao plano xy e definido em módulo e sentido pelo escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

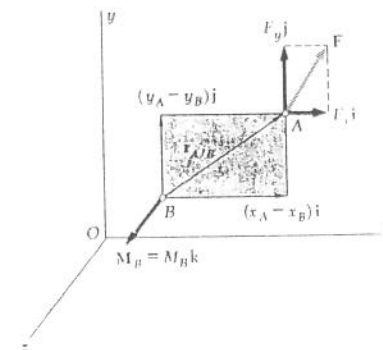
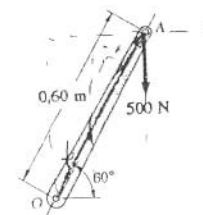


Figura 3.18

Problema Resolvido 3.1

Uma força vertical de 500 N é aplicada à extremidade de uma manivela fixada a um eixo em O . Determinar: (a) o momento da força de 500 N em relação a O ; (b) a intensidade da força horizontal aplicada em A que produz o mesmo momento em relação a O ; (c) a menor força aplicada em A que produz o mesmo momento em relação a O ; (d) a distância a que uma força vertical de 1 200 N deverá estar do eixo para gerar o mesmo momento em relação a O ; (e) se alguma das forças obtidas nos itens b, c e d é equivalente à força original.



a) Momento em relação a O . A distância de O à linha de ação da força de 500 N é

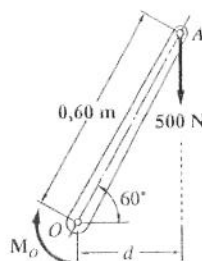
$$d = (0,60 \text{ m}) \cos 60^\circ = 0,30 \text{ m}$$

O módulo do momento em relação a O , da força de 500 N, é

$$M_O = Fd = -(500 \text{ N})(0,30 \text{ m}) = -150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Como a força tende a girar a manivela em torno de O , no sentido horário, o momento será representado por um vetor M_O , perpendicular ao plano da figura e apontado para dentro do papel. Expressamos esse fato escrevendo

$$M_O = 150 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \curvearrowright \leftarrow$$



b) **Força Horizontal.** Nesse caso temos

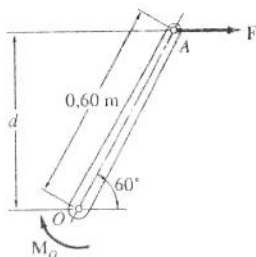
$$d = (0,60 \text{ m}) \sin 60^\circ = 0,52 \text{ m}$$

Como o momento em relação a O deve ser $150 \text{ N} \cdot \text{m}$, escrevemos

$$M_O = Fd = 150 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0,52 \text{ m})$$

$$F = 288 \text{ N}$$

$$F = 288 \text{ N} \rightarrow \leftarrow$$

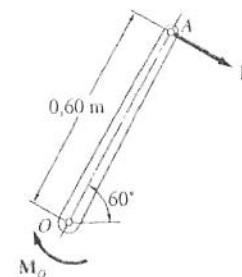


c) **A Menor Força.** Como $M_O = Fd$, o menor valor de F ocorre quando d é máximo. Tomando a força perpendicular a OA , encontramos $d = 0,60 \text{ m}$; assim

$$M_O = Fd = 150 \text{ N} \cdot \text{m} = F(0,60 \text{ m})$$

$$F = 250 \text{ N}$$

$$F = 250 \text{ N} \quad \curvearrowleft \quad 30^\circ \quad \curvearrowright$$



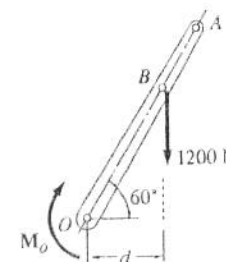
d) **Força Vertical de 1 200 N.** Nesse caso $M_O = Fd$ conduz a

$$150 \text{ N} \cdot \text{m} = (1\,200 \text{ N})d \quad d = 0,125 \text{ m}$$

porém

$$OB \cos 60^\circ = d$$

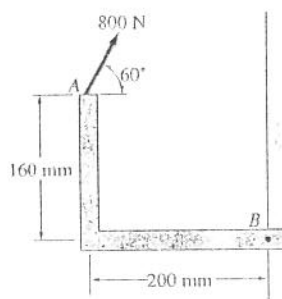
$$OB = 0,25 \text{ m} \quad \curvearrowleft \quad 60^\circ \quad \curvearrowright$$



e) Nenhuma das forças consideradas nos itens b, c e d é equivalente à força original de 500 N. Embora tenham o mesmo momento em relação a O, têm diferentes componentes x e y. Em outras palavras, embora cada força tenda a girar a manivela da mesma maneira, cada uma delas fará com que o esforço da manivela sobre o eixo seja diferente em cada caso.

Problema Resolvido 3.2

Uma força de 800 N é aplicada como ilustrado. Determine o momento da força em relação a B.



Solução. O momento M_B da força F em relação a B é obtido através do produto vetorial

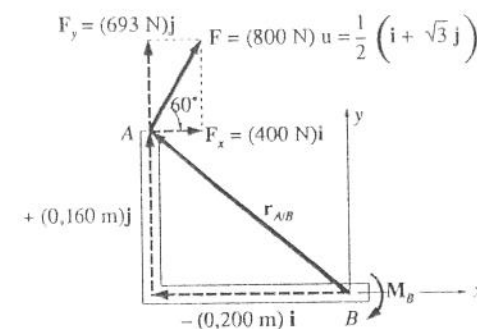
$$M_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

onde $\mathbf{r}_{A/B}$ é o vetor que liga B a A. Escrevendo $\mathbf{r}_{A/B}$ e $\mathbf{F}$ em termos de suas componentes, temos

$$\mathbf{r}_{A/B} = -(0,200 \text{ m})\mathbf{i} + (0,160 \text{ m})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j}$$

$$= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}$$



Lembrando as Eqs. (3.7) para o produto vetorial de vetores unitários, obtemos

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0,200 \text{ m})\mathbf{i} + (0,160 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}]$$

$$= -(136,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64,0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

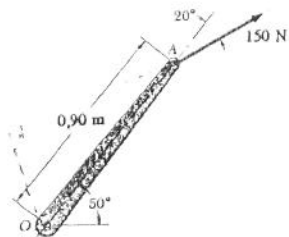
$$= -(202,6 \text{ N})\mathbf{k}$$

$$M_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \leftarrow$$

O momento M_B é um vetor perpendicular ao plano da figura e aponta para dentro do papel.

Problema Resolvido 3.3

Uma força de 150 N atua na extremidade de uma alavanca de 0,90 m, como ilustrado. Determinar o momento da força em relação a O.



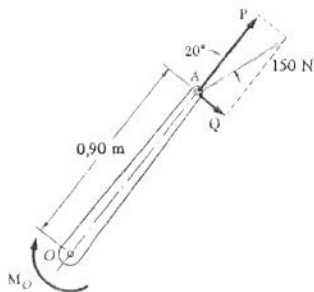
Solução. A força é substituída por duas componentes: uma componente P na direção OA e uma componente Q perpendicular a OA . Como O está na linha de ação de P , o momento de P em relação a O é zero, e o momento da força de 150 N se reduz ao momento de Q , que tem sentido horário e, portanto, é representado por um escalar negativo:

$$Q = (150 \text{ N}) \sin 20^\circ = 51,3 \text{ N}$$

$$M_O = -Q(0,90 \text{ m}) = -(51,3 \text{ N})(0,90 \text{ m}) = -46,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

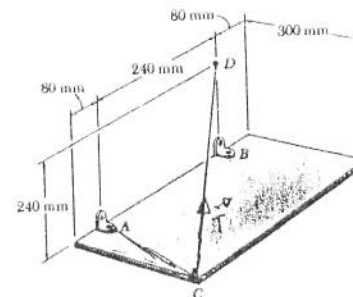
Como o valor obtido para o escalar M_O é negativo, o momento M_O aponta para dentro do papel. Escrevemos

$$M_O = 46,2 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \curvearrowleft$$



Problema Resolvido 3.4

Uma placa retangular é sustentada por suportes em A e em B e por um fio CD. Sabendo que a tração no cabo é de 200 N, determine o momento da força exercida pelo fio na placa, em relação ao ponto A.



Solução. O momento M_A da força F exercida pelo fio no ponto C em relação a A é calculado pelo produto vetorial

$$M_A = r_{C/A} \times F \quad (1)$$

onde $r_{C/A}$ é o vetor que liga A a C,

$$r_{C/A} = \vec{AC} = (0,300 \text{ m})\mathbf{i} + (0,080 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

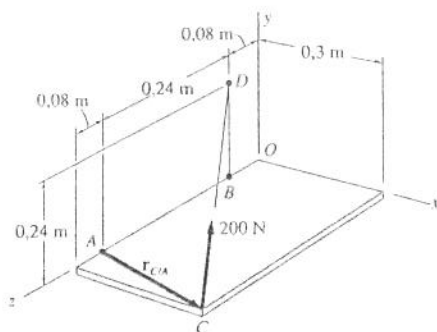
e F é a força de 200 N com direção CD . Definindo o vetor unitário $\lambda = \vec{CD}/CD$, escrevemos

$$F = F\lambda = (200 \text{ N}) \frac{\vec{CD}}{CD} \quad (3)$$

Escrevendo $\vec{CD}$ em termos de componentes cartesianas, temos

$$\vec{CD} = -(0,300 \text{ m})\mathbf{i} + (0,240 \text{ m})\mathbf{j} - (0,320 \text{ m})\mathbf{k}$$

$$CD = 0,500 \text{ m}$$

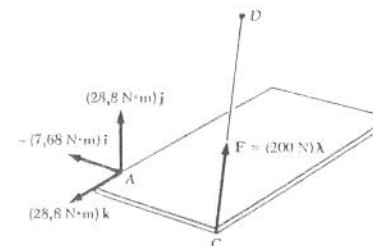


Substituindo na Eq. (3) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{200 \text{ N}}{0,500 \text{ m}} [-(0,300 \text{ m})\mathbf{i} + (0,240 \text{ m})\mathbf{j} - (0,320 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo as expressões de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{r}_{C/A}$ das Eq. (4) e (2) na Eq. (1) e lembrando as relações (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F} = (0,300\mathbf{i} + 0,080\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0,300)(96)\mathbf{k} + (0,300)(-128)(-\mathbf{j}) + (0,080)(-120)\mathbf{j} + (0,080)(96)(-\mathbf{i}) \\ \mathbf{M}_A &= -(7,68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \Leftarrow \end{aligned}$$



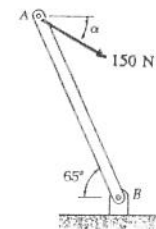
Solução alternativa. Como foi indicado na Seção 3.8, o momento $\mathbf{M}_A$ pode ser escrito na forma de um determinante:

$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,300 & 0 & 0,080 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_A = -(7,68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28,8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \Leftarrow$$

Problemas

3.1 Uma força de 150 N é aplicada à alavanca de controle AB, como ilustrado. O comprimento da alavanca é igual a 0,20 m e $\alpha = 30^\circ$. Determine o momento da força em relação a B decompondo a força: (a) em componentes horizontal e vertical e (b) em uma componente ao longo de AB e em outra perpendicular a AB.

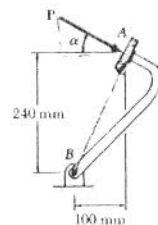


Figuras P3.1 e P3.2

3.2 Uma força de 150 N é aplicada à alavanca de controle AB , como ilustrado. Sabendo que o comprimento da alavanca é igual a 0,20 m e que o momento da força em relação a B é de 22,5 N · m, determine o valor de α .

3.3 Para o pedal de freio da figura, determine o módulo e a direção da menor força P que tem momento igual a 130 N · m em relação a B .

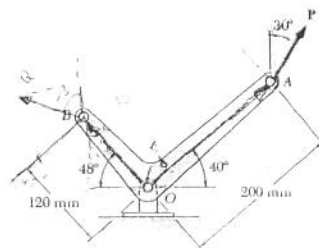
3.4 Uma força P é aplicada ao pedal de freio em A . Sabendo que $P = 450$ N e $\alpha = 30^\circ$, determine o momento de P em relação a B .



Figuras P3.3 e P3.4

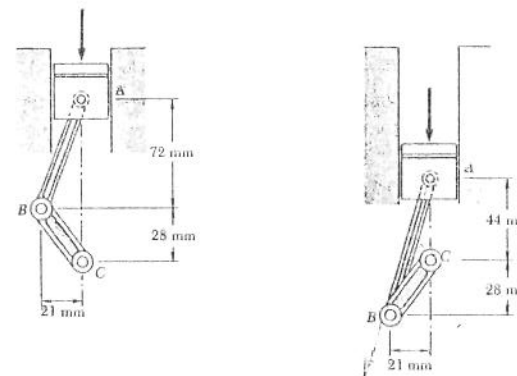
3.5 Uma força P de 300 N é aplicada ao ponto A da figura. (a) Calcule o momento de P em relação a O utilizando as componentes horizontal e vertical da força. (b) Com o resultado da parte (a), determine a distância de O à linha de ação de P .

3.6 Uma força P de 400 N é aplicada ao ponto A da figura. (a) Calcule o momento da força P em relação a O decompondo a força segundo OA e na direção perpendicular a OA . (b) Determine o módulo, a direção e o sentido da menor força Q que aplicada a B produza o mesmo momento, em relação a O , que a força P .



Figuras P3.5 e P3.6

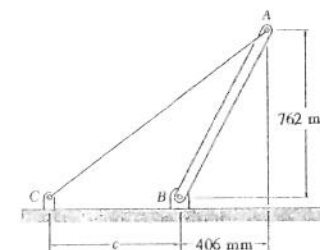
3.7 e 3.8 Sabe-se que a biela AB aplica no virabrequim uma força de 1,5 kN dirigida para baixo e para a esquerda, ao longo do eixo de simetria de AB . Determine o momento da força em relação a C .



Figuras P3.7 e P3.8

3.9 A barra AB é mantida na posição pelo cabo AC . Sabendo que a força de tração na corda é de 1 250 N e que $c = 0,60$ m, determine o momento em relação a B da força exercida pelo cabo no ponto A decompondo a força em componentes horizontal e vertical.

3.10 A barra AB é mantida na posição pelo cabo AC . Sabendo que $c = 1\,400$ mm e que o momento em relação a B da força exercida pela corda no ponto A é de 420 N · m, determine a força de tração na corda.



Figuras P3.9 e P3.10

3.11 Efetue o produto vetorial $P_1 \times P_2$ e utilize o resultado para provar a identidade $\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2$.

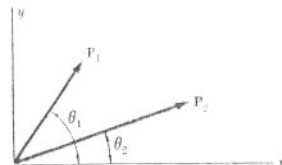


Figura P3.11

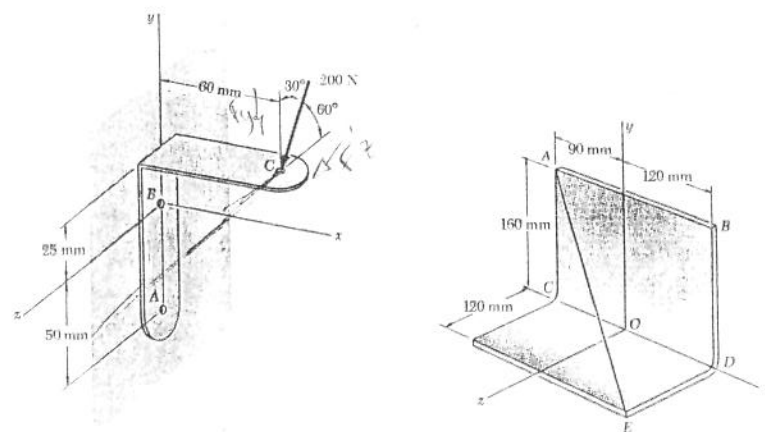
3.12 Uma força $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$ está aplicada em um ponto de coordenadas x e y . Deduza uma expressão para a distância d da linha de ação de $\mathbf{F}$ à origem O do sistema de coordenadas.

3.13 A linha de ação de uma força $\mathbf{P}$ passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Se o sentido da força é de A para B , determine o momento de $\mathbf{P}$ em relação à origem.

3.14 Determine o momento (em $\text{N} \cdot \text{m}$) em relação à origem O da força (em N) $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ aplicada ao ponto A . Suponha que o vetor-posição de A é (em m): (a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{r} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ e (c) $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

3.15 Determine o momento (em $\text{N} \cdot \text{m}$) em relação à origem da força (em N) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ aplicada ao ponto A . Suponha que o vetor-posição (em m) de A é: (a) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, (b) $\mathbf{r} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e (c) $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

3.16 Uma força de 200 N é aplicada ao suporte ABC , como ilustrado. Determine o momento da força em relação a A .

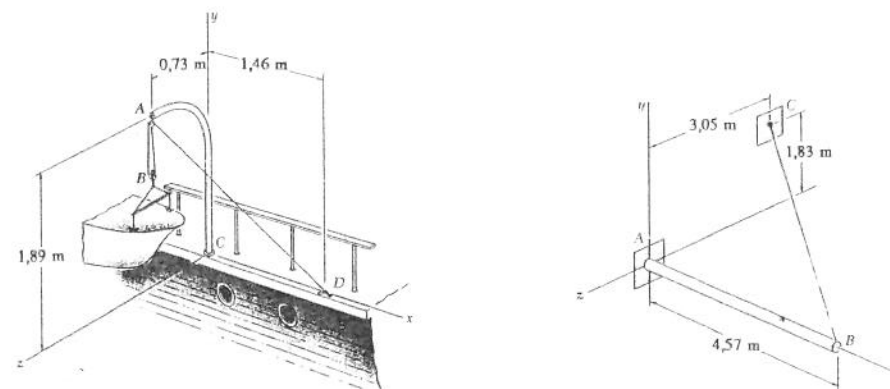


Figuras 3.16 e P3.17

3.17 O fio AE está esticado do canto A ao canto E de uma chapa dobrada. Sabendo que a tração no fio é de 435 N, determine o momento em relação a O da força exercida pelo fio (a) no canto A e (b) no canto E .

3.18 Um bote está pendurado em dois suportes, um dos quais é mostrado na figura. A tração na linha $ABAD$ é de 182 N. Determine o momento em relação a C da força resultante $\mathbf{R}_A$ exercida pela linha em A .

3.19 O mastro AB , de 4,57 m, tem uma extremidade fixa A . Um cabo de aço é esticado da ponta livre B até o ponto C de uma parede vertical. Se a tração no cabo é de 2 535 N, determine o momento em relação a A da força aplicada pelo cabo em B .



Figuras P3.18 e P3.19

3.20 No Prob. 3.17, determine a distância do ponto O ao fio AE .

3.21 No Prob. 3.17, determine a distância do ponto B ao fio AE .

3.22 No Prob. 3.19, determine a distância do ponto A ao cabo BC .

3.23 No Prob. 3.18, determine a distância do ponto C ao segmento AD da linha $ABAD$.

3.24 No Problema Resolvido 3.4 determine a distância do ponto A ao fio CD .

3.25 Uma força $\mathbf{F}$ é aplicada ao ponto $x = y = z = a$. Mostre que $M_x + M_y + M_z = 0$, isto é, mostre que a soma algébrica das componentes cartesianas do momento de $\mathbf{F}$ em relação a O é nula.

3.9. Produto Escalar de Dois Vetores. Ampliaremos agora nosso conhecimento de álgebra vetorial definindo o *produto escalar* de dois vetores.

O produto escalar de dois vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ é definido como sendo o produto dos módulos de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ pelo co-seno do ângulo θ formado por $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ (Fig. 3.19). O produto escalar de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ é representado por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Escrevemos, portanto,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

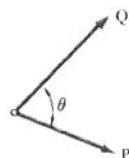


Figura 3.19

Observemos que a expressão definida acima não é um vetor, mas um *escalar*, o que explica o nome *produto escalar*.

Conclui-se, da própria definição, que o produto escalar de dois vetores é *comutativo*, isto é,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (3.25)$$

Para provar que o produto escalar é também *distributivo*, devemos provar a relação

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \quad (3.26)$$

Podemos, sem perda da generalidade, supor que $\mathbf{P}$ está orientado segundo o eixo y (Fig. 3.20). Denominando $\mathbf{Q}$ a soma de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$ e θ_y o ângulo que $\mathbf{Q}$ forma com o eixo y , exprimimos o primeiro membro de (3.26) como

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \quad (3.27)$$

onde Q_y é a componente y de $\mathbf{Q}$. Podemos, de maneira análoga, exprimir o segundo membro de (3.26) como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \quad (3.28)$$

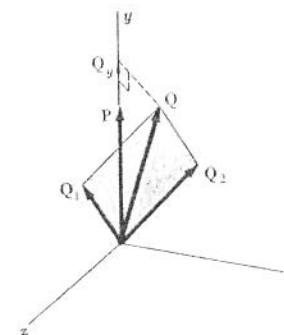


Figura 3.20

Como $\mathbf{Q}$ é a soma de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$, a sua componente y deve ser igual à soma das componentes y de $\mathbf{Q}_1$ e $\mathbf{Q}_2$. Por conseguinte, as expressões obtidas em (3.27) e (3.28) são iguais, e a relação (3.26) está provada.

Com relação à terceira propriedade, a propriedade associativa, notamos que ela não pode ser aplicada a produtos escalares: $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ não tem sentido já que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ não é um vetor, mas sim um escalar.

Expressemos agora o produto escalar de dois vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ em termos de suas componentes cartesianas. Decompondo $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ em suas componentes, podemos escrever

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Fazendo uso da propriedade distributiva, teremos $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ como soma de produtos escalares, tais como $P_x \mathbf{i} \cdot Q_x \mathbf{i}$ e $P_x \mathbf{i} \cdot Q_y \mathbf{j}$. Mas, da definição de produto escalar, podemos verificar facilmente que os produtos escalares dos vetores unitários são zero ou um:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Então a expressão obtida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduz a*

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

No caso particular em que $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ são iguais, verificamos que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (3.31)$$

Aplicações

1. *Ângulo formado por dois vetores dados.* Sejam dados dois vetores em termos de suas componentes:

$$\mathbf{P} = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k}$$

Para determinar o ângulo formado pelos dois vetores, igualamos as expressões obtidas em (3.24) e (3.30) para seu produto escalar

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

* Em álgebra linear o produto escalar é definido pela Eq. (3.30). Dessa definição decorrem todas as propriedades do produto escalar acima enumeradas. (N. do R.T.)

Resolvendo para $\cos \theta$, temos

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (3.32)$$

2. *Projeção de um vetor sobre um dado eixo.* Consideremos um vetor $\mathbf{P}$ que forma um ângulo θ com um eixo ou reta orientada OL (Fig. 3.21). A *projeção de $\mathbf{P}$ sobre o eixo OL* é definida como sendo o escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (3.33)$$

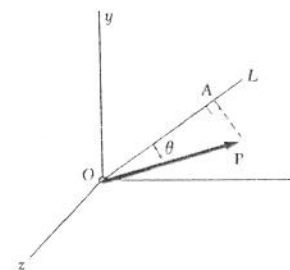


Figura 3.21

Notemos que a projeção P_{OL} é igual, em valor absoluto, ao comprimento do segmento OA e positiva se OA tem o mesmo sentido que o eixo OL , isto é, se θ for agudo, e negativa em caso contrário. Se $\mathbf{P}$ e OL forem perpendiculares entre si, a projeção de $\mathbf{P}$ sobre OL será zero.

Consideremos, agora, um vetor $\mathbf{Q}$ orientado segundo OL e de mesmo sentido que OL (Fig. 3.22). O produto escalar de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ pode ser expresso na forma

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL} Q \quad (3.34)$$

de onde se deduz

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \quad (3.35)$$

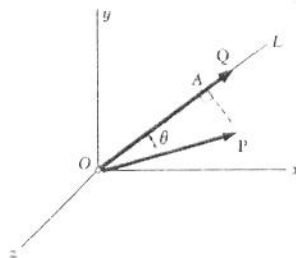


Figura 3.22

No caso particular em que o vetor escolhido segundo OL é o vetor unitário λ (Fig. 3.23), temos

$$P_{OL} = P \cdot \lambda \quad (3.36)$$

Decompondo P e λ em componentes cartesianas e lembrando da Seção 2.12 que as componentes de λ segundo os eixos coordenados são respectivamente iguais aos co-senos diretores de OL , temos para a projeção de P sobre OL

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

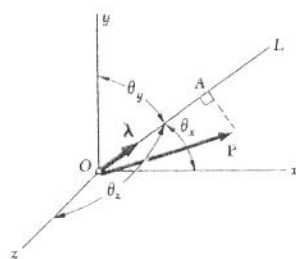


Figura 3.23

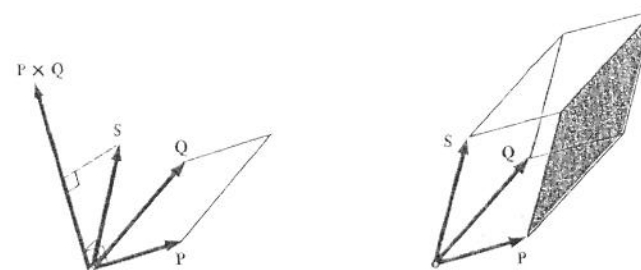
onde θ_x , θ_y e θ_z indicam os ângulos que o eixo OL forma com os eixos coordenados.

3.10. Produto Misto de Três Vetores. Definimos o *produto misto* de três vetores, S , P e Q pela expressão

$$S \cdot (P \times Q) \quad (3.38)$$

obtida efetuando-se o produto escalar de S pelo produto vetorial de P e Q .*

Uma interpretação geométrica simples pode ser dada para o produto misto de S , P e Q (Fig. 3.24). Vamos, inicialmente, lembrar da Seção 3.3 que o vetor $P \times Q$ é perpendicular ao plano que contém P e Q e que seu módulo é igual à área** do paralelogramo construído sobre P e Q . Por outro lado, a Eq. (3.34) indica que o produto escalar de S e $P \times Q$ pode ser obtido pela multiplicação do módulo $P \times Q$ (isto é, a área do paralelogramo construído sobre P e Q) pela projeção de S sobre o vetor $P \times Q$ (isto é, pela projeção de S sobre a normal ao plano que contém o paralelogramo). O produto misto é, portanto, igual, em valor absoluto, ao volume do paralelepípedo que tem como arestas S , P e Q (Fig. 3.25). Podemos verificar que o sinal do produto misto será positivo se S , P e Q formarem um triedro positivo, e negativo se formarem um triedro negativo (isto é, $S \cdot (P \times Q)$ será negativo se a rotação, que torna P colinear com Q , observada da extremidade de S , for no sentido horário). O produto misto será zero se S , P e Q forem coplanares.



Figuras 3.24 e 3.25

Como o paralelogramo definido no parágrafo precedente é independente da ordem na qual são tomados os três vetores, os seis produtos mistos que podem ser

* Outra espécie de produto de três vetores será apresentada mais tarde (Cap. 15), o *tríplice produto vetorial* $S \times (P \times Q)$.

** Ver observação no rodapé da página 104.

formados com S , P e Q terão todos o mesmo valor absoluto, embora não o mesmo sinal. Verificamos que

$$\begin{aligned} S \cdot (P \times Q) &= P \cdot (Q \times S) = Q \cdot (S \times P) = -S \cdot (Q \times P) = \\ &= -P \cdot (S \times Q) = -Q \cdot (P \times S) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Dispondo as letras representativas dos três vetores numa circunferência, em ordem anti-horária (Fig. 3.26), notamos que o sinal do produto misto é conservado sempre que os vetores permutados continuem em ordem anti-horária. Tal permutação é denominada *permutação cíclica*. Decorre também da (3.39) que o produto misto de S , P e Q pode ser definido igualmente por $S \cdot (P \times Q)$ ou $(S \times P) \cdot Q$.

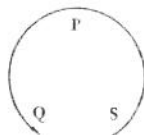


Figura 3.26

Expressemos agora o produto misto dos vetores S , P e Q em termos das componentes cartesianas desses vetores. Denominando $P \times Q$ de V e usando a fórmula (3.30) teremos, para o produto escalar de S e V ,

$$S \cdot (P \times Q) = S \cdot V = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Substituindo V por suas componentes, determinadas pelas relações (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} S \cdot (P \times Q) &= S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) + \\ &+ S_z(P_x Q_y - P_y Q_x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Essa expressão poderá ser escrita de forma mais compacta se observarmos que ela representa o desenvolvimento do determinante

$$S \cdot (P \times Q) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

Pela aplicação das regras que regem a permutação das linhas num determinante, podemos verificar facilmente as relações (3.39), que foram deduzidas anteriormente por meio de considerações geométricas.

3.11. Momento de uma Força em Relação a um Eixo Dado. Agora que aumentamos nosso conhecimento de álgebra vetorial, apresentaremos um novo conceito: o conceito de *momento de uma força em relação a um eixo*. Consideremos novamente uma força F que atua num corpo rígido e o momento M_O dessa força em relação a O (Fig. 3.27). Seja OL um eixo que passa por O ; definimos *momento M_{OL} de F em relação a OL como sendo a projeção OC do momento M_O sobre o eixo OL* .

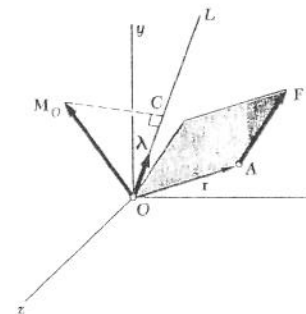


Figura 3.27

Denominando λ o vetor unitário segundo OL e lembrando as expressões (3.36) e (3.11), obtidas para a projeção de um vetor sobre um dado eixo e para o momento M_O de uma força F , escrevemos

$$M_{OL} = \lambda \cdot M_O = \lambda \cdot (r \times F) \quad (3.42)$$

que mostra ser o momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ em relação ao eixo OL o escalar obtido pelo produto misto de λ , $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$. Exprimindo M_{OL} na forma de um determinante, escrevemos

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = co-senos diretores do eixo OL

x, y, z = coordenadas do ponto de aplicação $\mathbf{F}$

F_x, F_y, F_z = componentes da força $\mathbf{F}$

O significado físico do momento M_{OL} de uma força $\mathbf{F}$ em relação a um eixo fixo OL irá tornar-se mais claro se decompusermos $\mathbf{F}$ em duas componentes ortogonais $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$, sendo $\mathbf{F}_1$ paralela a OL e $\mathbf{F}_2$ situado em um plano P normal a OL (Fig. 3.28). Decompondo, analogamente, $\mathbf{r}$ em duas componentes $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ e substituindo $\mathbf{F}$ e $\mathbf{r}$ na Eq. (3.42), escrevemos

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

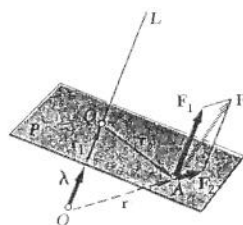


Figura 3.28

Observando que todos os produtos mistos, exceto o último, são iguais a zero porque envolvem vetores que são coplanares, quando traçados a partir de uma origem comum (Seção 3.9), temos

$$M_{OL} = \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \quad (3.44)$$

O produto vetorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ é perpendicular ao plano P e representa o momento da componente $\mathbf{F}_2$ de $\mathbf{F}$ em relação ao ponto Q , onde OL intercepta P . Portanto o escalar M_{OL} , que será positivo se $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ e OL tiverem o mesmo sentido e negativo em caso contrário, mede a tendência de $\mathbf{F}_2$ fazer girar o corpo rígido ao redor do eixo fixo OL . Como a outra componente $\mathbf{F}_1$ de $\mathbf{F}$ não tende a fazer girar o corpo ao redor de OL , concluímos que o momento M_{OL} de $\mathbf{F}$ mede a tendência da força $\mathbf{F}$ de produzir no corpo rígido um movimento de rotação em relação ao eixo OL . *

Segue, da definição do momento de uma força em relação a um eixo, que o momento de $\mathbf{F}$ em relação a um dos eixos coordenados é igual à componente de $\mathbf{M}_O$ segundo esse eixo. Substituindo λ sucessivamente por cada um dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na Eq. (3.42), verificamos que as expressões assim obtidas para os momentos de $\mathbf{F}$ em relação aos eixos coordenados são, respectivamente, iguais às expressões obtidas na Seção 3.8 para as componentes do momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ em relação a O .

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Observamos que, assim como as componentes F_x , F_y e F_z de uma força $\mathbf{F}$ que atua sobre um corpo rígido medem, respectivamente, a tendência de $\mathbf{F}$ mover o corpo rígido nas direções x , y e z , os momentos M_x , M_y e M_z de $\mathbf{F}$ em relação aos eixos coordenados medem a tendência dessa força produzir no corpo um movimento de rotação ao redor dos eixos x , y e z , respectivamente. *

De maneira geral, o momento de uma força $\mathbf{F}$ aplicada em A , em relação a um eixo que não passa pela origem, é obtido escolhendo-se um ponto arbitrário B sobre o eixo (Fig. 3.29) e determinando-se a projeção sobre o eixo BL do momento $\mathbf{M}_B$ de $\mathbf{F}$ em relação a B .

* Essas conclusões baseiam-se tão somente na intuição. Elas são demonstradas na parte de Dinâmica de um Corpo Rígido. (N. do R.T.)

Escrevemos

$$M_{BL} = \lambda \cdot M_B = \lambda \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \quad (3.45)$$

onde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa o vetor que liga B a A. Exprimindo M_{BL} na forma de um determinante, temos

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \Delta_x & \Delta_y & \Delta_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ co-senos diretores do eixo BL

$$\Delta x = x_A - x_B, \Delta y = y_A - y_B, \Delta z = z_A - z_B$$

$F_x, F_y, F_z =$ componentes da força F

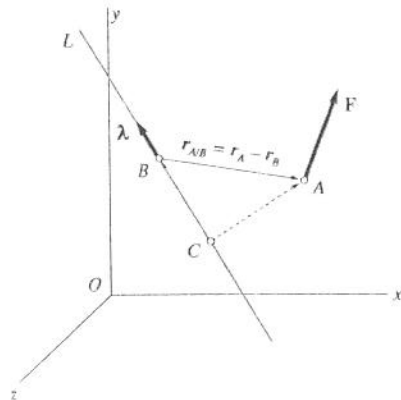


Figura 3.29

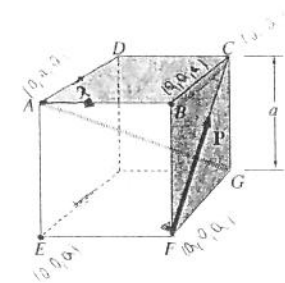
Deve-se notar que o resultado obtido é independente da escolha do ponto B sobre o eixo dado. Realmente, denominando de M_{CL} o resultado obtido com um ponto diferente C, temos

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \lambda \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Porém, como os vetores λ e $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ pertencem à mesma reta, o volume* do paralelepípedo tendo como arestas os vetores λ , $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ e $\mathbf{F}$ será zero, como também o produto misto desses três vetores (Seção 3.10). Assim a expressão obtida para M_{CL} reduz-se a seu primeiro termo, que é a expressão anteriormente usada para definir M_{BL} .

Problema Resolvido 3.5

Um cubo de aresta a é submetido a uma força $\mathbf{P}$, como ilustrado. Determinar o momento de $\mathbf{P}$ (a) em relação a A, (b) em relação à aresta AB e (c) em relação à diagonal AG do cubo. (d) Utilizando o resultado da parte (c), determine a distância de AG a FC.



a) **Momento em relação a A.** Escolhendo os eixos x, y e z , conforme ilustrado, decompomos em componentes cartesianas a força $\mathbf{P}$ e o vetor $\Delta \mathbf{r} = \overrightarrow{AF}$, que liga A ao ponto de aplicação F de $\mathbf{P}$:

$$\Delta \mathbf{r} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

* Cabe aqui uma observação semelhante à feita ao rodapé da página 104 com relação às áreas. Estes volumes não são medidos em m^3 .

O momento de $\mathbf{P}$ em relação a A é

$$\mathbf{M}_A = \Delta \mathbf{r} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

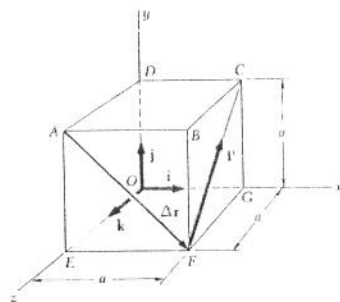
$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \Leftarrow$$

b) Momento em relação a AB . Projetando $\mathbf{M}_A$ sobre AB , escrevemos

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \Leftarrow$$

Verificamos que, como AB é paralela ao eixo x , M_{AB} é também a componente x do momento $\mathbf{M}_A$.



c) Momento em relação à diagonal AG . O momento de $\mathbf{P}$ em relação a AG é obtido projetando-se $\mathbf{M}_A$ sobre AG . Denominando λ o vetor unitário ao longo de AG , observamos que

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

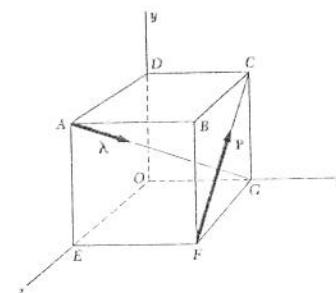
e escrevemos

$$M_{AG} = \lambda \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \Leftarrow$$

Método Alternativo. O momento de $\mathbf{P}$ em relação a AG também pode ser expresso na forma de um determinante

$$\mathbf{M}_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

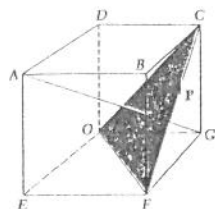


d) Distância de AG a FC . Primeiro, observamos que $\mathbf{P}$ é perpendicular à diagonal AG . Isto pode ser verificado pelo produto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$, que é nulo:

$$\mathbf{P} \cdot \lambda = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P/\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

O momento M_{AG} pode então ser expresso como $-Pd$, onde d é a distância de AG a FC . (O sinal negativo é usado porque a rotação produzida no cubo por $\mathbf{P}$ parecerá estar no sentido horário a um observador em G .) Lembrando o valor encontrado para M_{AG} na parte (c),

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \quad d = a/\sqrt{6} \Leftarrow$$



Problemas

3.26 Dados os vetores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,

$\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule os produtos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ e $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

3.27 Calcule o produto escalar $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$ e utilize o resultado obtido para provar a identidade $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$.

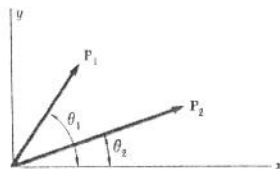
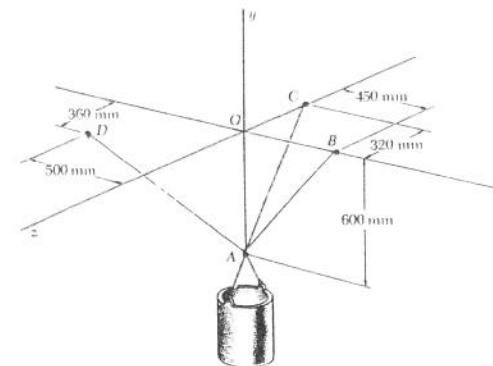


Figura P3.27

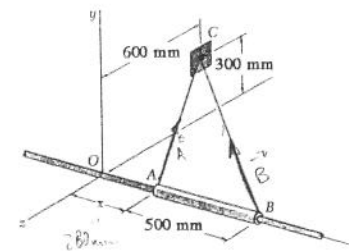
3.28 Três cabos são utilizados para sustentar um recipiente, como ilustrado. Determine o ângulo formado pelos cabos AB e AD .

3.29 Três cabos são utilizados para sustentar um recipiente, como ilustrado. Determine o ângulo formado pelos cabos AC e AD .



Figuras P3.28 e P3.29

3.30 O tubo AB pode deslizar ao longo do eixo horizontal. Os extremos A e B do tubo estão ligados ao ponto fixo C por meios de elásticos. Na posição correspondente a $x = 280$ mm, determine o ângulo formado pelos dois elásticos (a) usando a Eq. (3.32) e (b) aplicando a lei dos co-senos ao triângulo ABC .



Figuras P3.30

3.31 Resolva o Problema 3.30 quando $x = 100$ mm.

3.32 Sabendo que a força de tração no cabo AC é de $1\,260$ N, determine: (a) o ângulo entre o cabo AC e o mastro AB e (b) a projeção sobre AB da força aplicada pelo cabo AC no ponto A .

- 3.33 Sabendo que a força de tração no cabo AD é de 810 N, determine: (a) o ângulo entre AD e o mastro AB e (b) a projeção sobre AB da força exercida pelo cabo AD no ponto A .

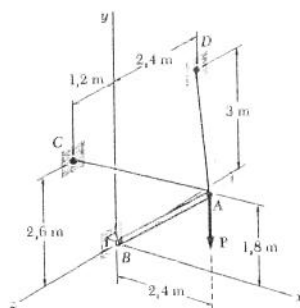


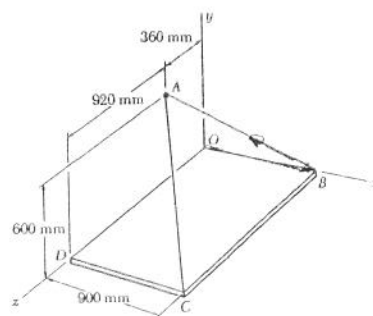
Figura P3.32 e P3.33

- 3.34 Dados os vetores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S})$, $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ e $(\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{P}$.

- 3.35 Dados os vetores $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ e $\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determine o valor de S_x para o qual os três vetores são coplanares.

- 3.36 Sabendo que a força de tração no cabo AB é de 570 N, determine o momento, em relação a cada um dos eixos coordenados, da força aplicada no ponto B da placa.

- 3.37 Sabendo que a força de tração no cabo AC é de 1 065 N, determine o momento da força aplicada no ponto C da placa, em relação a cada eixo coordenado.



Figuras P3.36 e P3.37

- 3.38 Um pequeno barco pende de dois suportes, um dos quais é mostrado na figura. Sabe-se que o momento, em relação ao eixo z , da força resultante $\mathbf{R}_A$ aplicada no ponto A do suporte não deve exceder o valor de 217 N · m, em valor absoluto. Determine o maior valor possível da força de tração no cabo $ABAD$ quando $x = 1,46$ m.

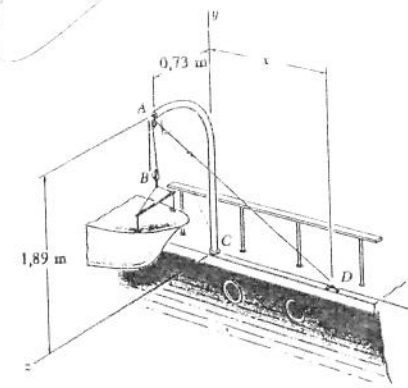
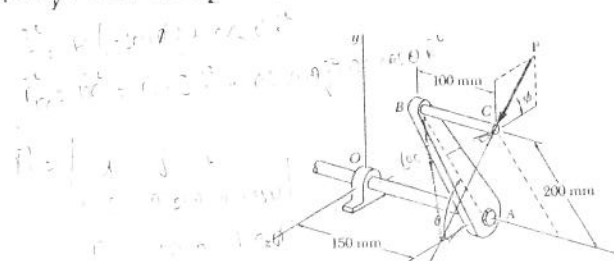


Figura P3.38

- 3.39 Com referência ao Prob. 3.38, determine o maior valor de x compatível com uma força de tração de 214 N no cabo $ABAD$.

- 3.40 Uma força única $\mathbf{P}$ atua no ponto C em uma direção perpendicular ao cabo BC da manivela da figura. Sabendo que $M_x = 20$ N · m, $M_y = 8,75$ N · m e $M_z = -30$ N · m, determine o módulo de $\mathbf{P}$ e os valores de ϕ e θ .

- 3.41 Uma única força $\mathbf{P}$ atua no ponto C em uma direção perpendicular ao cabo BC da manivela da figura. Determine o momento M_x de $\mathbf{P}$ em relação ao eixo x , quando $\theta = 70^\circ$, sabendo que $M_y = -20$ N · m e $M_z = -37,5$ N · m.



Figuras P3.40 e P3.41

3.42 O suporte ACD está articulado* em A e D e é sustentado por um cabo que passa através do anel em B e que está preso nos ganchos em G e H . Sabendo que a tração no cabo é de 450 N, determine o momento, em relação à diagonal AD , da força aplicada no suporte pelo segmento BH do cabo.

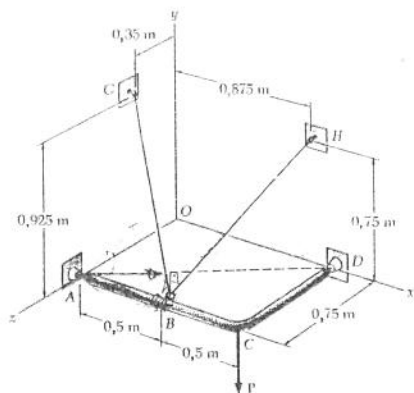


Figura P3.42

3.43 No Prob. 3.42, determine o momento em relação à diagonal AD da força exercida no suporte pelo segmento BG do cabo.

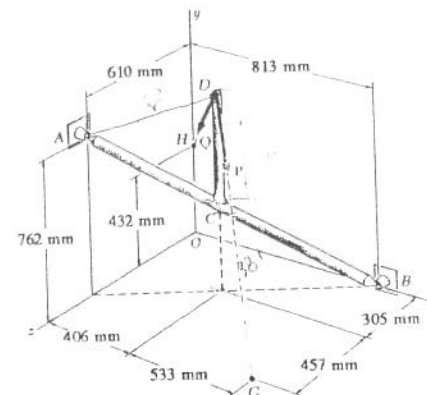
3.44 A barra vertical CD , de 584 mm, está soldada ao ponto médio da barra AB de 1 270 mm. Determine o momento em relação a AB da força P de módulo igual a 1045 N.

3.45 Com referência ao Prob. 3.44 determine o momento em relação a AB da força Q de 645 N.

3.46 As seis arestas de um tetraedro regular medem a . Uma força P tem a direção da aresta BC , como se vê na figura. Determine o momento de P em relação à aresta OA .

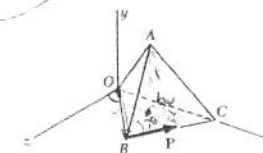
3.47 No espaço, duas forças F_1 e F_2 têm mesmo módulo F . Prove que o momento de F_1 em relação à linha de ação de F_2 é igual ao momento de F_2 em relação à linha de ação de F_1 .

* Articulação é um tipo de vínculo capaz de oferecer resistência em qualquer direção mas nenhuma resistência a momentos aplicados. Anel é capaz apenas de oferecer resistência a forças perpendiculares a seu eixo. (N. do R.T.)



Figuras P3.44 e P3.45

3.48 Um tetraedro regular tem seis arestas iguais a a . (a) Mostre que duas arestas opostas, tais como OA e BC , são perpendiculares uma à outra. (b) Fazendo uso dessa propriedade e do resultado do Prob. 3.46, determine a distância entre as arestas OA e BC .



Figuras P3.46 e P3.48

* 3.49 Usando o resultado do Prob. 3.44, determine a distância entre a barra AB e a linha de ação de P .

* 3.50 Usando o resultado do Prob. 3.42, determine a distância entre o segmento BH do cabo e a diagonal AD .

* 3.51 No Prob. 3.42, determine a distância entre o segmento BG do cabo e a diagonal AD .

* 3.52 No Prob. 3.45, determine a distância entre a barra AB e a linha de ação de Q .

3.12. Momento de um Binário. Duas forças F e $-F$ que tenham o mesmo módulo, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário (Fig. 3.30). É claro que a soma das componentes das duas forças em qualquer direção é zero. A soma dos momentos das duas forças em relação a um dado ponto, no entanto, não é zero. Apesar de as duas forças não transladarem o corpo no qual atuam, tenderão a fazê-lo girar.*



Figura 3.30

Representando por $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$, respectivamente, os vetores-posição dos pontos de aplicação de F e $-F$ (Fig. 3.31), encontramos para a soma dos momentos das duas forças em relação a O

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

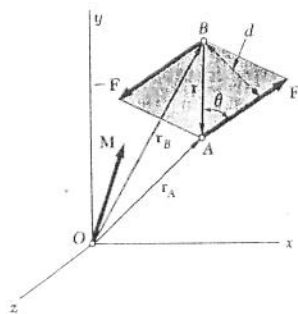


Figura 3.31

* Novamente essa afirmação é meramente baseada na intuição. Ela pode ser demonstrada na teoria da Dinâmica dos Corpos Rígidos. (N. do R.T.)

Fazendo $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor que une os pontos de aplicação das duas forças, concluímos que a soma dos momentos de F e $-F$ em relação a O é

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.47)$$

O vetor $\mathbf{M}$, denominado *momento do binário*, é um vetor perpendicular ao plano que contém as duas forças e de módulo

$$M = rF \sin \theta = Fd \quad (3.48)$$

onde d é a distância entre as linhas de ação de F e $-F$. O sentido de $\mathbf{M}$ é definido pela regra da mão direita.

Como o vetor $\mathbf{r}$ em (3.47) é independente da escolha da origem O do sistema de coordenadas, notamos que o mesmo resultado teria sido obtido se os momentos de F e $-F$ tivessem sido calculados em relação a um ponto diferente O' . Então o momento $\mathbf{M}$ do binário é um *vetor livre* (Seção 2.2), que pode ser aplicado em qualquer ponto (Fig. 3.32).*

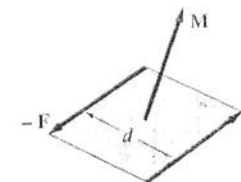


Figura 3.32

Da definição do momento de um binário se deduz, também, que dois binários, um constituído pelas forças F_1 e $-F_1$ e o outro pelas forças F_2 e $-F_2$ (Fig. 3.33), terão momentos iguais se

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

* Momento é sempre um vetor livre. O que o autor quer dizer aqui é que o momento de um binário não depende do ponto escolhido O para se calcular esse momento. A não ser em problemas em que se considera a deformação dos corpos, *momento* é um vetor que não tem ponto de aplicação, ao contrário de uma força. (N. do R.T.)

se os dois binários se situarem em planos paralelos (ou no mesmo plano) e tiverem o mesmo sentido.

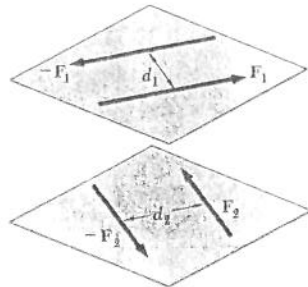


Figura 3.33

3.13. Binários Equivalentes. Consideremos os três binários ilustrados na Fig. 3.34, aplicados sucessivamente à mesma caixa. Como visto na seção precedente, o único movimento que um binário pode produzir em um corpo rígido é o de rotação. Como cada um dos três binários ilustrados tem o mesmo momento M (mesma direção e mesmo módulo $M = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$), podemos esperar que os três binários tenham o mesmo efeito sobre a caixa.

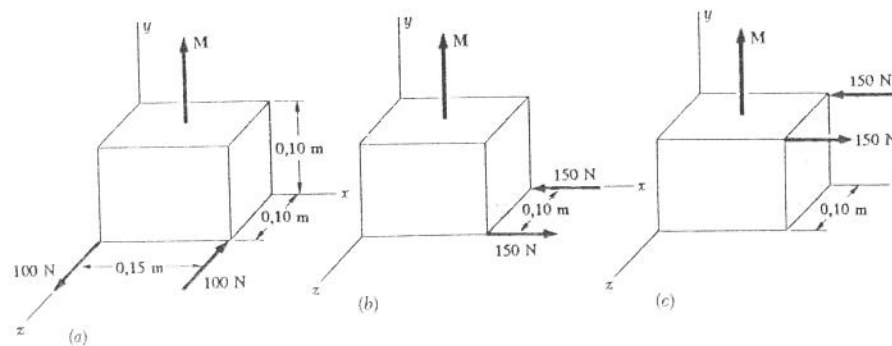


Figura 3.34

Por mais razoável que possa parecer essa conclusão, não devemos aceitá-la apressadamente. Embora a intuição seja de grande valia no estudo da Mecânica, não devemos aceitá-la como substituta do raciocínio lógico. Antes de afirmar que dois sistemas (ou conjuntos) de forças têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido, esse fato deve ser provado com base na evidência experimental apresentada anteriormente. Essa evidência consiste na lei do paralelogramo para a adição de duas forças (Seção 2.2) e no princípio de transmissibilidade (Seção 3.3). Por conseguinte, estabeleceremos que *dois sistemas de forças são equivalentes* (isto é, têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido) se pudermos transformar um deles no outro por intermédio de uma ou várias das seguintes operações: (1) substituição de duas forças que atuam num mesmo ponto material por sua resultante, (2) decomposição de uma força em componentes, (3) cancelamento de duas forças iguais e opostas que atuam sobre o mesmo ponto, (4) aplicação sobre o mesmo ponto de duas forças iguais e opostas e (5) deslocamento de uma força ao longo de sua linha de ação.* Cada uma dessas operações é facilmente justificada com base na lei do paralelogramo ou no princípio de transmissibilidade.

Vamos provar, agora, que *dois binários que têm o mesmo momento M são equivalentes*. Primeiramente, consideraremos dois binários contidos no mesmo plano e suporemos que esse plano coincide com o plano da Fig. 3.35. O primeiro binário é constituído pelas forças F_1 e $-F_1$, de módulo F_1 e distantes d_1 uma da outra (Fig. 3.35a), e o segundo binário pelas forças F_2 e $-F_2$, de módulo F_2 e distantes d_2 uma da outra (Fig. 3.35d). Como os dois binários têm o mesmo momento M , perpendicular ao plano da figura, devem ter o mesmo sentido (aqui considerado anti-horário) e a relação

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

deve ser satisfeita. Para provar que são equivalentes, demonstraremos que o primeiro binário pode ser transformado no segundo por meio das operações acima mencionadas.

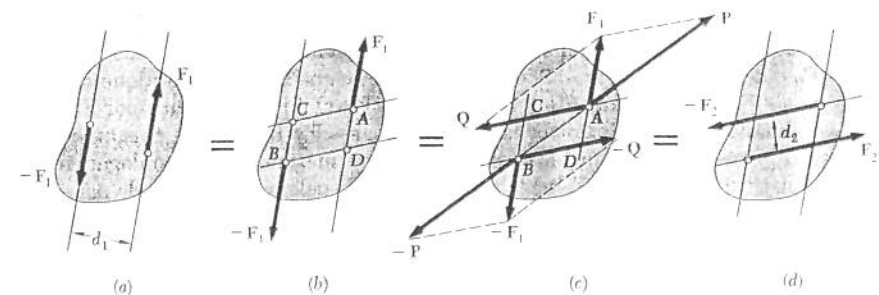


Figura 3.35

* A operação (5) é consequência das quatro operações anteriores. (N. do R.T.)

Representando por A , B , C e D os pontos de interseção das linhas de ação dos dois binários, deslizaremos primeiro as forças F_1 e $-F_1$ até que estejam aplicadas em A e em B , respectivamente, como mostra a Fig. 3.35b. A força F_1 é então decomposta em uma componente P , segundo a reta AB , e em uma componente Q , segundo AC (Fig. 3.35c); analogamente, a força $-F_1$ é decomposta em $-P$ segundo AB e $-Q$ segundo BD . As forças P e $-P$ têm o mesmo módulo, mesma linha de ação e sentidos opostos; podem ser deslizadas, segundo sua linha de ação comum, até que estejam aplicadas no mesmo ponto e canceladas. Portanto o binário formado por F_1 e $-F_1$ se reduz a um binário constituído de Q e $-Q$.

Mostraremos, agora, que as forças Q e $-Q$ são, respectivamente, iguais às forças $-F_2$ e F_2 . O momento do binário formado por Q e $-Q$ pode ser obtido pelo cálculo do momento de Q em relação a B . Analogamente, o momento do binário formado por F_1 e $-F_1$ é o momento de F_1 em relação a B . Mas, pelo teorema de Varignon, o momento de F_1 é igual à soma dos momentos de suas componentes P e Q . Como o momento de P em relação a B é zero, o momento do binário formado por Q e $-Q$ deve ser igual ao momento do binário formado por F_1 e $-F_1$. Lembrando a Eq. (3.49), escrevemos

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \quad \text{e} \quad Q = F_2$$

Então as forças Q e $-Q$ são, respectivamente, iguais às forças $-F_2$ e F_2 , e o binário da Fig. 3.35a é equivalente ao binário da Fig. 3.35d.

Consideraremos, a seguir, dois binários contidos nos planos paralelos P_1 e P_2 e provaremos que são equivalentes se tiverem o mesmo momento. Tendo em vista o que já foi apresentado, vamos supor que os binários são constituídos de forças de mesmo módulo F que atuam ao longo de linhas paralelas (Fig. 3.36a e d). Propomos mostrar que o binário contido no plano P_1 pode ser transformado no binário contido no plano P_2 por meio das operações relacionadas acima.

Consideremos dois planos definidos, respectivamente, pelas linhas de ação de F_1 e $-F_2$ e de $-F_1$ e F_2 (Fig. 3.36b). Num ponto de sua interseção apliquemos duas forças F_3 e $-F_3$, respectivamente iguais a F_1 e $-F_1$. O binário formado por F_1 e $-F_3$ pode ser substituído pelo binário constituído de F_3 e $-F_2$ (Fig. 3.36c), pois ambos têm claramente o mesmo momento e estão contidos no mesmo plano. Analogamente, o binário constituído de $-F_1$ e F_3 pode ser substituído pelo binário formado por $-F_3$ e F_2 . Cancelando as duas forças iguais e opostas F_3 e $-F_3$, obtemos o binário desejado, contido no plano P_2 (Fig. 3.36d). Demonstramos, assim, que dois binários de mesmo momento M são equivalentes se contidos no mesmo plano ou em planos paralelos.

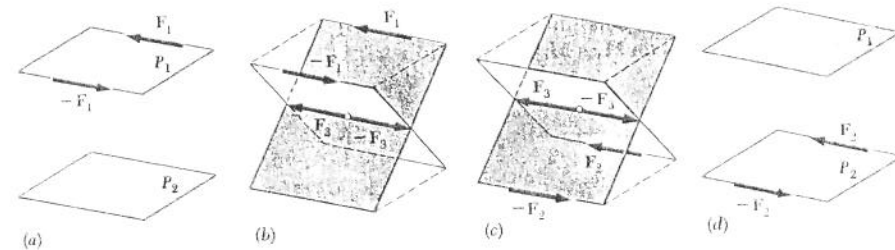


Figura 3.36

A propriedade que acabamos de estabelecer é muito importante para o entendimento correto da Mecânica dos Corpos Rígidos. Ela indica que, quando um binário atua sobre um corpo rígido, não importa onde atuam as duas forças que formam esse binário, nem o módulo e a direção delas; a única coisa que importa é o momento do binário (módulo, direção e sentido). Binários de mesmo momento terão o mesmo efeito sobre o corpo rígido considerado.

3.14. Adição de Binários. Consideremos a interseção de dois planos P_1 e P_2 e dois binários que atuam, respectivamente, em P_1 e P_2 . Podemos, sem perda da generalidade, considerar que o binário em P_1 consiste em duas forças F_1 e $-F_1$, perpendiculares à interseção dos dois planos e que agem, respectivamente, em A e B (Fig. 3.37a). Analogamente, suponhamos que o binário em P_2 consista em duas forças F_2 e $-F_2$, perpendiculares a AB e que agem, respectivamente, em A e B . É claro que a resultante R de F_1 e F_2 e a resultante $-R$ de $-F_1$ e $-F_2$ formam um binário.

Representando por r o vetor que liga B a A e lembrando a definição de momento de um binário (Seção 3.12), exprimimos o momento M do binário resultante como

$$M = r \times R = r \times (F_1 + F_2)$$

e, pelo teorema de Varignon,

$$M = r \times F_1 + r \times F_2$$

Mas o primeiro termo, na expressão obtida, representa o momento M_1 do binário em P_1 e o segundo termo o momento M_2 do binário em P_2 . Temos

$$M = M_1 + M_2 \quad (3.50)$$

e concluímos que a soma de dois binários de momentos M_1 e M_2 é um binário de momento M igual à soma vetorial de M_1 e M_2 (Fig. 3.37b).

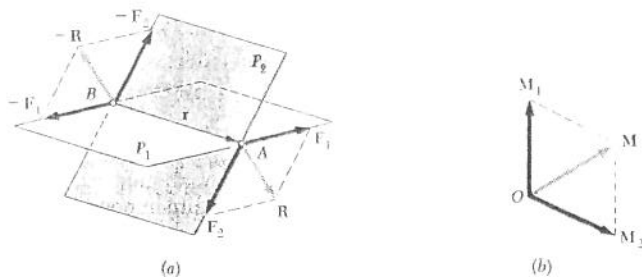


Figura 3.37

3.15. Os Binários Podem ser Representados por Vetores. Como vimos na Seção 3.13, os binários que têm o mesmo momento, quer atuem no mesmo plano, quer em planos paralelos, são equivalentes. Portanto não há necessidade de desenhar as forças que formam um dado binário, com o objetivo de definir seu efeito sobre um corpo rígido. (Fig. 3.38a). É suficiente desenhar uma seta igual em módulo, direção e sentido ao momento M do binário (Fig. 3.38b). Ainda mais vimos na Seção 3.14 que a soma de dois binários é também um binário, e que o momento M do binário resultante pode ser obtido pela soma vetorial dos momentos M_1 e M_2 dos binários dados. Assim, os binários obedecem à lei de adição de vetores, e a seta usada na Fig. 3.38b, para representar o binário definido na Fig. 3.38a, pode ser, realmente, considerada um vetor.

O vetor representativo de um binário é chamado *vetor binário*. Observe que, na Fig. 3.38, uma seta contínua é usada para distinguir o vetor binário, que representa o próprio binário, do vetor representativo do momento binário, e que o símbolo $\curvearrowright$ é acrescentado para evitar qualquer confusão com vetores representativos de forças. Um vetor binário, assim como o momento de um binário, é um vetor livre. Seu ponto de aplicação, pode, portanto, ser escolhido na origem do sistema de coordenadas, se assim for desejado (Fig. 3.38c). Ainda mais, o vetor binário M pode ser decomposto em componentes vetoriais M_x , M_y e M_z orientadas ao longo dos eixos coordenados (Fig. 3.38d) e que representam binários que atuam, respectivamente, nos planos yz , zx e xy .

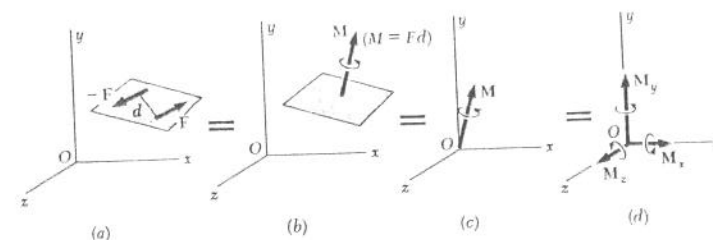


Figura 3.38

3.16. Decomposição de uma Força Dada em uma Força Aplicada em O e um Binário. Consideremos uma força F que atua sobre um corpo rígido, em um ponto A definido pelo vetor posição r (Fig. 3.39a). Suponhamos que, por alguma razão, preferíssemos que a força atuasse no ponto O . Sabemos que podemos mover F ao longo de sua linha de ação (princípio de transmissibilidade), mas não podemos movê-la para um ponto O situado fora de sua linha de ação original sem modificar a ação de F sobre o corpo rígido.

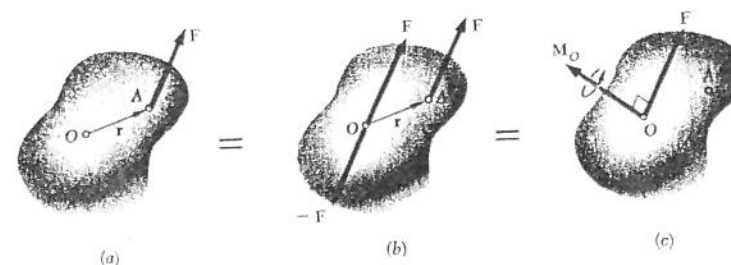


Figura 3.39

Contudo, podemos aplicar duas forças no ponto O , uma igual a F e outra igual a $-F$, sem modificar a ação da força original sobre o corpo rígido (Fig. 3.39b). Como consequência dessa transformação, a força F está agora aplicada em O , e as outras duas forças formam um binário de momento $M_O = r \times F$. Então, qualquer força F que atua sobre um corpo rígido pode ser deslocada para um ponto arbitrário O , desde que seja acrescentado um binário de momento igual ao momento de F em relação a O . O binário tende a produzir, no corpo rígido, o mesmo movimento de rotação em relação a O que a força F tendia a produzir antes de ser transferida para O . O binário é representado pelo vetor binário M_O perpendicular ao plano definido por r e F . Como o vetor M_O é um vetor

livre, pode ser aplicado em qualquer lugar. Por conveniência, no entanto, o vetor binário é usualmente fixado em O , juntamente com a força $\mathbf{F}$. A combinação obtida é chamada *sistema força-binário* (Fig. 3.39c).

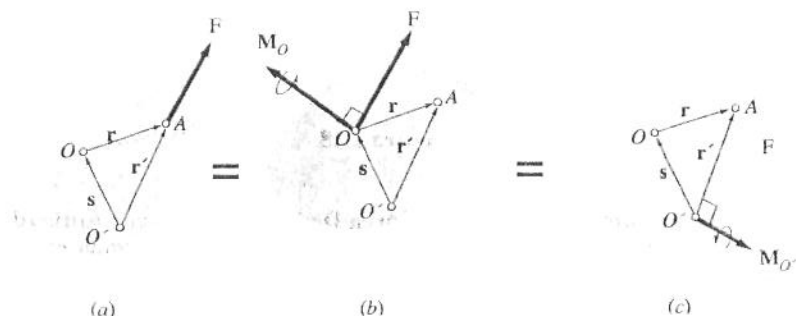


Figura 3.40

Se a força $\mathbf{F}$ tivesse sido deslocada de A para um ponto diferente O' (Fig. 3.40a e c), teria sido obtido o momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de $\mathbf{F}$ em relação a O' e um novo sistema força-binário formado por $\mathbf{F}$ e pelo vetor binário $\mathbf{M}_{O'}$ teria sido aplicado em O' . A relação entre os momentos de $\mathbf{F}$ relativos a O e O' é obtida escrevendo-se

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{Q'} = \mathbf{M}_Q + \mathbf{s} \times \mathbf{I} \quad (3.51)$$

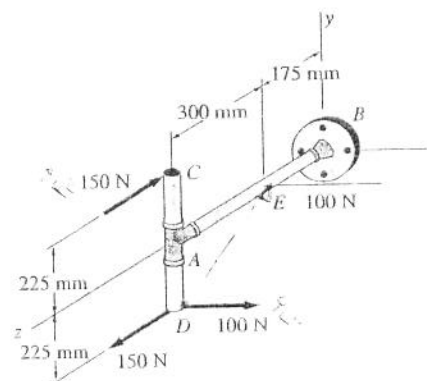
onde $\mathbf{s}$ é o vetor que liga O' a O . Assim, o momento $\mathbf{M}_{O'}$ de $\mathbf{F}$ em relação a O' é obtido adicionando-se ao momento $\mathbf{M}_O$ de $\mathbf{F}$ em relação a O o produto vetorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$, que representa o momento em relação a O' da força $\mathbf{F}$ aplicada em O .

Esse resultado poderia também ter sido estabelecido observando-se que, para transferir para O' o sistema força-binário aplicado em O (Fig. 3.40*b* e *c*), o vetor binário $\mathbf{M}_O$ poderia ser livremente deslocado para O' ; para o deslocamento da força $\mathbf{F}$ de O para O' , deveríamos acrescentar a $\mathbf{F}$ o vetor binário $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$, que representa o momento em relação a O' da força $\mathbf{F}$ aplicada em O . Então o vetor binário $\mathbf{M}_{O'}$ deve ser a soma de $\mathbf{M}_O$ e $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

Como observado na página anterior, o sistema força-binário obtido pela transferência de uma força $\mathbf{F}$, de um ponto A para um ponto O , consiste em $\mathbf{F}$ e em um vetor binário $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, perpendicular a $\mathbf{F}$. Reciprocamente qualquer sistema força-binário constituído de uma força $\mathbf{F}$ e de um vetor binário $\mathbf{M}_O$ *mutuamente perpendiculares* pode ser substituído por uma única força equivalente. Isto é realizado pelo deslocamento da força $\mathbf{F}$ no plano perpendicular a $\mathbf{M}_O$ até que seu momento em relação a O se torne igual ao vetor binário $\mathbf{M}_O$ a ser eliminado.

Problema Resolvido 3.6

Determine as componentes do binário equivalente aos dois binários da figura.

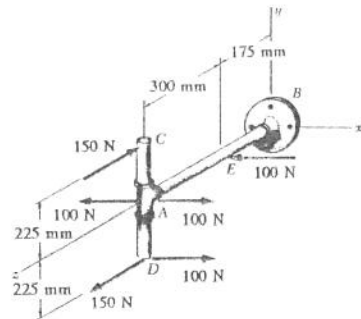


Solução. Os cálculos serão simplificados se aplicarmos ao ponto A duas forças de 100 N, paralelas às já existentes de 100 N e de sentidos opostos. Obtemos dois binários formados por forças de 100 N, um contido no plano xz e o outro em um plano paralelo ao plano xy. Os três binários da figura na página seguinte podem ser representados por três vetores binários M_x , M_y e M_z paralelos aos eixos coordenados. Os momentos correspondentes são

$$M_x = -(150 \text{ N})(0,450 \text{ m}) = -67,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

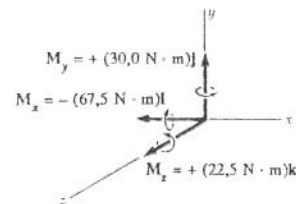
$$M_y = + (100 \text{ N})(0,300 \text{ m}) = +30,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = + (100 \text{ N})(0,225 \text{ m}) = +22,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Esses três momentos representam as componentes do momento $\mathbf{M}$ do binário equivalente aos dois binários dados. Escrevemos

$$\mathbf{M} = -(67,5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (30,0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (22,5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \Leftarrow$$

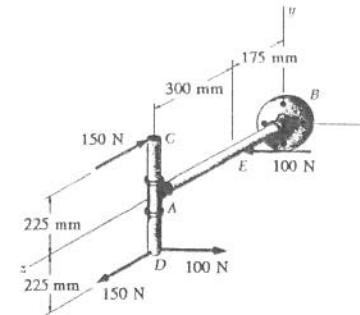


Solução Alternativa. As componentes do único vetor binário equivalente $\mathbf{M}$ também podem ser obtidas pela soma dos momentos das quatro forças dadas em relação a um ponto qualquer. Escolhendo o ponto D, obtemos

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (0,450 \text{ m})\mathbf{j} \times (-150 \text{ N})\mathbf{k} + [(0,225 \text{ m})\mathbf{j} - (0,300 \text{ m})\mathbf{k}] \times (-100 \text{ N})\mathbf{i}$$

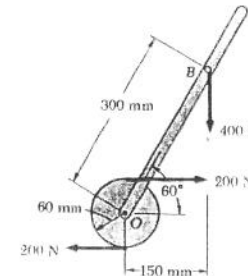
e, após calcular os produtos vetoriais,

$$\mathbf{M} = -(67,5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (30,0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (22,5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \Leftarrow$$



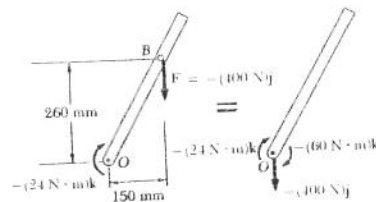
Problema Resolvido 3.7

Substituir o binário e a força ilustrados por uma única força, equivalente, aplicada à alavanca. Determinar a distância do eixo ao ponto de aplicação dessa força equivalente.



Solução. Inicialmente, a força e o binário dados são substituídos por um sistema força-binário equivalente em O. Deslocamos a força $\mathbf{F} = -(400 \text{ N})\mathbf{j}$ para O e somamos a ela um binário de momento $\mathbf{M}_O$ igual ao momento da força em sua posição original em relação a O:

$$\mathbf{M}_O = \vec{OB} \times \mathbf{F} = [(0,150 \text{ m})\mathbf{i} + (0,260 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} = -(60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$



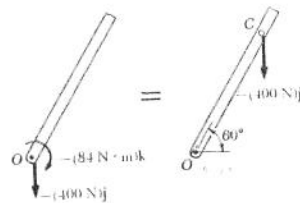
Esse binário é adicionado ao binário de momento $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ formado pelas duas forças de 200 N, sendo obtido um binário de momento $-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Este binário pode ser eliminado pela aplicação de $\mathbf{F}$ em um ponto C escolhido, de tal modo que

$$\begin{aligned} -(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \vec{OC} \times \mathbf{F} \\ &= [(OC) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (OC) \sin 60^\circ \mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ &= -(OC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$

Concluimos que

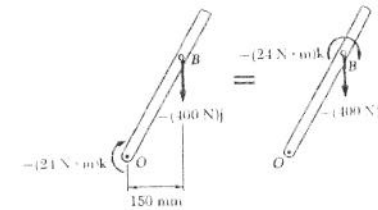
$$(OC) \cos 60^\circ = 0,210 \text{ m} = 210 \text{ mm}$$

$$OC = 420 \text{ mm} \leftarrow$$



Solução Alternativa. Como o efeito de um binário não depende de sua localização, o binário de momento $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ pode ser deslocado para B. Obtemos, então, um sistema força-binário em B. O binário pode ser agora eliminado pela aplicação de $\mathbf{F}$ em um ponto C escolhido, de tal modo que

$$\begin{aligned} -(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} &= \vec{BC} \times \mathbf{F} \\ &= -(BC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned}$$



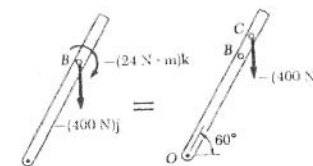
Concluimos que

$$(BC) \cos 60^\circ = 0,060 \text{ m} = 60 \text{ mm}$$

$$BC = 120 \text{ mm}$$

$$OC = OB + BC = 300 \text{ mm} + 120 \text{ mm}$$

$$OC = 420 \text{ mm} \leftarrow$$



Problemas

3.53 Duas forças de 60 N são aplicadas, como ilustrado, aos vértices A e C de uma placa quadrada de 200 mm de lado. Determine o momento do binário formado pelas duas forças: (a) multiplicando o módulo das forças pela distância entre suas linhas de ação e (b) decompondo cada força segundo as direções horizontal e vertical e somando os momentos dos dois binários resultantes.

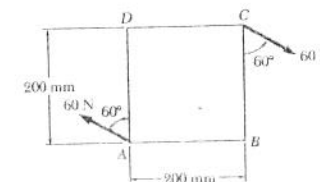


Figura P3.53

3.54 Uma peça de madeira compensada, na qual estão sendo feitos furos, foi presa a uma bancada com dois pregos. Sabendo que a broca da furadeira aplica um binário de momento $5 \text{ N} \cdot \text{m}$ na peça, determine a intensidade das forças resultantes que agem nos pregos sabendo que eles estão em: (a) A e B , (b) B e C e (c) A e C .

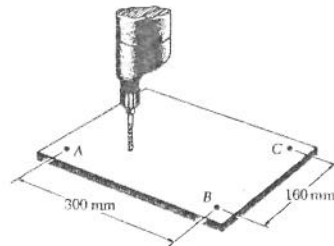
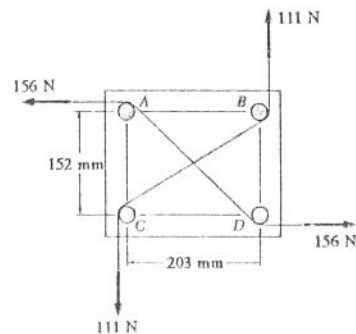


Figura P3.54

3.55 Quatro pinos de 25 mm de diâmetro são presos a uma tábua. Dois barbantes, apoiados nos pinos, são tracionados, como ilustrado. (a) Determine o binário resultante na tábua. (b) Se apenas um barbante é usado, em quais pinos deverá ser apoiado e em que direções deverá ser tracionado a fim de que se produza o mesmo binário com uma força de tração mínima? (c) Qual o valor dessa força de tração mínima?

3.56 Na mesma situação do Prob. 3.55, determine o diâmetro dos pinos sabendo que o momento do binário resultante aplicado à tábua é de $54,8 \text{ N} \cdot \text{m}$, anti-horário.



Figuras P3.55 e P3.56

3.57 Os dois eixos de uma caixa de redução estão sujeitos a binários cujos momentos têm módulos $M_1 = 20 \text{ N} \cdot \text{m}$ e $M_2 = 4,0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Substitua os dois binários por um único equivalente, determinando seu módulo, direção e sentido.

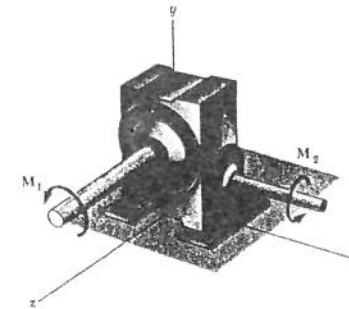


Figura P3.57

3.58 Os dois binários da figura devem ser substituídos por um único, equivalente. Determine: (a) o vetor-binário que representa o binário equivalente e (b) as duas forças aplicadas em B e C que podem ser utilizadas para formar um binário equivalente.

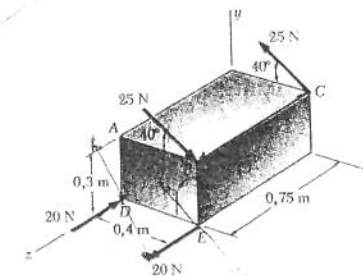


Figura P3.58

3.59 Resolva a parte (a) do Prob. 3.58 supondo que duas forças verticais de 15 N foram adicionadas às já existentes, uma aplicada em A , para cima, e outra em C , para baixo.

3.60 Os eixos A e B ligam a caixa de câmbio às rodas de um trator e o eixo C ao motor. Os eixos A e B estão no plano vertical yz e o eixo C tem a direção do eixo x . Substitua os binários aplicados aos eixos por um binário equivalente, determinado seu módulo, direção e sentido.

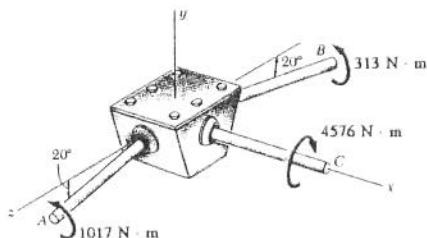


Figura P3.60

3.61 Uma força vertical P de 150 N é aplicada no ponto A do suporte da figura, que está preso por parafusos em B e C . (a) Substitua P por um sistema força-binário equivalente, aplicado em B . (b) Determine as duas forças horizontais aplicadas em B e C que são equivalentes ao binário obtido no item (a).

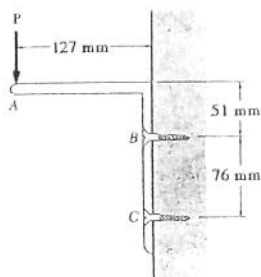


Figura P3.61

3.62 Uma força de 1 156 N é aplicada ao perfil de aço da figura. Substitua a força por um sistema força-binário equivalente aplicado ao centro C da seção.

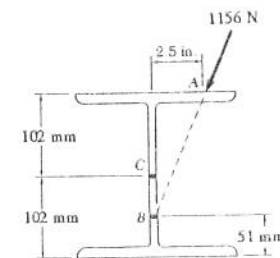
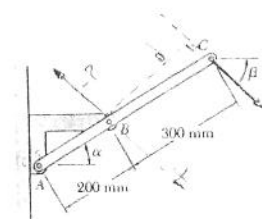


Figura P3.62

3.63 A força P tem intensidade de 250 N e está aplicada à extremidade C da haste AC de 500 mm que está presa a um suporte em A e B . Supondo $\alpha = 30^\circ$ e $\beta = 60^\circ$, substitua P por: (a) um sistema força-binário, equivalente, em B e (b) um sistema equivalente formado por duas forças paralelas aplicadas em A e em B .

3.64 Resolva o Prob. 3.63 com $\alpha = \beta = 25^\circ$.



Figuras P3.63 e P3.65

3.65 Com referência ao Prob. 3.63, substitua P por um sistema equivalente formado por duas forças paralelas, aplicadas em A e B , e mostre que: (a) essas forças são paralelas a P e (b) suas intensidades não dependem de α e β .

3.66 As forças de cisalhamento aplicadas à seção do perfil de aço da figura estão representadas por uma força vertical de 750 N e duas forças horizontais de 200 N. Substitua a força e o binário por uma única força (hipoteticamente) aplicada em C e determine a distância x de C ao segmento BD (o ponto C é, por definição, o centro de cisalhamento da seção).

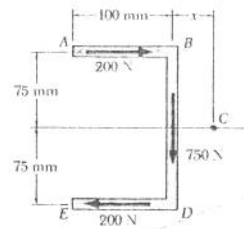


Figura P3.66

3.67 Uma força e um binário atuam em uma placa quadrada de lado $a = 50$ cm. Sabendo que $P = 200$ N, $Q = 150$ N e $\alpha = 50^\circ$, substitua a força e o binário dados por uma única força aplicada em um ponto que fica: (a) na linha AB e (b) na linha AC . Em cada caso, determine a distância de A ao ponto de aplicação da força.

3.68 A força e o binário da figura devem ser substituídos por uma única força equivalente. Sabendo que $P = 2Q$, determine o valor de α se a linha de ação da força equivalente passa através do: (a) ponto A , (b) ponto C .

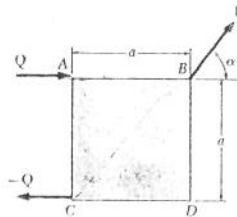
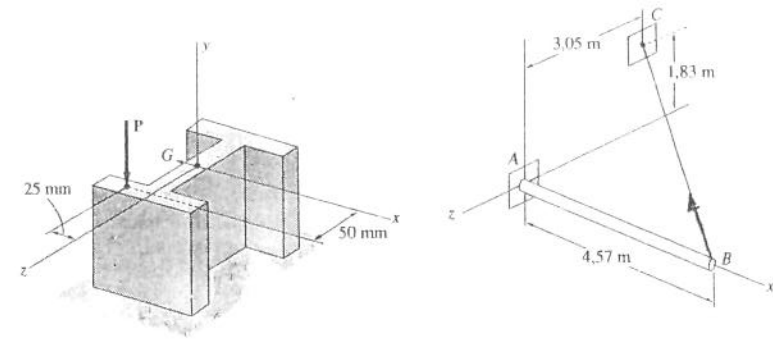


Figura P3.67 e P3.68

3.69 Substitua a força P de 200 kN por um sistema força-binário equivalente em G .

3.70 A haste AB de 4,57 m tem a extremidade A fixa, sendo a força de tração no cabo BC de 1 690 N. Substitua a força do cabo em B por um sistema força-binário equivalente em A .



Figuras P3.69 e P3.70

3.71 Uma força de 11,6 kN é aplicada ao ponto D do suporte de ferro fundido da figura. Substitua a força por um sistema força-binário equivalente no centro A da seção da base.

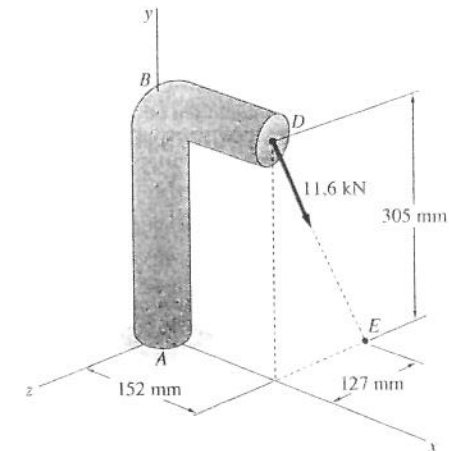


Figura P3.71

3.72 Substitua a força de 150 N por um sistema força-binário equivalente em A .

3.73 A caixa de redução da figura pesa 300 N e seu centro de gravidade está sobre o eixo y . Mostre que o peso da caixa e os dois binários a ela aplicados, de módulos $M_1 = 20,3$ N·m e

$M_2 = 9,07 \text{ N} \cdot \text{m}$, podem ser substituídos por uma única força equivalente e determine (a) o módulo, a direção e o sentido dessa força e (b) o ponto onde sua linha de ação intercepta o solo.

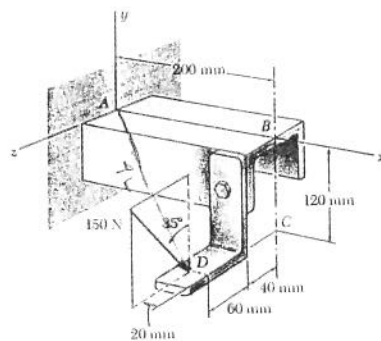


Figura P3.72

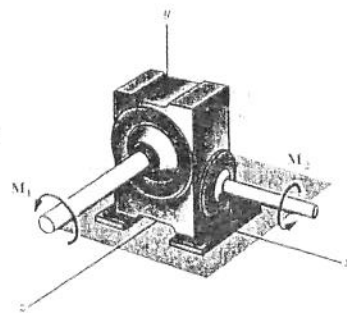
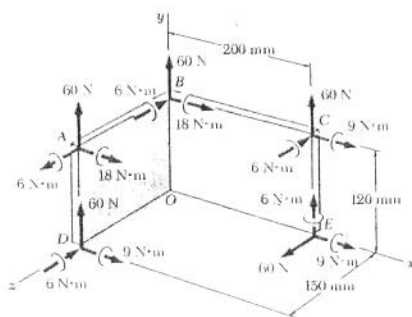


Figura P3.73

3.74 Cinco sistemas força-binário agem em pontos de uma cantoneira, como ilustrado. Determine dois sistemas força-binário equivalentes entre si.

3.75 Cinco sistemas força-binário agem em pontos de uma cantoneira, como ilustrado. Determine qual deles é equivalente a uma força $\mathbf{F} = (60 \text{ N})\mathbf{j}$ e a um binário $\mathbf{M} = -(6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ localizado na origem O .



Figuras P3.74 e P3.75

3.17. Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário. Consideremos um sistema de forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ etc., que atuam nos pontos A_1, A_2, A_3 etc. de um corpo rígido, definidos pelos vetores-posição $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ etc. (Fig. 3.41a). Como visto na seção precedente, $\mathbf{F}_1$ pode ser deslocado de A_1 a um dado ponto O se for adicionado ao sistema de força original um binário de momento $\mathbf{M}_1$, dado por $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$, em relação a O . Repetindo esse procedimento para $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ etc., obtemos o sistema ilustrado na Fig. 3.41b, constituído de forças que atuam em O e de binários.

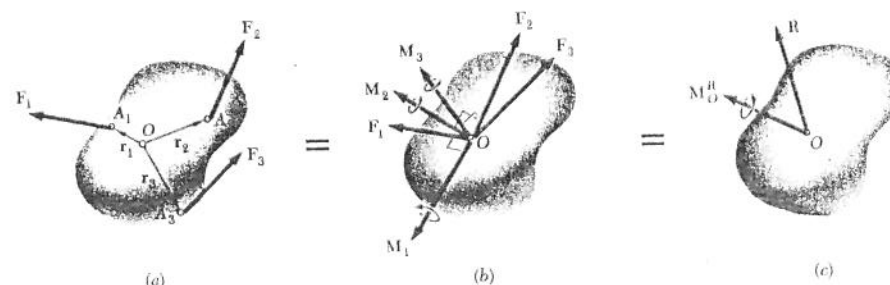


Figura 3.41

Como as forças são agora concorrentes, podem ser somadas vetorialmente e substituídas por sua resultante $\mathbf{R}$. Analogamente, os momentos $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ etc. podem ser somados vetorialmente e substituídos por um único vetor binário $\mathbf{M}_O^R$. Qualquer sistema de forças, por mais complexo que seja, pode então ser reduzido a um *sistema força-binário equivalente que atua em um dado ponto O* (Fig. 3.41c). Devemos observar que, embora cada um dos vetores binários $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$ etc., na Fig. 3.41b, seja perpendicular à força correspondente, a resultante $\mathbf{R}$ e o momento $\mathbf{M}_O^R$ na Fig. 3.41c não são geralmente perpendiculares um ao outro.

O sistema força-binário equivalente é definido pelas equações

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.52)$$

que exprimem que a força $\mathbf{R}$ é obtida pela adição de todas as forças do sistema, e o momento $\mathbf{M}_O^R$ do binário, chamado *momento resultante* do sistema, é obtido pela adição dos momentos em relação a O de todas as forças do sistema.

Uma vez que um dado sistema de forças tenha sido reduzido a uma força e um binário em um ponto O , pode-se facilmente reduzi-lo a uma força e um binário em qualquer outro ponto O' . Embora a força resultante $\mathbf{R}$ permaneça inalterada, o novo momento $\mathbf{M}_{O'}^R$, será igual à soma do momento $\mathbf{M}_O^R$ e do momento em relação a O' da força $\mathbf{R}$ aplicada em O (Fig. 3.42). Temos

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \quad (3.53)$$

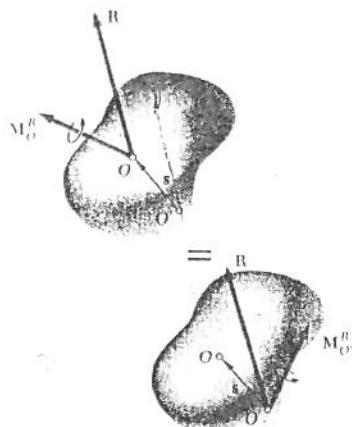


Figura 3.42

Na prática, a redução de um dado sistema de forças a uma única força $\mathbf{R}$ em O e um binário de momento $\mathbf{M}_O^R$ será efetuada em termos das componentes. Decompondo cada vetor posição $\mathbf{r}$ e cada força $\mathbf{F}$ do sistema em componentes cartesianas, escrevemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.55)$$

Substituindo $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$ na Eq. (3.52) e fatorando os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, obtemos $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O^R$ na forma

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \quad \mathbf{M}_O^R = M_x^R\mathbf{i} + M_y^R\mathbf{j} + M_z^R\mathbf{k} \quad (3.56)$$

As componentes R_x , R_y e R_z representam, respectivamente, as somas das componentes x , y e z das forças dadas e medem a tendência do sistema de produzir no corpo rígido um movimento de translação nas direções x , y e z . Analogamente, as componentes M_x^R , M_y^R e M_z^R representam, respectivamente, as somas dos momentos das forças dadas em relação aos eixos x , y e z e medem a tendência do sistema de produzir no corpo rígido um movimento de rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente.*

Se a intensidade e a direção da força $\mathbf{R}$ estão sendo pedidas, elas podem ser obtidas das componentes R_x , R_y e R_z por meio da relação (2.18) e (2.19) da Seção 2.12; através de cálculos semelhantes obtemos a intensidade e a direção do vetor $\mathbf{M}_O^R$.

3.18. Sistemas Equivalentes de Forças. Vimos, na seção precedente, que qualquer sistema de forças que atua sobre um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário num ponto O . Esse sistema equivalente força-binário caracteriza completamente o efeito do sistema de forças sobre o corpo rígido. *Dois sistemas de forças são equivalentes, portanto, se puderem ser reduzidos ao mesmo sistema força-binário num dado ponto O .* Lembrando que o sistema força-binário em O é definido pelas relações (3.52), afirmamos que: *dois sistemas de forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ etc. e $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3$ etc. são equivalentes se, e somente se, a soma das forças e a soma dos momentos, em relação a um dado ponto O , das forças dos dois sistemas, forem respectivamente iguais.* As condições necessária e suficiente para que dois sistemas de forças sejam equivalentes são expressas, matematicamente, como

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{e} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Observe que, para provar a equivalência dos dois sistemas de forças, a segunda das relações (3.57) precisa ser estabelecida para *um único ponto O* . Permanecerá válida então para *qualquer outro ponto*, se os dois sistemas forem equivalentes.**

* A expressão "medem a tendência" deve ser entendida de forma puramente empírica e considerada com bastante precaução. (N. do R.T.)

** Em virtude da Eq. (3.51). (N. do R.T.)

Decompondo as forças e os momentos nas Eqs. (3.57) em suas componentes cartesianas, podemos exprimir as condições necessárias e suficientes para a equivalência dos dois sistemas de forças da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \quad (3.58)$$

Essas equações têm um significado físico simples. Elas exprimem que dois sistemas de forças são equivalentes se tendem a produzir no corpo rígido: (1) a mesma translação segundo os eixos x , y e z , respectivamente, e (2) a mesma rotação em relação aos eixos x , y e z , respectivamente.

3.19. Sistemas Equipolentes de Vetores. Quando dois sistemas de vetores satisfazem as Eqs. (3.57) ou (3.58), isto é, quando suas resultantes e seus momentos resultantes em relação a um ponto arbitrário O são respectivamente iguais, os dois sistemas são chamados *equipolentes*. O resultado estabelecido na seção precedente pode, então, ser de novo enunciado como se segue: *Se dois sistemas de forças que atuam sobre um corpo rígido são equipolentes*, são também equivalentes.*

É importante observar que essa afirmação não se aplica a *qualquer* sistema de vetores. Considere, por exemplo, um sistema de forças que atua sobre um conjunto de pontos materiais independentes, que *não* formam um corpo rígido. Um sistema diferente de forças que atua sobre os mesmos pontos materiais pode ser equipolente ao primeiro, isto é, pode ter a mesma resultante, e o mesmo momento resultante. Entretanto, como forças diferentes estarão agora atuando sobre os vários pontos, seus efeitos nesses pontos serão diferentes; os dois sistemas de forças, conquanto equipolentes, *não serão equivalentes*.

3.20. Casos Particulares de Redução de um Sistema de Forças. Vimos na Seção 3.17 que qualquer sistema de forças aplicado a um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário equivalente em O , constituído da força $\mathbf{R}$, igual à soma das forças do sistema, e de um vetor binário $\mathbf{M}_O^R$, igual ao momento resultante do sistema.

Quando $\mathbf{R} = 0$, o sistema força-binário se reduz ao vetor binário $\mathbf{M}_O^R$. O sistema de forças dado pode então ser reduzido a um só binário, chamado *binário resultante* do sistema. Investiguemos, agora, as condições nas quais um dado sistema de forças pode ser reduzido a uma única força. Segue da Seção 3.16 que o sistema força-binário em O pode ser substituído por uma única força $\mathbf{R}$ que atua ao longo de uma nova linha de ação, se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O^R$ forem mutuamente perpendiculares. Os sistemas de forças que podem ser reduzidos a uma só força, ou *resultante*, são por conseguinte os sistemas para os quais a força $\mathbf{R}$ e o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ são mutuamente perpendiculares.* Embora essa condição não seja geralmente satisfeita pelos sistemas de forças no espaço, será satisfeita pelos sistemas constituídos: (1) de forças concorrentes, (2) de forças coplanares ou (3) de forças paralelas. Discutiremos esses casos separadamente.

1. *Forças concorrentes* são aplicadas num mesmo ponto e podem então ser adicionadas diretamente para a obtenção da resultante $\mathbf{R}$. Portanto sempre podem ser reduzidas a uma única força. As forças concorrentes foram discutidas em detalhes no Cap. 2.
2. *Forças coplanares* atuam num mesmo plano, que suporemos aqui ser o plano da Fig. 3.43a. A resultante $\mathbf{R}$ das forças do sistema também estará contida no plano da figura, enquanto o momento de cada força em relação a O , e, portanto, o momento resultante $\mathbf{M}_O^R$, será perpendicular a esse plano. O sistema força-binário em O consiste, portanto, em uma força $\mathbf{R}$ e um vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ mutuamente perpendiculares (Fig. 3.43b).** Pode ser reduzido a uma única força $\mathbf{R}$, movendo $\mathbf{R}$ no plano da figura até que seu momento em relação a O se torne igual a $\mathbf{M}_O^R$. A distância de O à linha de ação de $\mathbf{R}$ é $d = M_O^R / R$ (Fig. 3.43c).

Conforme visto na Seção 3.17, a redução de um sistema de forças é consideravelmente simplificada se as forças forem decompostas em componentes cartesianas. O sistema força-binário em O é então caracterizado pelas componentes (Fig. 3.44a).

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad M_z^R = M_O^R = \Sigma M_O \quad (3.59)$$

* Da forma como foi demonstrada, a condição de ortogonalidade entre a resultante e o momento resultante é apenas uma condição suficiente (N. do R.T.)

** Como o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ é perpendicular ao plano da figura, foi representado pelo símbolo $\cdot$. Um binário anti-horário $\cdot$ corresponde a um vetor apontando para fora do papel e um binário horário $\cdot$, a um vetor apontando para dentro do papel.

* O termo equipolente não deve ser confundido com termo de igual nome utilizado em álgebra linear. (N. do R.T.)

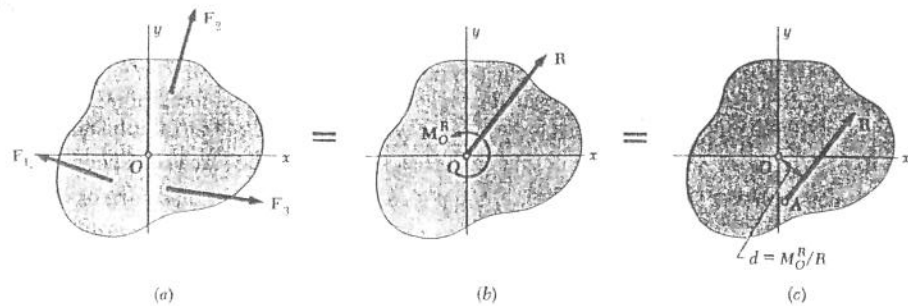


Figura 3.43

Para reduzir o sistema a uma única força R , impõe-se que o momento de R em relação a O seja igual a M_O^R . Denominando x e y as coordenadas do ponto de aplicação A da resultante e lembrando a fórmula (3.22), escrevemos

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

que representa a equação da linha de ação de R . Podemos também determinar diretamente as interseções da linha de ação da resultante com os eixos coordenados x e y , observando que M_O^R deve ser igual ao momento, em relação a O , da componente y de R , quando R é aplicada em B (Fig. 3.44b), e ao momento de sua componente x , quando R é aplicada em C (Fig. 3.44c).

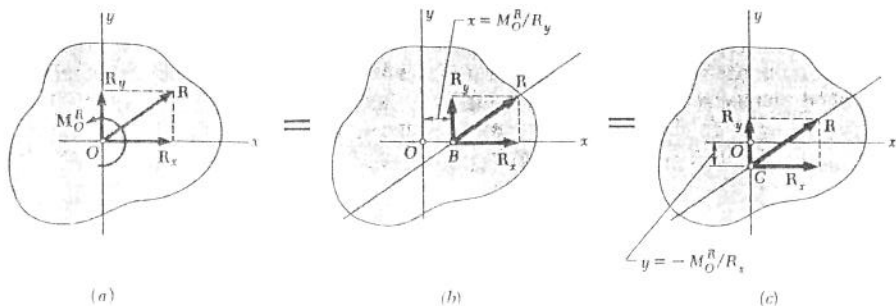


Figura 3.44

3. Forças paralelas têm linhas de ação paralelas e podem, ou não, ter o mesmo sentido. Supondo aqui que as forças são paralelas ao eixo y (Fig. 3.45a), observamos que sua resultante R também será paralela ao eixo y . Por outro lado, como o momento de uma dada força deve ser perpendicular a essa força, o momento de cada força do sistema em relação a O , e, portanto, o momento resultante M_O^R , estará situado no plano xz . O sistema força-binário em O consiste, por conseguinte, em uma força R e um vetor binário M_O^R , que são mutuamente perpendiculares (Fig. 3.45b). Eles podem ser reduzidos a uma única força R (Fig. 3.45c) ou, se $R = 0$, a um único binário de momento M_O^R .

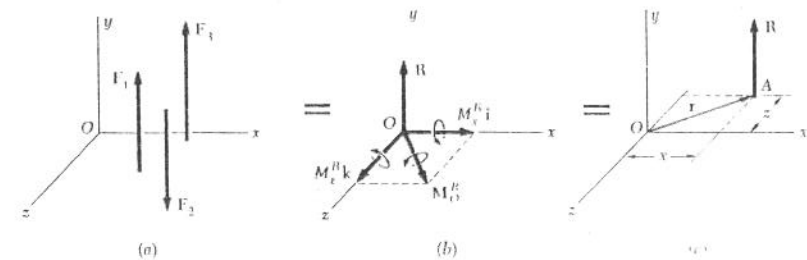


Figura 3.45

Na prática, o sistema força-binário em O será caracterizado pelas componentes

$$R_y = \Sigma F_y \quad M_x^R = \Sigma M_x \quad M_z^R = \Sigma M_z \quad (3.60)$$

A redução do sistema a uma única força pode ser efetuada pelo deslocamento de R a um novo ponto de aplicação $A(x, 0, z)$, escolhido de modo que o momento de R em relação a O seja igual a M_O^R . Escrevemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(xi + zk) \times R_y \mathbf{j} = M_x^R \mathbf{i} + M_z^R \mathbf{k}$$

Calculando os produtos vetoriais e igualando os coeficientes dos vetores unitários dos dois membros da equação, obtemos duas equações escalares que determinam as coordenadas de A:

$$-zR_y = M_x^R \quad xR_y = M_z^R$$

Essas equações mostram que os momentos de $\mathbf{R}$ em relação aos eixos x e z devem ser, respectivamente, iguais a M_x^R e M_z^R .

*** 3.21. Redução de um Sistema de Força a um Torsor.** No caso geral de um sistema de forças no espaço, o sistema força-binário equivalente em O consiste em uma força $\mathbf{R}$ e um momento $\mathbf{M}_O^R$ não perpendiculares e não nulos (Fig. 3.46a). Então, o sistema de forças *não pode* ser reduzido a uma única força ou a um único binário. O vetor binário, no entanto, pode ser substituído por dois vetores binários obtidos pela decomposição de $\mathbf{M}_O^R$ em uma componente M_1 segundo $\mathbf{R}$ e uma componente M_2 contida num plano perpendicular a $\mathbf{R}$ (Fig. 3.46b). O vetor binário M_2 e a força $\mathbf{R}$ podem, então, ser substituídos por uma única força $\mathbf{R}$ que atua ao longo de uma nova linha de ação. O sistema de forças original reduz-se, então, a $\mathbf{R}$ e ao vetor binário M_1 (Fig. 3.46c), isto é, a $\mathbf{R}$ e a um binário que atua em um plano perpendicular a $\mathbf{R}$. Esse sistema força-binário particular é chamado *torsor*. A força $\mathbf{R}$ e o momento M_1 tendem, simultaneamente, a transladar o corpo rígido na direção de $\mathbf{R}$ e a girá-lo em torno da linha de ação de $\mathbf{R}$. A linha de ação de $\mathbf{R}$ é conhecida como *eixo do torsor* ou *eixo central* e a razão $p = M_1/R$ é chamada de *passo do torsor*. Um *torsor* consiste, pois, em dois vetores colineares: uma força $\mathbf{R}$ e um momento

$$M_1 = pR \quad (3.61)$$

Lembrando a Eq. (3.35), obtida para a projeção de um vetor sobre a linha de ação de outro vetor, observamos que a projeção de $\mathbf{M}_O^R$ sobre a linha de ação de $\mathbf{R}$ é

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

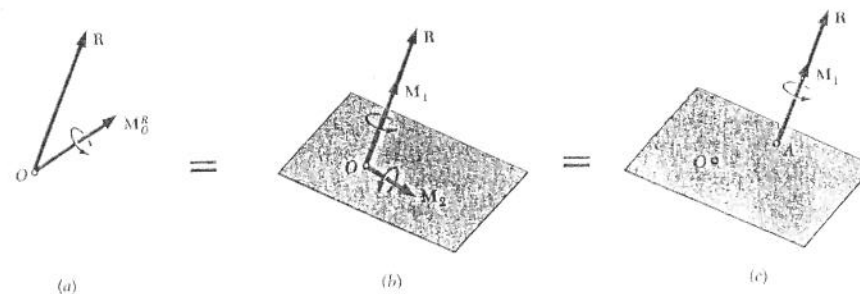


Figura 3.46

Então o passo do torsor pode ser expresso por *

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \quad (3.62)$$

Para determinar o eixo do torsor, podemos escrever uma equação que envolve o vetor-posição $\mathbf{r}$ de um ponto arbitrário P do eixo. Aplicando a força resultante $\mathbf{R}$ e o vetor binário M_1 em P (Fig. 3.47), e escrevendo que o momento em relação a O desse sistema força-binário é igual ao momento resultante $\mathbf{M}_O^R$ do sistema original de forças, escrevemos

$$M_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.63)$$

* As equações obtidas para a projeção do vetor binário resultante sobre a linha de ação de $\mathbf{R}$ e para o passo do torsor são independentes da escolha do ponto O . Usando a relação (3.53), verificamos que, se um ponto O' diferente de O tivesse sido usado, o numerador de (3.62) seria

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como o produto misto $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ é identicamente nulo, temos

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

e concluímos que o produto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ é independente da escolha do ponto O (N. do R.T. Exatamente a igualdade a zero desse produto é a condição necessária e suficiente para que um sistema de forças seja equivalente a uma única força, desde que $\mathbf{R}$ não seja nula.)

ou, da Eq. (3.61).

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.64)$$

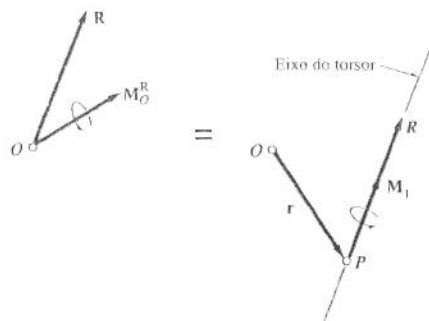
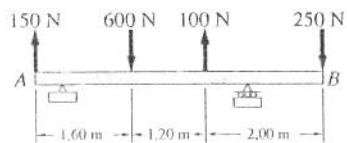


Figura 3.47

Problema Resolvido 3.8

Uma viga de 4,8 m está submetida às forças indicadas. Reduzir o sistema de forças dado a (a) um sistema força-binário equivalente em A, (b) um sistema força-binário equivalente em B e (c) uma única força ou resultante.

Nota. Como as reações nos apoios não estão incluídas no sistema de forças dado, o sistema não manterá a viga em equilíbrio.



a) **Sistema Força-Binário em A.** O sistema força-binário em A, equivalente ao sistema de forças dado, consiste em uma força $\mathbf{R}$ e um binário de momento $\mathbf{M}_A^R$ definidos como se segue:

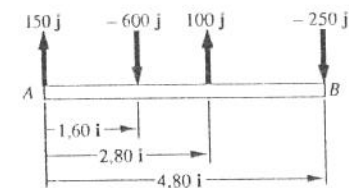
$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

$$= (150 \text{ N})\mathbf{j} - (600 \text{ N})\mathbf{j} + (100 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{j} = -(600 \text{ N})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$= (1,60 \text{ i}) \times (-600 \text{ j}) + (2,80 \text{ i}) \times (100 \text{ j}) + (4,80 \text{ i}) \times (-250 \text{ j})$$

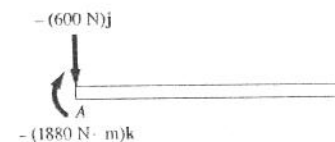
$$= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$



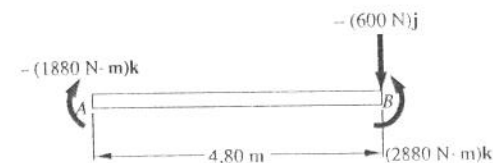
O sistema força-binário equivalente em A é, então,

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow$$

$$\mathbf{M}_A^R = 1880 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \leftarrow$$



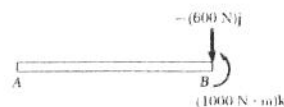
b) **Sistema Força-Binário em B.** Desejamos encontrar o sistema força-binário em B equivalente ao sistema força-binário em A determinado no item (a). A força $\mathbf{R}$ permanece inalterada, mas um novo vetor binário $\mathbf{M}_B^R$ deve ser determinado, cujo momento é igual ao momento em relação a B do sistema força-binário determinado no item (a). Então, temos



$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \vec{BA} \times \mathbf{R} \\
 &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (-4,80 \text{ m})\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} \\
 &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (2\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = +(1\,000 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

O sistema força-binário equivalente em B é, então,

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_B^R = 1\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright \Leftarrow$$

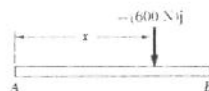


c) **Única Força ou Resultante.** A resultante do sistema de forças dado é igual a $\mathbf{R}$, e seu ponto de aplicação deve ser tal que o momento de $\mathbf{R}$ em relação a A seja igual a $\mathbf{M}_A^R$. Escrevemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R \\
 x\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\
 -x(600 \text{ N})\mathbf{k} &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

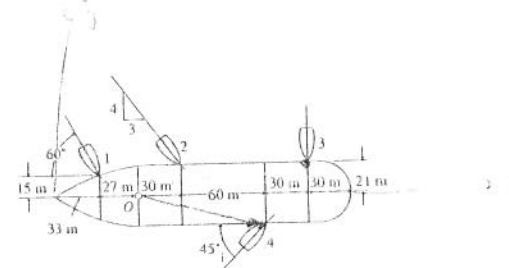
e concluímos que $x = 3,13 \text{ m}$. Assim, a força única equivalente ao sistema de forças dado é definida por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \uparrow \quad x = 3,13 \text{ m} \Leftarrow$$



Problema Resolvido 3.9

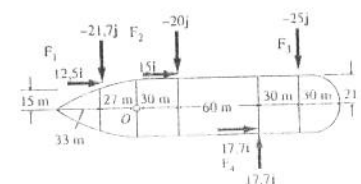
Quatro rebocadores são usados para trazer um transatlântico ao cais. Cada rebocador exerce uma força de 25 kN nas direções e sentidos ilustrados. Determinar: (a) o sistema força-binário equivalente no mastro dianteiro O e (b) o ponto no casco onde um só rebocador mais poderoso deverá empurrar para produzir o mesmo efeito que os quatro rebocadores originais.



a) **Sistema Força-Binário em O.** Cada uma das forças dadas é decomposta em suas componentes no diagrama abaixo (a unidade usada é o kN). O sistema força-binário em O, equivalente ao sistema de forças dado, consiste em uma força $\mathbf{R}$ e um binário $\mathbf{M}_O^R$, definidos como se segue:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} = \\
 &= (12,50\mathbf{i} - 21,7\mathbf{j}) + (15,00\mathbf{i} - 20,0\mathbf{j}) + (-25,0\mathbf{j}) + (17,70\mathbf{i} + 17,70\mathbf{j}) = \\
 &= 45,2\mathbf{i} - 49,0\mathbf{j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_O^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \\
 &= (-27\mathbf{i} + 15\mathbf{j}) \times (12,50\mathbf{i} - 21,7\mathbf{j}) + (30\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (15,00\mathbf{i} - 20,0\mathbf{j}) + \\
 &+ (120\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (-25,0\mathbf{j}) + (90\mathbf{i} - 21\mathbf{j}) \times (17,70\mathbf{i} + 17,70\mathbf{j}) = \\
 &= (586 - 188 - 600 - 315 - 3\,000 + 1593 + 372)\mathbf{k} = -1\,552\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

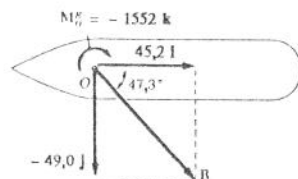


O sistema força-binário equivalente em O é, então,

$$\mathbf{R} = (45,2 \text{ kN})\mathbf{i} - (49,0 \text{ kN})\mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^R = -(1\,552 \text{ kN} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

ou

$$R = 66,7 \text{ kN} \quad \angle 47,3^\circ \quad M_O^R = 1\,552 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \curvearrowleft$$



Observação. Como todas as forças estão contidas no plano da figura, poderíamos ter esperado que a soma de seus momentos fosse perpendicular a esse plano. Observe que o momento de cada força componente poderia ter sido obtido diretamente do diagrama, pelo produto de suas intensidades por suas distâncias a O, atribuindo a esse produto um sinal positivo ou negativo, conforme o sentido do momento.

b) **Rebocador Único.** A força exercida por um único rebocador deve ser igual a $\mathbf{R}$, seu ponto de aplicação A deve ser tal que o momento de $\mathbf{R}$ em relação a O seja igual a $\mathbf{M}_O^R$. Observando que o vetor posição de A é

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 21\mathbf{j}$$

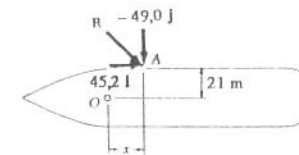
escrevemos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(x\mathbf{i} + 21\mathbf{j}) \times (45,2\mathbf{i} - 49,0\mathbf{j}) = -1\,552\mathbf{k}$$

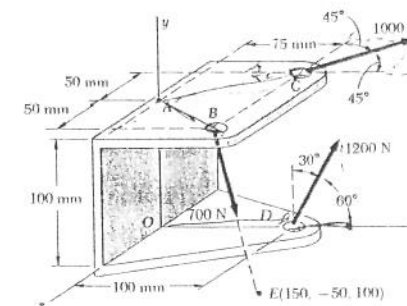
$$-x(49,0)\mathbf{k} - 949\mathbf{k} = -1\,552\mathbf{k}$$

$$x = 12,3 \text{ m} \quad \leftarrow$$



Problema Resolvido 3.10

Três cabos são atados ao suporte conforme ilustrado. Substituir as forças exercidas pelos cabos por um sistema força-binário em A.



Solução. Determinamos inicialmente os vetores que ligam o ponto A aos pontos de aplicação das forças e decomponemos as forças em suas componentes cartesianas. Observando que $\mathbf{F}_B = (700 \text{ N})\lambda_{BE}$, onde

$$\lambda_{BE} = \frac{\vec{BE}}{BE} = \frac{1}{7}(3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

temos, em metros e newtons:

$$\Delta \mathbf{r}_B = \vec{AB} = 0,075\mathbf{i} + 0,050\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_B = 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$$

$$\Delta \mathbf{r}_C = \vec{AC} = 0,075\mathbf{i} - 0,050\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_C = 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k}$$

$$\Delta \mathbf{r}_D = \vec{AD} = 0,100\mathbf{i} - 0,100\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_D = 600\mathbf{i} + 1\,039\mathbf{j}$$

O sistema força-binário em A equivalente às forças dadas consiste em uma força $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$ e um binário $\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F})$. A força $\mathbf{R}$ é facilmente obtida pela adição respectiva das componentes x, y e z das forças dadas:

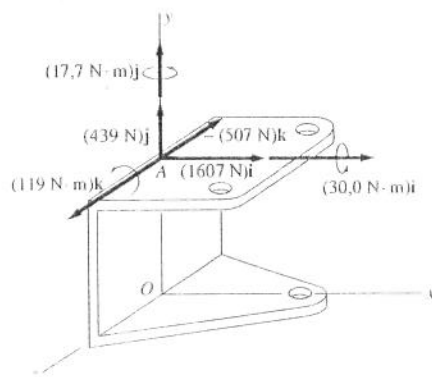
$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = (1607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k}$$

O cálculo de $\mathbf{M}_A^R$ será facilitado se exprimirmos os momentos $\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ na forma de determinantes (Seção 3.8):

$$\Delta \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,075 & 0 & 0,050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30,0\mathbf{i} - 45,0\mathbf{k}$$

$$\Delta \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,075 & 0 & -0,050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17,7\mathbf{j}$$

$$\Delta \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0,100 & -0,100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 164\mathbf{k}$$



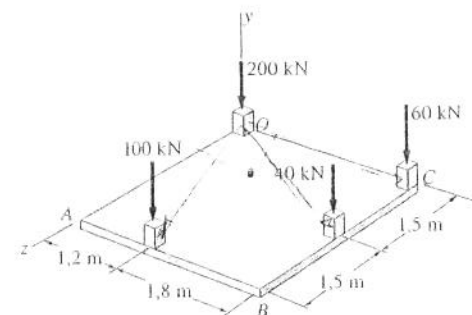
Somadas as expressões obtidas, temos

$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\Delta \mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30,0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17,7 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (119 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \Leftarrow$$

As componentes cartesianas da força $\mathbf{R}$ e do vetor binário $\mathbf{M}_A^R$ são ilustradas na figura anterior.

Problema Resolvido 3.11

Uma laje quadrada suporta as quatro colunas indicadas. Determine o módulo, a direção e o sentido da resultante das quatro cargas.



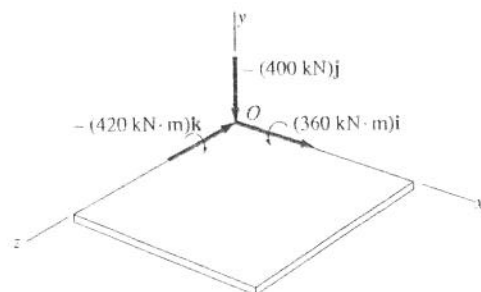
Solução. Inicialmente reduziremos o sistema de forças dado a um sistema força-binário equivalente na origem O das coordenadas. Esse sistema consiste em uma força $\mathbf{R}$ e em um momento $\mathbf{M}_O^R$ definidos por

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_O^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Determinam-se os vetores posição e arranjam-se os cálculos em uma tabela:

$\mathbf{r}, \text{ m}$	$\mathbf{F}, \text{ kN}$	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}, \text{ kN} \cdot \text{ m}$
0	$-200\mathbf{j}$	0
$3,0\mathbf{i}$	$-60\mathbf{j}$	$-180\mathbf{k}$
$3,0\mathbf{i} + 1,5\mathbf{k}$	$-40\mathbf{j}$	$60\mathbf{i} - 120\mathbf{k}$
$1,2\mathbf{i} + 3,0\mathbf{k}$	$-100\mathbf{j}$	$300\mathbf{i} - 120\mathbf{k}$
$\mathbf{R} = -400\mathbf{j}$		$\mathbf{M}_O^R = 360\mathbf{i} - 420\mathbf{k}$



Como a força $\mathbf{R}$ e o vetor binário $\mathbf{M}_O^R$ são mutuamente perpendiculares, o sistema força-binário obtido pode ser reduzido a uma força $\mathbf{R}$. O novo ponto de aplicação de $\mathbf{R}$ será determinado, sobre a laje, de modo que o momento de $\mathbf{R}$ em relação a O seja igual a $\mathbf{M}_O^R$.

Representando por $\mathbf{r}$ o vetor-posição do ponto procurado e por x e z suas coordenadas, temos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

$$(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-400\mathbf{j}) = 360\mathbf{i} - 420\mathbf{k}$$

$$-400x\mathbf{k} + 400z\mathbf{i} = 360\mathbf{i} - 420\mathbf{k}$$

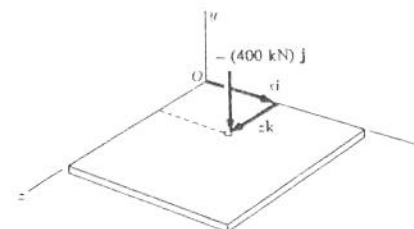
de onde obtemos

$$-400x = -420$$

$$400z = 360$$

$$x = 1,05 \text{ m}$$

$$z = 0,90 \text{ m}$$

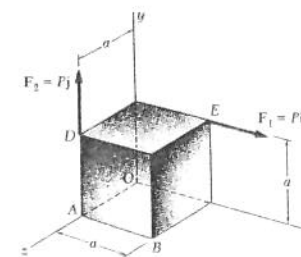


Em conclusão, a resultante das forças dadas é

$$\mathbf{R} = 400 \text{ kN} \downarrow \quad \text{em } x = 1,05 \text{ m}, z = 0,90 \text{ m} \leftarrow$$

Problema Resolvido 3.12

Duas forças, ambas de módulo P , estão aplicadas ao cubo de aresta a da figura. Substitua as duas forças por um torsor equivalente e determine: (a) o módulo, a direção e o sentido da força resultante $\mathbf{R}$, (b) o passo do torsor e (c) o ponto onde o eixo do torsor corta o plano yz .



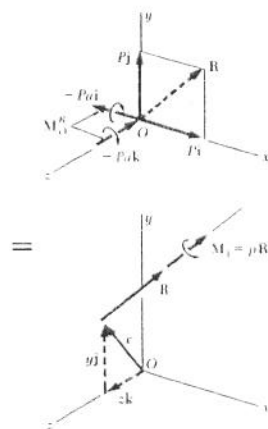
Solução. Inicialmente determina-se o sistema força-binário equivalente, na origem O . Observamos que os vetores-posição dos pontos de aplicação E e D das forças são $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. A resultante $\mathbf{R}$ das duas forças e o momento total $\mathbf{M}_O^R$ em relação a O são:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^R &= \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j} \\ &= -Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2)$$

a) **Força Resultante $\mathbf{R}$.** Da Eq. (1) verifica-se que a resultante $\mathbf{R}$ tem módulo $R = P\sqrt{2}$, está contida no plano xy e forma ângulos de 45° com os eixos x e y . Isto é

$$R = P\sqrt{2} \quad \theta_x = \theta_y = 45^\circ \quad \theta_z = 90^\circ \quad \Leftarrow$$



b) **Passo do tórsor.** Substituindo os valores de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O^R$ das Eqs. (1) e (2) acima na Eq. (3.62), escrevemos

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1+0+0)}{2P^2}$$

$$p = -\frac{a}{2} \quad \Leftarrow$$

c) **Eixo do Tórsor.** Dos resultados acima e da Eq. (3.61) obtém-se o momento do tórsor

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (3)$$

O tórsor é formado pela força resultante $\mathbf{R}$ e pelo momento $\mathbf{M}_1$. Para determinar o ponto em que o eixo do tórsor intercepta o plano yz igualamos o momento do tórsor em relação a O ao momento total $\mathbf{M}_O^R$ do sistema original de forças:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

Com $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{M}_O^R$ das Eqs. (3), (1) e (2), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) &= -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \\ -\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pz\mathbf{i} &= -Pa\mathbf{i} - Pa\mathbf{k} \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de $\mathbf{k}$ e, em seguida, os de $\mathbf{j}$, obtemos

$$y = a \quad z = a/2 \quad \Leftarrow$$

Problemas

3.76 Uma viga de 3 m é carregada de várias maneiras, como se vê na figura. Encontre dois carregamentos que sejam equivalentes.

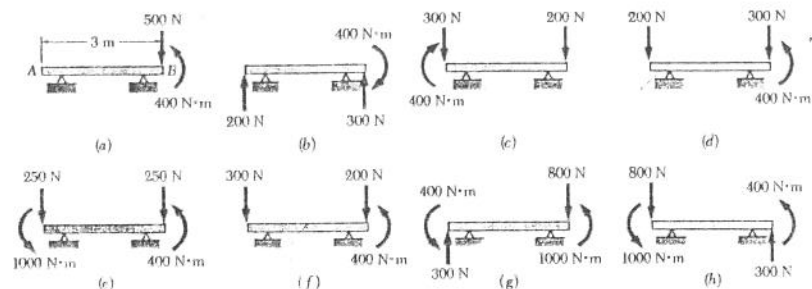


Figura P3.76

3.77 Determine o carregamento do Prob. 3.76 equivalente ao da Figura abaixo.



Figura P3.77

3.78 Determine a resultante das cargas e a distância de sua linha de ação ao ponto A para a viga e o carregamento do: (a) Prob. 3.76a, (b) Prob. 3.76b e (c) Prob. 3.77.

3.79 Três forças horizontais são aplicadas, como ilustrado, a um suporte vertical de ferro fundido. Determine a resultante das forças e a distância ao chão de sua linha de ação quando: (a) $P = 200$ N, (b) $P = 2\,400$ N e (c) $P = 1\,000$ N.

3.80 Determine a distância do ponto A à linha de ação da resultante das três cargas da figura quando: (a) $x = 0,38$ m, (b) $x = 1,22$ m e (c) $x = 2,44$ m.

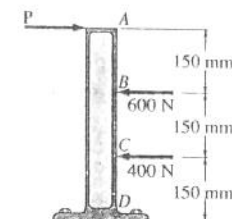
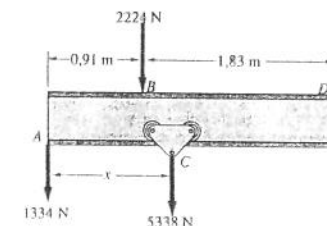


Figura P3.79

3.81 Expresse a distância d ao ponto A da linha de ação da resultante das três forças da figura em função de x .



Figuras P3.80 e P3.81

3.82 Quatro forças estão aplicadas à placa da figura. (a) Determine a resultante dessas forças. (b) Determine os dois pontos onde a linha de ação da resultante intercepta os lados da placa.

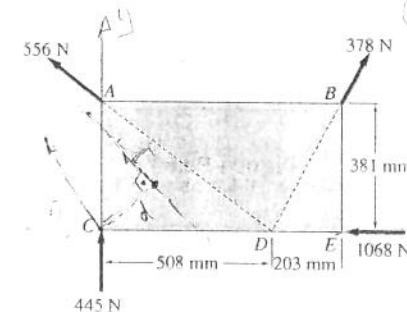
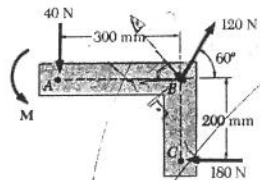


Figura P3.82

3.83 Resolva o Prob. 3.82 supondo que a força de 1 068 N é orientada para a direita.

3.84 As três forças da figura e um binário de torque de módulo $M = 6 \text{ N} \cdot \text{m}$ são aplicados a um suporte. (a) Determine a resultante desse sistema de forças. (b) Determine os pontos onde a linha de ação da resultante corta as retas AB e BC .

3.85 As três forças da figura e um binário de momento M são aplicados a um suporte. Determine o momento do binário sabendo que a linha de ação da resultante do sistema de forças deve passar pelo ponto: (a) A , (b) B e (c) C .



Figuras P3.84 e P3.85

3.86 O telhado de uma construção está submetido, por causa do vento, a um carregamento, como ilustrado. Determine: (a) o sistema força-binário equivalente em D e (b) a resultante do carregamento e sua linha de ação.

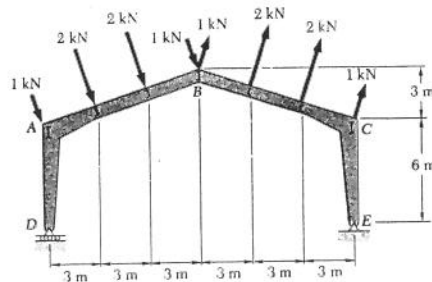


Figura P3.86

3.87 Uma força P , de módulo P , é aplicada ao ponto B da borda de uma placa semicircular de raio a . (a) Substitua P por um sistema força-binário equivalente no ponto D , pé da perpendicular baixada de B ao eixo x . (b) Determine o valor de θ para o qual o momento do sistema força-binário equivalente em D seja máximo.

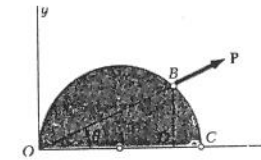
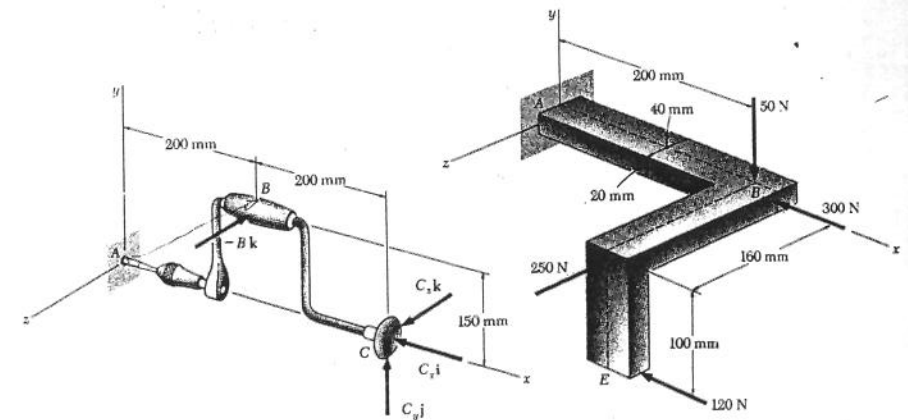


Figura P3.87

3.88 Uma lâmina presa ao arco de pua é utilizada para apertar um parafuso em A . (a) Determine as forças aplicadas em B e C sabendo que essas forças são equivalentes a um sistema força-binário em A formado por $\mathbf{R} = -(30 \text{ N})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{M}_A^R = -(12 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$. (b) Determine os correspondentes valores de R_y e R_z . (c) Qual a orientação da fenda na cabeça do parafuso para a qual a possibilidade de a lâmina deslizar é a menor possível quando o arco de pua está na posição ilustrada?

3.89 Quatro forças são aplicadas à peça $ABDE$, como ilustrado. Substitua as forças por um sistema força-binário equivalente em A .



Figuras P3.88 e P3.89

3.90 Para desenroscar uma torneira em A , um encanador utiliza dois grifos, como ilustrado. Aplicando uma força de 133 N em cada grifo, a uma distância de 203 mm do eixo do cano e em uma direção perpendicular ao cano e ao grifo, ele evita que o cano gire e/ou se solte ou aperte.

mais a rosca no cotovelo em C . Determine: (a) o ângulo θ que o grifo em A deve formar com a vertical para que o cotovelo em C não gire em torno da vertical e (b) o sistema força-binário em C equivalente às duas forças de 133 N quando essa condição está satisfeita.

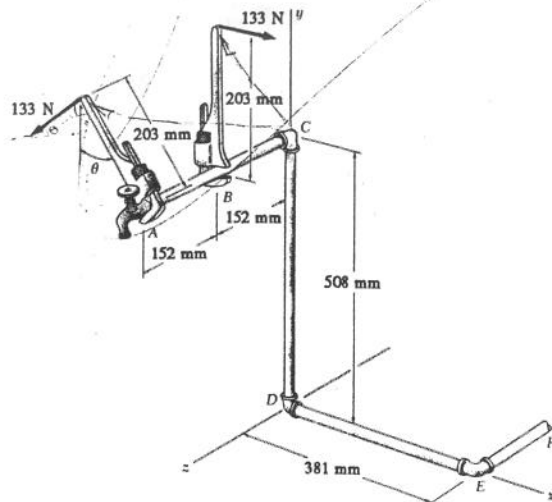


Figura P3.90

3.91 Supondo $\theta = 60^\circ$ no Prob. 3.90, substitua as duas forças de 133 N por um sistema força-binário equivalente em D e determine se a ação do encanador tende a apertar ou afrouxar a união entre (a) o cano CD e o cotovelo D e (b) o cotovelo D e o cano DE . Todas as uniões são de rosca direita.

3.92 Supondo $\theta = 60^\circ$ no Prob. 3.90, substitua as duas forças de 133 N por um sistema força-binário equivalente em E e determine se a ação do encanador tende a apertar ou a afrouxar a união entre: (a) o cano DE e o cotovelo E e (b) o cotovelo E e o cano EF . Todas as uniões são de rosca direita.

3.93 Uma laje retangular de concreto suporta a carga de quatro colunas, como ilustrado. Determine o módulo, a direção e o ponto de aplicação* da resultante das quatro cargas.

* Isto é, a interseção da linha de ação da resultante com a laje. (N. do R. T.)

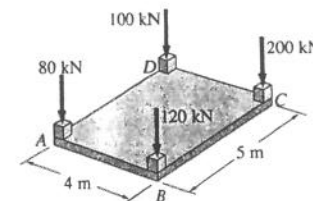
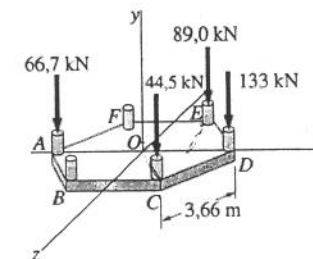


Figura P3.93

3.94 Uma laje hexagonal de concreto tem 3,66 m de lado e suporta as cargas de quatro colunas, como ilustrado. Determine o módulo, e o ponto de aplicação* da resultante das quatro cargas.

3.95 Determine os módulos das cargas adicionais a serem aplicadas em B e F a fim de que a resultante das seis cargas passe pelo centro da laje.



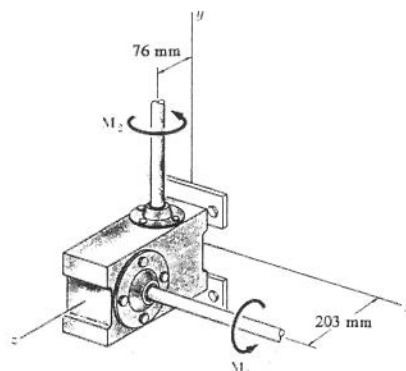
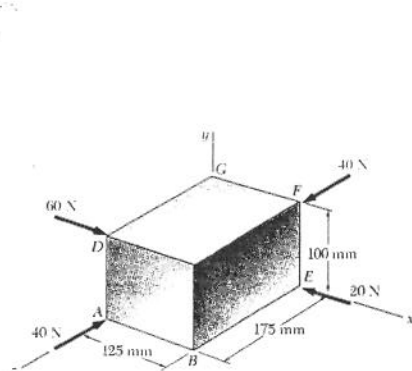
Figuras P3.94 e P3.95

3.96 No Prob. 3.93, determine a intensidade e o ponto de aplicação da menor carga adicional a ser aplicada à laje para que a resultante das cinco cargas passe pelo centro da laje.

* **3.97** No bloco retangular da figura são aplicadas quatro forças paralelas a certas arestas. Reduza o sistema de forças a: (a) um sistema força-binário na origem e (b) um torsor. (Determine o passo e o eixo do torsor.)

* **3.98** Os dois eixos da caixa de redução estão sujeitos a binários cujos momentos têm módulos $M_1 = 20,3 \text{ N} \cdot \text{m}$ e $M_2 = 4,07 \text{ N} \cdot \text{m}$. A caixa pesa 267 N e tem seu centro de gravidade sobre o eixo z em $z = 152 \text{ mm}$. Substitua o peso e os dois binários por um torsor equivalente e determine: (a) a força resultante R , (b) o passo do torsor e (c) o ponto onde o eixo do torsor corta o plano xz .

* Isto é, a interseção da linha de ação da resultante com a laje. (N. do R. T.)



Figuras P3.97 e P3.98

* 3.99 Duas forças de módulos P estão aplicadas ao longo das diagonais GC e AE das faces horizontais de um paralelepípedo retangular. Substitua as duas forças por um sistema equivalente formado: (a) por uma força e um binário em O e (b) um torsor. (Determine o passo e o eixo do torsor.)

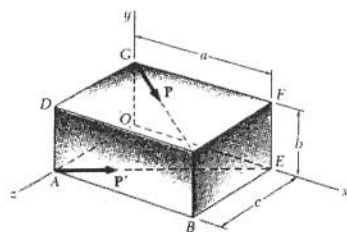


Figura P3.99

* 3.100 Durante um processo automatizado de fabricação, três furos são feitos simultaneamente em um bloco de alumínio. Cada broca aplica uma força de 40 N e um binário de 0,100 N·m ao bloco. Sabendo que a furadeira A gira no sentido anti-horário e que as furadeiras B e C giram no sentido horário (olhando da furadeira para o bloco) reduza as forças e os binários devidos às brocas a um torsor equivalente e determine: (a) a força resultante R , (b) o passo do torsor e (c) o ponto onde o eixo do torsor corta o plano xz .

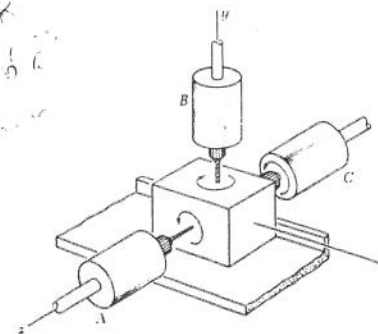


Figura P3.100

* 3.101 Se no Prob. 100 apenas as furadeiras A e B forem usadas, mostre que as forças e os binários por elas exercidos no bloco podem ser reduzidos a uma só força R e determine: (a) o módulo, a direção e o sentido de R e (b) a linha de ação de R .

* 3.102 No Probl. Resolvido 3.12, uma força $Q = Qk$ é aplicada ao vértice B do cubo. Sabendo que as três forças aplicadas ao cubo podem ser reduzidas a uma força R determine: (a) a força Q , (b) o módulo, a direção e o sentido de R e (c) o ponto onde a linha de ação de R corta o plano yz .

* 3.103 No Prob. 3.97, suponha que a força aplicada em A seja removida e substitua as três forças restantes por um torsor equivalente. Determine: (a) o módulo, a direção e o sentido da força resultante R , (b) o passo do torsor e (c) o ponto onde o eixo do torsor corta o plano yz .

* 3.104 No Probl. 3.89, substitua as quatro forças por um torsor equivalente. Determine: (a) o módulo, a direção e o sentido da força resultante R , (b) o passo do torsor e (c) o ponto onde o eixo do torsor corta o plano xz .

* 3.105 Supondo $\theta = 60^\circ$ no Prob. 3.90, substitua as duas forças de 133 N por um torsor equivalente. Determine: (a) o módulo, a direção e o sentido da força resultante R , (b) o passo do torsor e (c) o ponto onde o eixo do torsor corta o plano yz .

* 3.106 Substitua os dois torses da figura por um único equivalente e determine: (a) a força resultante R , (b) o passo do torsor equivalente e (c) o ponto onde seu eixo corta o plano xz .

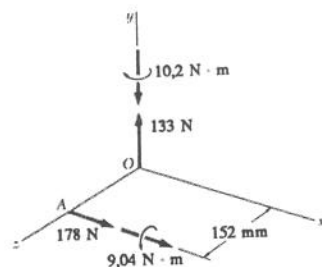


Figura P3.106

* 3.107 (a) Substitua o torsor da figura por duas forças equivalentes perpendiculares ao eixo x em A e B. (b) Resolva a parte (a) supondo $R = 120 \text{ N}$, $M = 24 \text{ N} \cdot \text{m}$, $a = 100 \text{ mm}$ e $b = 50 \text{ mm}$.

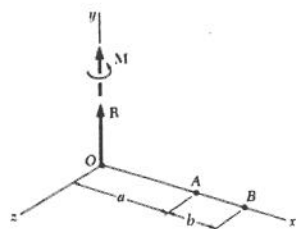


Figura P3.107

* 3.108 Mostre que é sempre possível substituir um torsor por duas forças equivalentes, escolhidas de modo que a linha de ação de uma passe por um dado ponto e a outra pertença a um plano dado.

* 3.109 Mostre que um torsor pode ser substituído por duas forças equivalentes, perpendiculares, sendo uma delas aplicada a um ponto dado.

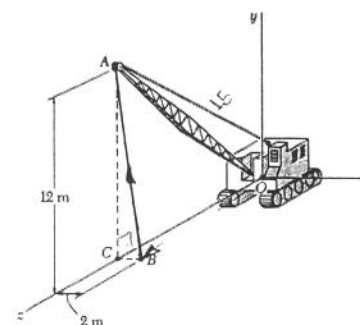
* 3.110 Mostre que um torsor pode ser substituído por duas forças equivalentes sendo que uma delas tem uma linha de ação dada.

Problemas de Recapitulação

3.111 Um guindaste está posicionado de modo que o extremo de sua lança AO, de 15 m, está no plano yz. No instante correspondente à figura, a tração no cabo é de 3,5 kN. Determine o momento, em relação a cada eixo coordenado, da força aplicada em A pelo cabo AB.

3.112 A lança AO, de 15 m, está no plano yz. Determine a maior força de tração no cabo AB compatível com os momentos, em relação aos eixos coordenados, da força aplicada em A, satisfazendo as desigualdades:

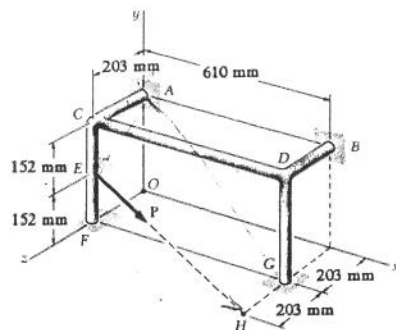
$$|M_x| \leq 40 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad |M_y| \leq 7,5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{e} \quad |M_z| \leq 8,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



Figuras P3.111 e P3.112

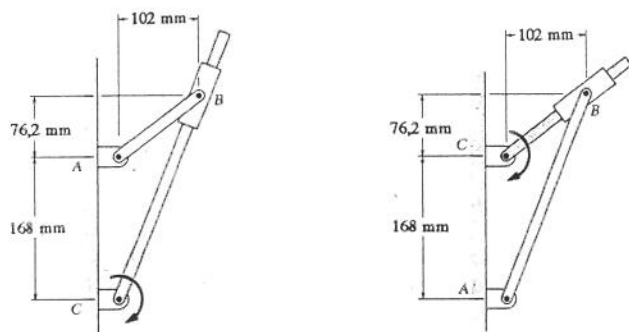
3.113 Uma força P, de módulo 2 020 N, está aplicada na estrutura da figura, no ponto E. Determine o momento de P: (a) em relação ao ponto D e (b) em relação à reta que passa pelos pontos O e D.

3.114 Uma força P é aplicada no ponto E da estrutura da figura. Sabendo que o valor absoluto do momento de P, em relação à reta que passa por A e G, é igual a 163 N·m, determine a intensidade de P.



Figuras P3.113 e P3.114

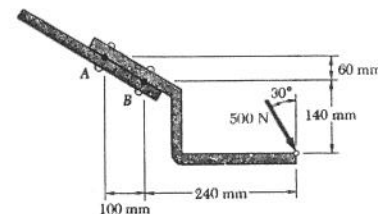
3.115 e 3.116 Sabe-se que a manga B aplica na haste AB uma força de 578 N, perpendicular à haste BC , que aponta para baixo e para a direita. Determine o momento dessa força em relação a A .



Figuras P3.115 e P3.116

3.117 Uma força de 500 N é aplicada à placa dobrada da figura. Determine: (a) um sistema força-binário equivalente em A e (b) um sistema equivalente formado por forças paralelas aplicadas em A e B .

3.118 Uma força de 500 N é aplicada à placa dobrada da figura. Determine: (a) um sistema força-binário equivalente em B e (b) um sistema equivalente formado por uma força vertical em A e uma força em B .



Figuras P3.117 e P3.118

3.119 Uma laje de concreto, de 6 m de raio, suporta quatro colunas igualmente espaçadas, cada uma distante 5 metros do centro da laje. Determine o módulo e o ponto de aplicação da resultante das quatro cargas.

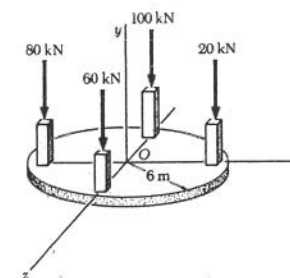


Figura P3.119

3.120 Determine o módulo e o ponto de aplicação da menor carga aplicada à laje do Prob. 3.119, a fim de que a linha de ação da resultante das cinco cargas passe pelo centro da laje.

3.121 Substitua as três forças ilustradas por: (a) um sistema força-binário na origem e (b) um tissor. (Determine o passo e o eixo do tissor.)

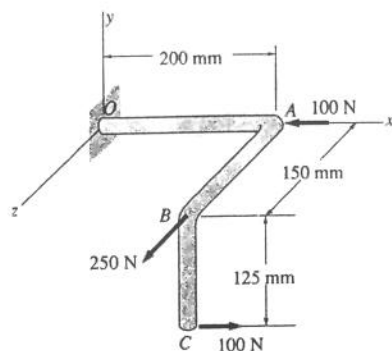


Figura P3.121

3.122 Um binário formado por duas forças de 400 N é aplicado à combinação de polias ilustrada. Determine um binário equivalente formado por: (a) forças verticais aplicadas em A e C. (b) forças de menor módulo possível aplicadas em B e D e (c) forças de menor módulo possível aplicadas ao sistema.

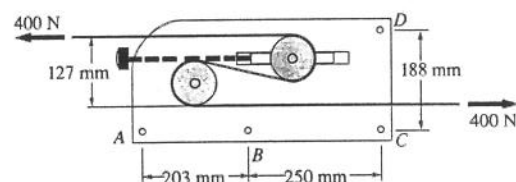


Figura P3.122

Recapitulação e Sumário

Princípio de transmissibilidade

Neste capítulo estudamos a ação de forças aplicadas em corpos rígidos. Inicialmente aprendemos a distinguir entre forças *internas* e *externas* [Seção 3.2], vimos ainda que, de acordo com o *princípio da transmissibilidade*, o efeito de uma força externa sobre um corpo rígido não se altera se a força é deslocada ao longo de sua linha de ação [Seção 3.3]. Em outras palavras, duas forças $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}'$ que agem em pontos diferentes de um corpo rígido têm o mesmo efeito sobre o corpo, se elas tiverem mesmos módulos, direção, sentido e a mesma linha de ação (Fig. 3.48). Duas forças nestas condições são *equivalentes*.

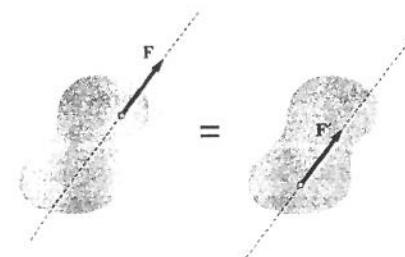


Figura 3.48

Produto vetorial de dois vetores

Antes de prosseguir com a discussão de *sistemas equivalentes de forças*, definimos o *produto vetorial de dois vetores* [Seção 3.4]. O produto vetorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dois vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ foi definido como sendo o vetor perpendicular ao plano que contém $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ (Fig. 3.49), de módulo

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

e sentido tal que uma pessoa com a cabeça colocada na ponta do vetor $\mathbf{V}$ observará uma rotação anti-horária quando o vetor $\mathbf{P}$ varrer o ângulo θ até alinhar-se com o vetor $\mathbf{Q}$.

Os três vetores $\mathbf{V}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$, nesta ordem, formam um *triedro positivo*. Da definição segue que os produtos vetoriais $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ são representados por vetores que diferem apenas pelo sentido. Temos

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

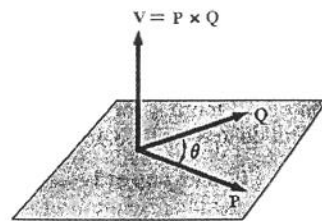


Figura 3.49

Ainda da definição de produto vetorial de dois vetores obtêm-se as seguintes relações para os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

e outras semelhantes. O sinal do produto vetorial de dois vetores unitários pode ser determinado dispondo-se os três símbolos que os representam sobre uma circunferência em sentido anti-horário (Fig. 3.50). O produto de dois vetores unitários será positivo se eles estiverem um após o outro no sentido anti-horário, caso contrário será negativo.

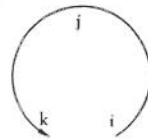


Figura 3.50

Componentes cartesianas do produto vetorial

As componentes cartesianas do produto vetorial $\mathbf{V}$ de dois vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ foram escritas [Seção 3.5].

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Também escrevemos na forma de um determinante

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

Momento de uma força em relação a um ponto

O momento de uma força $\mathbf{F}$ em relação a um ponto O foi definido [Seção 3.6] pelo produto vetorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição que liga a origem O ao ponto de aplicação A da força $\mathbf{F}$ (Fig. 3.51). Sendo θ o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$, determinamos o módulo do momento de $\mathbf{F}$ em relação a O

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

onde d é a distância de O à linha de ação de $\mathbf{F}$.

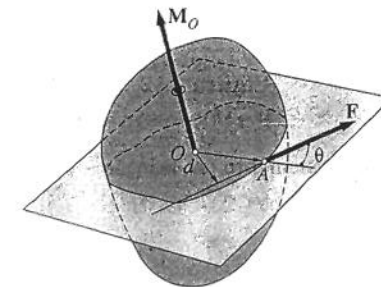


Figura 3.51

Componentes cartesianas do momento

As componentes cartesianas do momento M_O de uma força F foram expressas [Seção 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde x , y e z são as componentes cartesianas do vetor r (Fig. 3.52). Escrevemos também na forma de um determinante

$$M_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

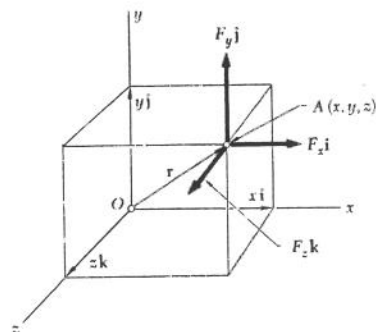


Figura 3.52

No caso mais geral do momento em relação a um ponto arbitrário B de uma força F aplicada em A , obtivemos,

$$M_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

onde Δx , Δy e Δz são as componentes cartesianas do vetor $r_{A/B}$:

$$\Delta x = x_A - x_B \quad \Delta y = y_A - y_B \quad \Delta z = z_A - z_B$$

No caso de *problemas envolvendo apenas duas dimensões*, pode-se supor que a força F esteja no plano xy . O momento M_B em relação ao ponto B que pertence ao mesmo plano é perpendicular ao plano xy e é completamente definido pelo escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

Vários métodos para o cálculo de momento de uma força em relação a um ponto foram exemplificados nos Problemas Resolvidos 3.1 a 3.4.

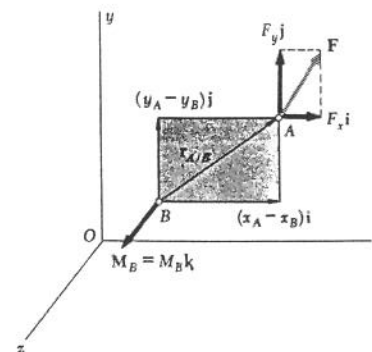


Figura 3.53

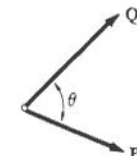


Figura 3.54

Produto escalar de dois vetores

O produto escalar de dois vetores P e Q [Seção 3.9] foi representado por $P \cdot Q$ e definido como o escalar dado por

$$P \cdot Q = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

onde θ é o ângulo entre P e Q (Fig. 3.54). Obtivemos também a expressão do produto escalar de P e Q em termos de suas componentes cartesianas

$$P \cdot Q = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

Projeção de um vetor sobre um eixo

A projeção de um vetor $\mathbf{P}$ sobre um eixo OL (Fig. 3.55) pode ser obtida calculando-se o produto escalar de $\mathbf{P}$ com o vetor unitário λ de OL . Temos

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.36)$$

ou, em termos de componentes cartesianas

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

onde θ_x , θ_y e θ_z representam os ângulos que o eixo OL forma com os eixos coordenados.

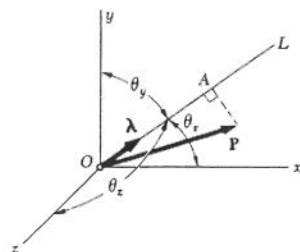


Figura 3.55

Produto misto de três vetores

O produto misto de três vetores $\mathbf{S}$, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ foi definido como sendo o escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

obtido efetuando-se o produto escalar de $\mathbf{S}$ com o produto vetorial de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ [Seção 3.10]. Vimos que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

onde os elementos do determinante são as componentes cartesianas dos três vetores.

Momento de uma força em relação a um eixo

O momento de uma força $\mathbf{F}$ em relação a um eixo OL [Seção 3.11] foi definido como sendo a projeção OC sobre OL do momento $\mathbf{M}_O$ da força $\mathbf{F}$ (Fig. 3.56), isto é, como o produto misto dos vetores unitário λ , posição $\mathbf{r}$ e força $\mathbf{F}$:

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

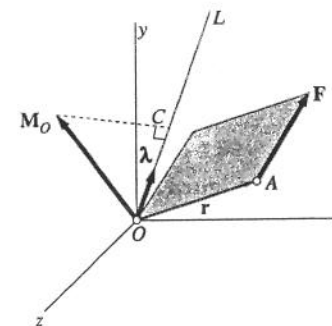


Figura 3.56

O produto misto pode ser escrito como o determinante

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = co-senos diretores do eixo OL

x, y, z = componentes de $\mathbf{r}$

F_x, F_y, F_z = componentes de $\mathbf{F}$

Um exemplo do cálculo do momento de uma força em relação a um eixo reverso foi dado no Problema Resolvido 3.5.

Binários

Dois forças F e $-F$ que têm mesmo módulo, linhas de ação paralelas e sentidos opostos formam um binário [Seção 3.12]. Vimos que o momento de um binário é independente do ponto em relação ao qual é calculado; ele é um vetor M perpendicular ao plano do binário e seu módulo é igual ao produto do valor F do módulo comum das forças do binário pela distância d entre suas linhas de ação (Fig. 3.57).

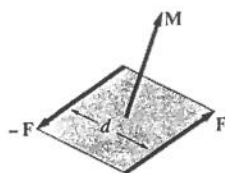


Figura 3.57

Dois binários que têm o mesmo momento são *equivalentes*, isto é, eles têm o mesmo efeito sobre um corpo rígido [Seção 3.13]. A soma de dois binários é um binário [Seção 3.14] e o momento M do binário resultante é a soma vetorial dos momentos M_1 e M_2 dos dois binários originais [Problema Resolvido 3.6]. Em consequência, um binário pode ser representado por um vetor, denominado *vetor binário*, igual em módulo, direção e sentido ao momento M do binário [Seção 3.15]. Um vetor binário é um *vetor livre* que pode ser aplicado à origem O , se for conveniente, e cujas componentes cartesianas podem ser calculadas (Fig. 3.58).

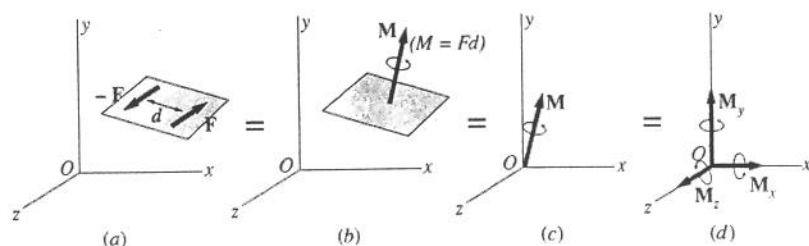


Figura 3.58

Sistemas força-binário

Qualquer força F aplicada em um ponto A de um corpo rígido pode ser substituída por um sistema força-binário aplicado em um ponto arbitrário O , e consti-

tuído da força F aplicada em O e de um binário de momento M_O igual ao momento em relação a O da força F na sua posição original [Seção 3.16]. Deve-se notar que a força F e o momento M_O são sempre mutuamente perpendiculares (Fig. 3.59).

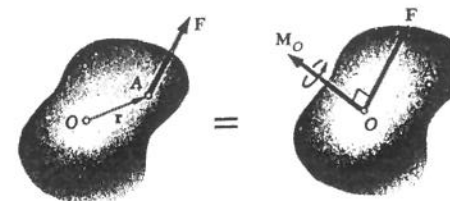


Figura 3.59

Redução de um sistema de forças a um sistema força-binário

Na Seção 3.17 vimos que *qualquer sistema de forças pode ser reduzido a um sistema força-binário aplicado a um dado ponto O* (Fig. 3.60). Substitui-se cada força do sistema por um sistema força-binário equivalente aplicado em O (Fig. 3.60) e depois somam-se todas as forças e todos os binários obtendo-se a força resultante R e o vetor binário resultante M_O^R [Problemas Resolvidos 3.8 a 3.11]. Note que, em geral, a resultante R e o vetor binário M_O^R não serão mutuamente perpendiculares.

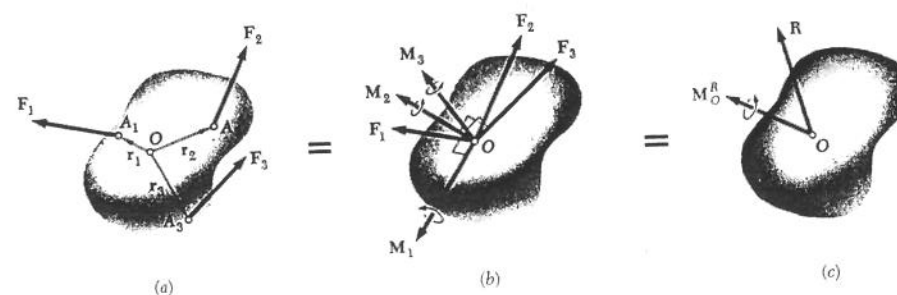


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de forças

Na Seção 3.18 concluímos que, no que se refere a corpos rígidos, dois sistemas de forças F_1, F_2, F_3 etc e F'_1, F'_2, F'_3 etc. são equivalentes se e somente se

$$\Sigma F = \Sigma F' \quad \text{e} \quad \Sigma M_O = \Sigma M'_O \quad (3.57)$$

Casos particulares de redução de um sistema de forças

Se a força resultante R e o vetor binário resultante M_O^R forem mutuamente perpendiculares, o sistema força-binário pode ser reduzido a uma única força resultante [Seção 3.20]. Isto acontece em sistemas em que as forças são: *a*) concorrentes (conforme Capítulo 2), *b*) coplanares [Problemas Resolvidos 3.8 e 3.9] ou *c*) paralelas [Problema Resolvido 3.11]. Se a resultante R e o vetor binário M_O^R não são mutuamente perpendiculares, o sistema não pode ser reduzido a uma única força. Ele pode, entretanto, ser reduzido a um tipo especial de sistema força-binário denominado *torsor*, formado por uma força resultante R e por um vetor binário M_1 que tem a mesma direção de R [Seção 3.21 e Problema Resolvido 3.12].

Capítulo 4

Equilíbrio dos Corpos Rígidos

4.1. Introdução. Vimos, no capítulo anterior, que as forças externas que agem em um corpo rígido podem ser reduzidas a um sistema força-binário em um ponto arbitrário O . Quando a força e o binário são ambos nulos, as forças externas constituem um sistema equivalente a zero e diz-se que o corpo rígido está em equilíbrio.

As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido podem, pois, ser obtidas impondo que R e M_O^R sejam iguais a zero nas Eqs. (3.52):

$$\Sigma F = 0 \quad \Sigma M_O = \Sigma (r \times F) = 0 \quad (4.1)$$

Decompondo cada força e cada momento em suas componentes cartesianas encontramos que as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido também podem ser expressas pelas seis equações escalares

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

As equações obtidas podem ser usadas para determinar forças desconhecidas aplicadas ao corpo rígido ou reações desconhecidas exercidas por um vínculo.

As Eqs. (4.2) traduzem o fato de que as componentes das forças externas se compensam nas direções x , y e z . As Eqs. (4.3) traduzem o fato de que os momentos das forças externas, em relação aos eixos x , y e z , se anulam. O sistema das forças externas, por conseguinte, não comunicará movimento de translação ou rotação ao corpo rígido considerado.

Para escrever as equações de equilíbrio de um corpo rígido, é essencial identificar, em primeiro lugar, todas as forças que agem no corpo e desenhar o *diagrama de corpo livre* correspondente. Neste capítulo estudaremos, inicialmente, o equilíbrio de *estruturas bidimensionais* sujeitas a forças contidas em seu plano e aprenderemos a desenhar os diagramas de corpo livre correspondentes. Além das forças *aplicadas* à estrutura, consideraremos as *reações* aplicadas na estrutura por seus vínculos. Aprenderemos a associar uma reação específica a cada tipo de vínculo e determinaremos se a estrutura está adequadamente vinculada de modo a saber antecipadamente se as equações de equilíbrio podem ser resolvidas para obter as forças e reações desconhecidas.

Posteriormente, neste capítulo, estudaremos o equilíbrio de estruturas tridimensionais e as submeteremos, assim como seus vínculos, ao mesmo tipo de análise.

4.2. Diagrama de Corpo Livre. Na resolução de um problema referente ao equilíbrio de um corpo rígido, é essencial considerar *todas* as forças que atuam sobre o corpo; é igualmente importante excluir qualquer força que não esteja aplicada diretamente sobre o corpo. Omitindo uma força, ou adicionando uma força estranha, destruiríamos as condições de equilíbrio. Por conseguinte, o primeiro passo na solução do problema deve consistir em desenhar um *diagrama de corpo livre* do corpo rígido em consideração. Os diagramas de corpo livre foram usados, em muitas ocasiões, no Cap. 2. Contudo, em vista de sua importância na solução de problemas de equilíbrio, sistematizaremos aqui as passagens que devem ser seguidas para sua realização.

Primeiro, uma decisão clara é tomada quanto à escolha do corpo livre a ser usado. Esse corpo é, então, destacado do solo e separado de qualquer outro corpo. O contorno do corpo assim isolado é esquematizado.

Todas as forças externas são então indicadas. Essas forças representam a ação exercida *sobre* o corpo livre *pelo* solo e *pelos* corpos dos quais foi destacado; elas devem ser aplicadas nos vários pontos onde o corpo livre estava vinculado ao solo ou aos outros corpos. O *peso* do corpo livre deve ser também incluído entre as forças externas, pois representa a atração exercida pela Terra sobre as várias partículas que formam o corpo livre. Como veremos no Cap. 5, o peso deve ser aplicado no baricentro do corpo. Quando o corpo livre é constituído de várias partes, as forças que as várias partes exercem umas sobre as outras *não* são incluídas entre as forças externas. Essas forças, no que se refere ao corpo livre, são forças internas.

O módulo, a direção e o sentido das *forças externas conhecidas* devem ser claramente mostrados no diagrama de corpo livre. Muito cuidado se deve tomar para indicar o sentido das forças exercidas *sobre* o corpo e não o das forças exercidas *pelo*

corpo livre. As forças externas conhecidas compreendem, geralmente, o *peso* do corpo livre e *forças aplicadas* para certa finalidade.

A forças externas *desconhecidas* são geralmente constituídas pelas *reações* – também às vezes chamadas *forças de vínculo* – através das quais o solo e outros corpos se opõem a um possível movimento do corpo livre, obrigando-o a permanecer na mesma posição. As reações são exercidas nos pontos onde o corpo livre é *vinculado* a outros corpos e serão discutidas em detalhe nas Seções 4.3 e 4.8.

Um diagrama de corpo livre deve incluir também as dimensões, pois estas são necessárias no cálculo dos momentos das forças. Qualquer outro detalhe deve ser omitido.

Equilíbrio em Duas Dimensões

4.3. Reações nos Vínculos de uma Estrutura Bidimensional. Na primeira parte deste capítulo consideraremos o equilíbrio de uma estrutura bidimensional, isto é, suporemos que a estrutura considerada e as forças sobre ela aplicadas estão contidas no plano da figura. Obviamente, as reações necessárias para manter a estrutura na mesma posição estarão também contidas no plano da figura.

As reações exercidas sobre uma estrutura bidimensional podem ser divididas em três grupos correspondentes a três tipos de vínculos:

1. *Reações Equivalentes a uma Força com Linha de Ação Conhecida.** Os vínculos que causam reações desse tipo são os *roletes*, *balancins*, *superfícies lisas*, *hastes curtas e cabos*, *cursores e pinos deslizantes sem atrito*. Cada um desses vínculos pode impedir movimento em apenas uma direção. Eles estão ilustrados na Fig. 4.1 juntamente com as reações que produzem. Reações desse grupo envolvem *uma incógnita*, que é o módulo da reação; e esse módulo deve ser representado por uma letra apropriada. A linha de ação da reação é conhecida e deve ser indicada claramente no diagrama de corpo livre. O sentido da reação deve ser como mostrado na Fig. 4.1, no caso de uma superfície lisa (para fora da superfície) ou de um cabo (tração na direção do cabo). A reação pode estar orientada em ambos os sentidos, no caso de roletes em pista dupla, hastes, cursores e pinos deslizantes. Os roletes em pista simples e balancins são geralmente supostos reversíveis, então as reações correspondentes também podem ser orientadas em ambos os sentidos.
2. *Reações Equivalentes a uma Força de Direção Desconhecida.*** Os vínculos que causam reações desse tipo são os *pinos polidos em orifícios ajustados*,

* Na nomenclatura usual em Engenharia Brasileira, esse tipo de vínculo é chamado *apoio simples*. (N. do R.T.)

** Na nomenclatura usual em Engenharia Brasileira, esse tipo de vínculo é chamado *articulação plana*. (N. do R.T.)

articulações e superfícies rugosas. Eles podem restringir a translação de um corpo livre em todas as direções, mas não restringem a rotação em torno da conexão. As reações desse grupo envolvem *duas incógnitas*, geralmente representadas por suas componentes x e y . No caso de uma superfície rugosa, a componente normal à superfície deve estar orientada para fora da superfície de apoio.

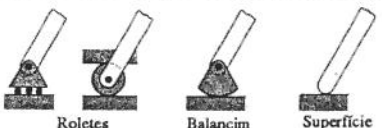
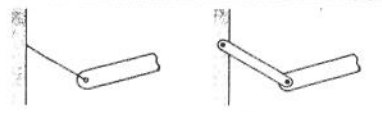
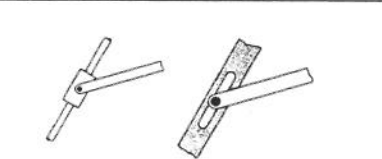
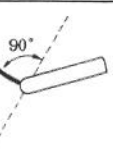
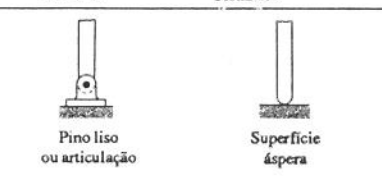
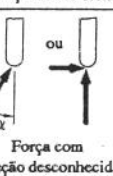
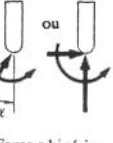
Vínculo	Reação	Número de incógnitas
 Roletes Balancim Superfície lisa	 Força com linha de ação conhecida	1
 Cabo curto Haste curta	 Força com linha de ação conhecida	1
 Cursor sobre haste lisa Pino liso deslizante	 Força com linha de ação conhecida	1
 Pino liso ou articulação Superfície áspera	 Força com direção desconhecida	2
 Apoio fixo ou engastamento	 Força e binário	3

Figura 4.1 Reações dos vínculos.

3. *Reações Equivalentes a uma Força e um Binário**. Essas reações são causadas por *apoios fixos* que impedem qualquer movimento do corpo livre, imobilizando-o completamente. Os apoios fixos produzem forças sobre toda a superfície de contato; contudo, essas forças formam um sistema que pode ser reduzido a uma força e a um binário. As reações desse grupo envolvem três incógnitas, consistindo geralmente em duas componentes da força e o momento do binário.

Quando o sentido de uma força ou de um binário desconhecido não é previsível, devemos tomá-lo arbitrariamente; o sinal da resposta obtida indicará, então, se o sentido adotado é correto ou não.

4.4. Equilíbrio de um Corpo Rígido em Duas Dimensões. As condições estabelecidas na Seção 4.1 para o equilíbrio de um corpo rígido simplificam-se consideravelmente no caso de uma estrutura bidimensional. Escolhendo os eixos x e y no plano da estrutura, temos

$$F_z = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_0$$

para cada uma das forças aplicadas ao corpo rígido. Então as seis equações de equilíbrio deduzidas na Seção 4.1 reduzem-se a

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0 \quad (4.4)$$

e às três identidades triviais $0 = 0$. Como a terceira das Eqs. (4.4) deve ser satisfeita independentemente da escolha da origem O , podemos escrever as equações de equilíbrio para uma estrutura bidimensional na forma mais geral

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

onde A é qualquer ponto no plano da estrutura. As três equações obtidas podem ser resolvidas para um máximo de *três incógnitas*.

* Esse tipo de vínculo é chamado usualmente de *engastamento*. (N. do R.T.)

Vimos, nas seções precedentes, que as forças desconhecidas são, geralmente, as reações, e que o número de incógnitas correspondentes a uma dada reação depende do tipo de apoio ou conexão que causa essa reação. Voltando à Seção 4.3, verificamos que as equações de equilíbrio (4.5) podem ser usadas para determinar as reações de dois roletes e um cabo, ou de um engaste, ou de um rolete e uma articulação etc.

Consideremos, por exemplo, a treliça ilustrada na Fig. 4.2a submetida às forças N , Q e S . A treliça é mantida no lugar por uma articulação em A e um rolete em B . A articulação impede o ponto A de se mover, exercendo sobre a treliça uma força que pode ser decomposta nas componentes A_x e A_y ; o rolete impede a treliça de girar em relação a A , exercendo a força vertical B . O diagrama de corpo livre da treliça é ilustrado na Fig. 4.2b; ele inclui as reações A_x , A_y e B , e as forças aplicadas N , Q e S , além do peso P da treliça. Impondo que a soma dos momentos em relação a A de todas as forças indicadas na Fig. 4.2b seja zero, escrevemos a equação $\Sigma M_A = 0$, que pode ser resolvida para a intensidade B , pois não contém A_x ou A_y . Impondo, então, que a soma das componentes x e a soma das componentes y das forças são nulas, escrevemos as equações $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, que podem ser resolvidas para as componentes A_x e A_y , respectivamente.

Equações adicionais poderiam ser obtidas igualando a zero a soma dos momentos das forças externas em relação a outros pontos diferentes de A . Poderíamos escrever, por exemplo, $\Sigma M_B = 0$. Contudo, tal afirmação não contém nenhuma informação nova, pois já foi estabelecido que o sistema de forças apresentado na Fig. 4.2b é equivalente a zero. A equação adicional *não é independente* e não pode ser usada para determinar uma quarta incógnita. Entretanto, ela é útil para verificar a solução obtida das três equações originais de equilíbrio.

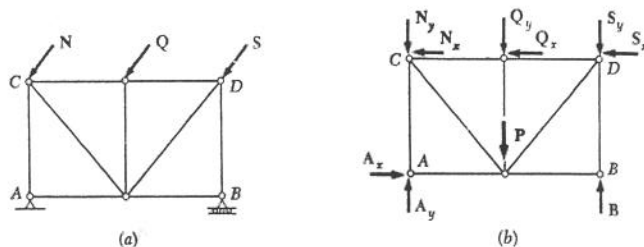


Figura 4.2

Embora não haja outra equação independente das três equações de equilíbrio, qualquer uma delas pode ser *substituída* por outra equação. Um sistema alternativo para as equações de equilíbrio é

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.6)$$

onde a reta AB é escolhida numa direção diferente da direção y (Fig. 4.2b). Essas equações são condições suficientes para o equilíbrio da treliça. As primeiras duas equações indicam que as forças externas devem reduzir-se em A a uma força vertical única. Como a terceira equação requer que o momento dessa força seja zero em relação a B , que não está sobre sua linha de ação, a força deve ser zero, e o corpo rígido está em equilíbrio.

Um terceiro conjunto de equações de equilíbrio possível é

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.7)$$

onde os pontos A , B e C não estão alinhados (Fig. 4.2b). A primeira equação requer que as forças externas se reduzam a uma única força em A ; a segunda requer que essa força passe através de B ; a terceira, que ela passe por C . Como os pontos A , B e C não estão alinhados, a força deve ser zero, e o corpo rígido está em equilíbrio.

A equação $\Sigma M_A = 0$, que traduz o fato de que a soma dos momentos das forças em relação à articulação A é zero, possui um significado físico mais claro que as outras duas equações de (4.7). Essas duas equações exprimem uma idéia similar de equilíbrio, mas com respeito a pontos aos quais o corpo rígido não está articulado. Contudo, elas são tão úteis quanto a primeira equação, e nossa escolha das equações de equilíbrio não deve ser excessivamente influenciada pelo significado físico dessas equações. De fato, será desejável, na prática, escolher equações de equilíbrio que contenham somente uma incógnita, pois isto elimina a necessidade de resolver sistemas de equações. As equações que contêm somente uma incógnita podem ser obtidas pela soma de momentos em relação ao ponto de interseção das linhas de ação de duas forças desconhecidas ou, se essas forças forem paralelas, pela soma das componentes em uma direção perpendicular à sua direção comum. No caso da treliça da Fig. 4.3, por exemplo, que é vinculada pelos roletes em A e B e uma haste em D , as reações em A e B podem ser eliminadas pela soma das componentes em x . As reações em A e D serão eliminadas somando-se os momentos em relação a C , e as reações em B e D , pela soma dos momentos em relação a D . As equações obtidas são

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad \Sigma M_D = 0$$

Cada uma dessas equações contém somente uma incógnita.

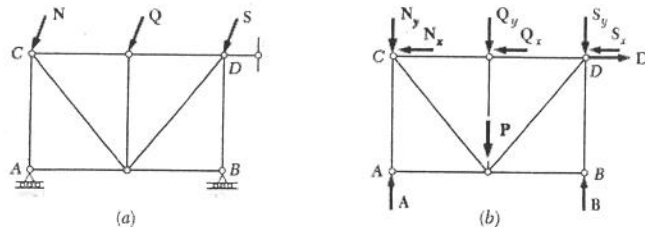


Figura 4.3

4.5. Reações Estaticamente Indeterminadas. Vinculação Parcial. Em cada um dos dois exemplos considerados na seção precedente (Figs. 4.2 e 4.3), os tipos de vínculos usados eram tais que o corpo rígido não podia mover-se sob as cargas dadas ou sob quaisquer outras condições de carregamento. Em tais casos, diz-se que o corpo rígido está completamente vinculado. Recordamos, também, que as reações correspondentes a esses vínculos envolvem três incógnitas e poderiam ser determinadas pela solução de três equações de equilíbrio. Quando tal situação existe, diz-se que as reações são estaticamente determinadas.

Consideremos, agora, a treliça ilustrada na Fig. 4.4a, vinculada pelas articulações em A e B. Esses vínculos proporcionam mais limitações que as necessárias para manter a treliça sem movimento sob as cargas dadas ou sob quaisquer outras condições de carregamento. Notamos, do diagrama de corpo livre da Fig. 4.4b, que as reações envolvem quatro incógnitas. Conforme ressaltado na Seção 4.4, como são disponíveis apenas três equações independentes de equilíbrio, existem mais incógnitas que equações, e não poderemos determinar todas as incógnitas. Enquanto as equações $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$ conduzem às componentes verticais B_y e A_y , respectivamente, a equação $\Sigma F_x = 0$ dá somente a soma $A_x + B_x$ das componentes horizontais das reações em A e B. As componentes A_x e B_x são chamadas de estaticamente indeterminadas, e diz-se que a estrutura é hiperestática. Elas podem ser determinadas considerando-se as deformações produzidas na treliça pelo carregamento dado, mas esse método está além do âmbito da estática e pertence ao estudo da *Resistência dos Materiais*.

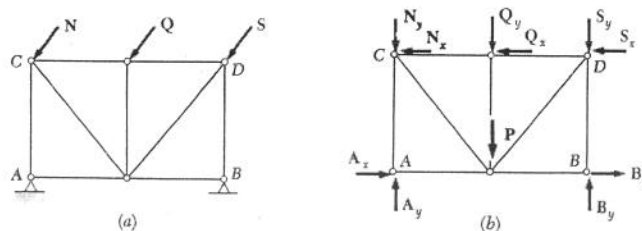


Figura 4.4

Os vínculos usados na treliça ilustrada na Fig. 4.5a consistem em roletes em A e B. É evidente que esses vínculos não são suficientes para manter a treliça sem movimento. Embora qualquer movimento vertical seja impedido, a treliça está livre para mover-se horizontalmente. Diz-se que a treliça está parcialmente vinculada,* também denominada hipoestática. Voltando nossa atenção para a Fig. 4.5b, observamos que as reações em A e B envolvem somente duas incógnitas. Como são três as equações de equilíbrio, existem menos incógnitas que equações, e uma das equações poderá não ser satisfeita. Enquanto as equações $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$ podem ser satisfeitas por uma escolha apropriada das reações em A e B, a equação $\Sigma F_x = 0$ não será satisfeita, a menos que a soma das componentes horizontais das forças aplicadas seja zero. Verificamos, então, que o equilíbrio da treliça da Fig. 4.5 não pode ser mantido sob condições gerais de carregamento.

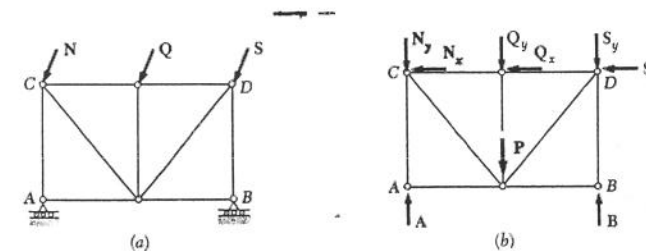


Figura 4.5

Do que foi visto acima resulta que, se um corpo rígido está completamente vinculado e se as reações em seus vínculos são estaticamente determinadas, devem existir tantas incógnitas quantas forem as equações de equilíbrio. Quando essa condição não é satisfeita, podemos estar certos de que o corpo rígido não está completamente vinculado, ou que as reações em seus vínculos não são estaticamente determinadas, ou as duas situações ocorrem simultaneamente.

Observemos, entretanto, que embora essa condição seja necessária não é suficiente. Em outras palavras, o fato de o número de incógnitas ser igual ao número de equações não é uma garantia de que o corpo esteja completamente vinculado ou que as reações em seus vínculos estejam estaticamente determinadas. Consideremos, por exemplo, a treliça ilustrada na Fig. 4.6a, vinculada por roletes em A, B e E. Apesar de existirem três reações desconhecidas A, B e E (Fig. 4.6b), verificamos que a equação

* Muitas vezes, corpos parcialmente vinculados são também denominados *instáveis*. Contudo, para evitar qualquer confusão entre esses tipos de instabilidade, devido a vínculos insuficientes, e o tipo de instabilidade considerado no Cap. 10, que trata do comportamento de um corpo rígido quando seu equilíbrio é perturbado, restringiremos o uso das palavras *estável* e *instável* ao último caso.

$\Sigma F_x = 0$ não será satisfeita a menos que a soma das componentes das forças horizontais aplicadas seja zero. Existe um número suficiente de vínculos, mas estes não estão dispostos adequadamente, e a treliça está livre para mover-se horizontalmente. Dizemos que a treliça está *vinculada ineficazmente*. Como há somente duas equações de equilíbrio para determinar três incógnitas, as reações serão estaticamente indeterminadas. Por conseguinte, vínculos ineficazes também produzem indeterminação estática.

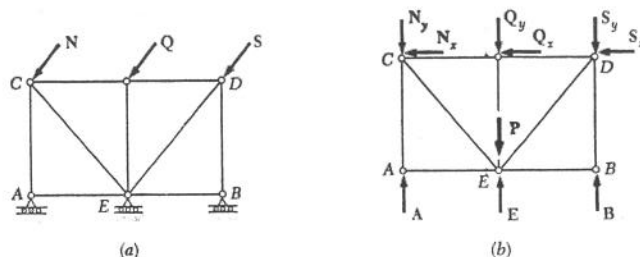


Figura 4.6

Outro exemplo de vinculação ineficaz — e de indeterminação estática — é o da treliça ilustrada na Fig. 4.7. Essa treliça é vinculada por uma articulação em A e por roletes em B e C, que no total envolvem quatro incógnitas. Como há somente três equações de equilíbrio independentes disponíveis, as reações nos apoios são indeterminadas. Por outro lado, observamos que a equação $\Sigma M_A = 0$ não pode ser satisfeita para as condições gerais de carregamento, uma vez que as linhas de ação das reações B e C são obrigadas a passar em A. Concluimos que a treliça pode girar em torno de A e que ela é ineficazmente vinculada.*

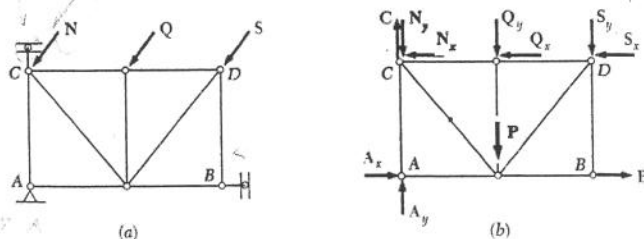


Figura 4.7

* A rotação da treliça em torno de A exige alguma folga nos suportes B e C. Na prática, tal folga sempre existe. Podemos, além disso, observar que, se a folga for pequena, os deslocamentos dos roletes B e C, bem como as distâncias de A às linhas de ação das reações B e C, também serão pequenos. A equação $\Sigma M_A = 0$ exigirá que as reações B e C sejam muito elevadas, situação esta que poderá resultar na quebra dos vínculos B e C.

Os exemplos das Figs. 4.6 e 4.7 conduzem-nos à conclusão de que um *corpo rígido está ineficazmente vinculado sempre que os vínculos, mesmo quando possam fornecer um número suficiente de reações, estão dispostos de tal modo que as reações são todas concorrentes num mesmo ponto ou são paralelas*.*

Em resumo, para estarmos certos de que um corpo rígido bidimensional esteja completamente vinculado e que as reações, em seus apoios, sejam estaticamente determinadas, devemos verificar se as reações envolvem três — e somente três — incógnitas e se os vínculos estão dispostos de tal modo que não exijam que as reações sejam concorrentes ou paralelas.

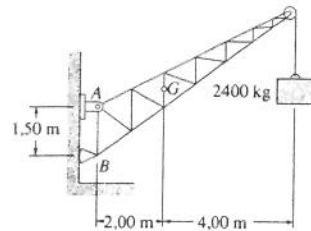
Os vínculos que envolvem reações estaticamente indeterminadas devem ser usados com cuidado no projeto de estruturas e somente quando houver conhecimento pleno dos problemas que possam causar. Por outro lado, a análise de estruturas que possuem reações estaticamente indeterminadas pode ser, freqüentemente, desenvolvida, em parte, pelos métodos da estática. No caso da treliça da Fig. 4.4, por exemplo, as componentes verticais das reações em A e B foram obtidas das equações de equilíbrio.

Por motivos óbvios, os vínculos que produzem restrição parcial ou imprópria deveriam ser evitados nos projetos de estruturas estacionárias. Contudo, uma estrutura parcial ou ineficazmente vinculada não ruirá necessariamente; sob condições particulares de carregamento, o equilíbrio poderá ser mantido. Por exemplo, as treliças das Figs. 4.5 e 4.6 estarão em equilíbrio se as forças aplicadas P, Q e S forem verticais. Além disso, as estruturas projetadas para se mover deveriam ser somente parcialmente vinculadas ou hipoestáticas. Um vagão, por exemplo, seria inútil se fosse completamente vinculado por meio de freios aplicados permanentemente.

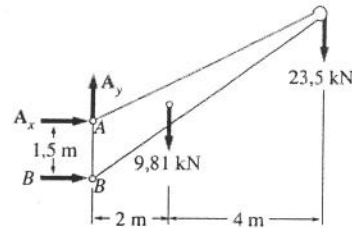
Problema Resolvido 4.1

Um guindaste fixo tem massa igual a 1 000 kg e é usado para levantar uma caixa de 2 400 kg. Ele é mantido no lugar por um pino articulado em A e um balancim (apoio simples) em B. O centro de gravidade do guindaste é o ponto G. Determine as componentes das reações em A e B.

* Em virtude do fato de essa situação ser causada por um inadequado arranjo ou geometria dos vínculos, isto é denominado muitas vezes *instabilidade geométrica*.



Solução. Desenha-se um diagrama de corpo livre do guindaste. Multiplicando as massas do guindaste e da caixa por $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, obtemos os respectivos pesos: 9,81 kN e 23,5 kN. A reação no ponto A é uma força de direção desconhecida, com componentes A_x e A_y . A reação no balancim é perpendicular à superfície do mesmo, sendo, pois, horizontal. Supomos que A_x , A_y e B tenham os sentidos da figura.



Determinação de B. Impomos que a soma dos momentos em relação ao ponto A seja nula. Resulta uma equação que não vai conter nem A_x nem A_y , pois os momentos de A_x e A_y em relação a A são nulos. Multiplicando o módulo de cada força pela distância de sua linha de ação a A, obtemos:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad +B(1,50 \text{ m}) - (9,81 \text{ kN})(2,00 \text{ m}) - (23,5 \text{ kN})(6,00 \text{ m}) = 0$$

$$B = +107 \text{ kN} \quad B = 107 \text{ kN} \rightarrow \leftarrow$$

Como o resultado é positivo, B tem o sentido da figura.

Determinação de A_x . Determina-se A_x impondo que a soma das componentes horizontais das forças externas é nula:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -107 \text{ kN}$$

$$A_x = 107 \text{ kN} \leftarrow \leftarrow$$

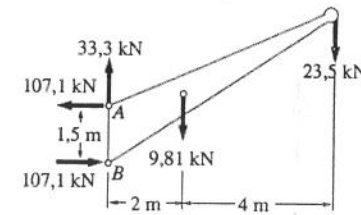
Como A_x é negativo, o sentido de A_x é oposto ao da figura.

Determinação de A_y . Impõe-se que a soma das componentes verticais é nula:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 9,81 \text{ kN} - 23,5 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33,3 \text{ kN} \quad A_y = 33,3 \text{ kN} \uparrow \leftarrow$$

Somando vetorialmente as componentes, concluímos que a reação em A é de 112 kN $\searrow 17,3^\circ$.

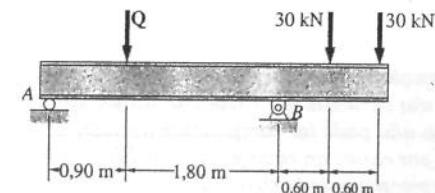


Verificação. A exatidão dos valores obtidos pode ser verificada lembrando que a soma dos momentos das forças externas, em relação a qualquer ponto, deve ser nula. Tomando o ponto B, escrevemos:

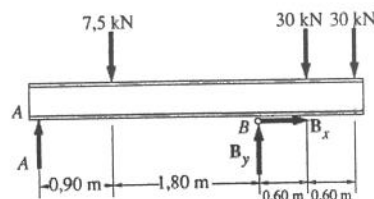
$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = - (9,81 \text{ kN})(2,00 \text{ m}) - (23,5 \text{ kN})(6,00 \text{ m}) + (107 \text{ kN})(1,50 \text{ m}) = 0$$

Problema Resolvido 4.2

Na ilustração, três cargas são aplicadas a uma viga. A viga é apoiada em um rolete (apoio simples) em A e em uma articulação em B. Desprezando o peso da viga, determine as reações em A e B quando $Q = 75 \text{ kN}$.



Solução. *Desenha-se um diagrama de corpo livre da viga. A reação em A é vertical e representada por A . A reação em B tem componentes B_x e B_y . Supomos que os seus sentidos são os da figura.*



Equações de Equilíbrio. *Escrevemos as três equações abaixo, para o equilíbrio, e calculamos as reações indicadas:*

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0 : \quad B_x = 0 \quad B_x = 0 \leftarrow$$

$$\begin{aligned} + \curvearrowright \Sigma M_A = 0 : \\ - (75 \text{ kN}) (0,90 \text{ m}) + B_y (2,70 \text{ m}) - (30 \text{ kN}) (3,30 \text{ m}) - (30 \text{ kN}) (3,90 \text{ m}) = 0 \\ B_y = 105 \text{ kN} \quad B_y = 105 \text{ kN} \uparrow \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \curvearrowright \Sigma M_B = 0 \\ - A (2,70 \text{ m}) + (75 \text{ kN}) (1,80 \text{ m}) - (30 \text{ kN}) (0,60 \text{ m}) - (30 \text{ kN}) (1,20 \text{ m}) = 0 \\ A = + 30,0 \text{ kN} \quad A = 30,0 \text{ kN} \uparrow \leftarrow \end{aligned}$$

Verificação. *A correção dos resultados obtidos é verificada somando as componentes verticais das forças externas:*

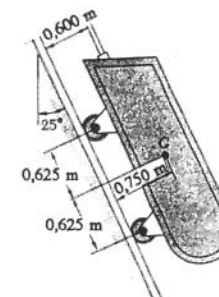
$$+\uparrow \Sigma F_y = 30,0 \text{ kN} - 75 \text{ kN} + 105 \text{ kN} - 30 \text{ kN} - 30 \text{ kN} = 0$$

Observação: *Neste problema as reações em A e B são ambas verticais. Entretanto, elas são verticais por razões distintas. Em A a viga está apoiada em rolete, portanto a reação não pode ter componente horizontal. Em B a componente horizontal da reação é nula por causa da equação de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ e pelo fato de nenhuma das outras forças ter componente horizontal.*

Poderíamos ter percebido, à primeira vista, que a reação em B era vertical. Entretanto essa prática não é correta. Correríamos o risco de omitir a componente B_x quando as condições de carregamento a exigissem (isto é, quando houvesse uma carga com componente horizontal). Ainda mais, verificamos que a componente B_x era nula resolvendo a equação de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$. Se tivéssemos posto $B_x = 0$ de saída, poderíamos esquecer que, de fato, utilizamos essa equação correndo o risco de perder o controle do número de equações disponível para a solução do problema.

Problema Resolvido 4.3

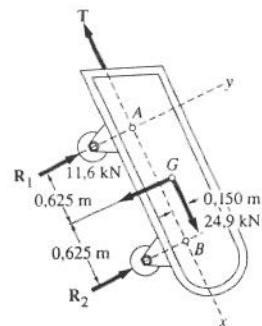
Um vagonete está em repouso sobre trilhos que formam um ângulo de 25° com a vertical. O peso bruto do vagonete e sua carga é de 27,5 kN e está aplicado em um ponto a 0,750 m dos trilhos e a igual distância dos dois eixos das rodas. O vagonete é seguro por um cabo atado a 0,600 m dos trilhos. Determinar a tração no cabo e a reação em cada par de rodas.



Solução. *Um diagrama de corpo livre para o vagonete é desenhado. A reação em cada roda é perpendicular ao trilho, e a força de tração T é paralela aos trilhos. Por conveniência, escolhemos o eixo x paralelo aos trilhos e o eixo y , perpendicular. O peso de 27,5 kN é decomposto nas componentes x e y .*

$$P_x = + (27,5 \text{ kN}) \cos 25^\circ = + 24,9 \text{ kN}$$

$$P_y = - (27,5 \text{ kN}) \sin 25^\circ = - 11,62 \text{ kN}$$



Equações de Equilíbrio. Tomemos os momentos em relação a A para eliminar T e R_1 do cálculo.

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0:$$

$$-(11,6 \text{ kN})(0,625 \text{ m}) - (24,9 \text{ kN})(0,150 \text{ m}) + R_2(1,250 \text{ m}) = 0$$

$$R_2 = +8,79 \text{ kN}$$

$$R_2 = 8,79 \text{ kN} \quad \swarrow \Leftarrow$$

Agora, tomando os momentos em relação a B, para eliminar T e R_2 do cálculo, escrevemos

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0: (11,6 \text{ kN})(0,625 \text{ m}) - (24,9 \text{ kN})(0,150 \text{ m}) - R_1(1,250 \text{ m}) = 0$$

$$R_1 = 2,81 \text{ kN}$$

$$R_1 = 2,81 \text{ kN} \quad \swarrow \Leftarrow$$

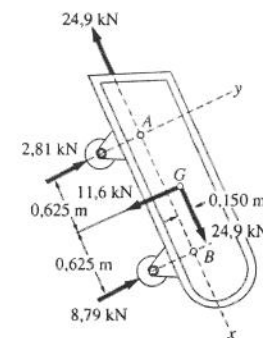
O valor de T é determinado pela

$$\sum F_x = 0:$$

$$+ 24,9 \text{ kN} - T = 0$$

$$T = +24,9 \text{ kN}$$

$$T = 24,9 \text{ kN} \quad \swarrow \Leftarrow$$



Os valores calculados das reações estão indicados no esboço ao lado.

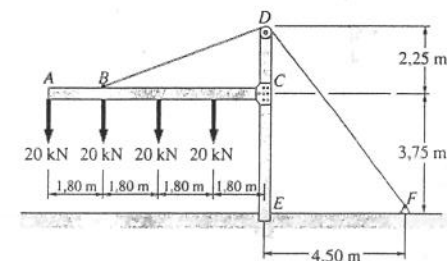
Verificação. Os cálculos são verificados por meio da equação

$$\sum F_y = +2,81 \text{ kN} + 8,79 \text{ kN} - 11,6 \text{ kN} = 0$$

A verificação também poderia ser obtida pelo cálculo do momento em relação a qualquer ponto, exceto A ou B.

Problema Resolvido 4.4

A estrutura da figura suporta parte do telhado de um pequeno edifício. Sabendo que a tração no cabo é de 150 kN, determine a reação no extremo fixo E.



Solução. Um diagrama de corpo livre da estrutura e do cabo BDF é desenhado. A reação no extremo fixo E é representada pelas componentes E_x e E_y e pelo binário de momento M_E . As outras forças que agem no corpo livre são as quatro cargas de 20 kN e a força de 150 kN aplicada na extremidade F do cabo.

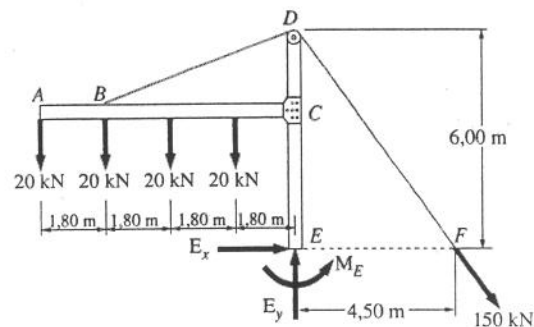
Equações de Equilíbrio. Com

$$DF = \sqrt{(4,50 \text{ m})^2 + (6,00 \text{ m})^2} = 7,50 \text{ m, temos:}$$

$$\begin{aligned} \pm \rightarrow \Sigma F_x = 0 \quad E_x + \frac{4,50}{7,50} (150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_x &= -90,0 \text{ kN} \quad E_x = 90,0 \text{ kN} \leftarrow \end{aligned}$$

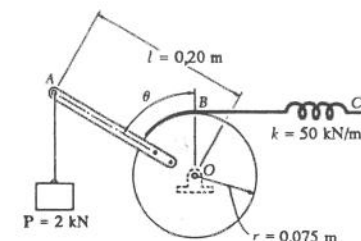
$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6,00}{7,50} (150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_y &= +200 \text{ kN} \quad E_y = 200 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \curvearrowright \Sigma M_E = 0: \quad (20 \text{ kN})(7,20 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5,40 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(3,60 \text{ m}) + \\ + (20 \text{ kN})(1,80 \text{ m}) - \frac{6,00}{7,50} (150 \text{ kN})(4,50 \text{ m}) + M_E &= 0 \\ M_E &= +180 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_E = 180 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \end{aligned}$$



Problema Resolvido 4.5

Um peso de 2 kN está preso à alavanca AO. A constante da mola BC é $k = 50 \text{ kN/m}$, e a mola não está esticada quando $\theta = 0$. Determine a posição de equilíbrio.



Solução. Força exercida pela mola. Seja s a alongação da mola. Notando que $s = r\theta$, escrevemos $F = ks = kr\theta$

Equação de Equilíbrio. Somando os momentos de P e F em relação a θ ,

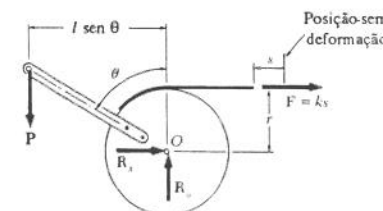
$$+ \curvearrowright \Sigma M_O = 0: \quad Pl \sin \theta - r(kr\theta) = 0 \quad \sin \theta = \frac{kr^2}{Pl} \theta$$

Substituindo os dados, resulta

$$\sin \theta = \frac{(50 \text{ kN/m})(0,075 \text{ m})^2}{(2 \text{ kN})(0,20 \text{ m})} \theta \quad \sin \theta = 0,703\theta$$

Resolvendo por tentativa, encontra-se

$$\theta = 0 \quad \theta = 80,3^\circ \leftarrow$$



Problemas

4.1 Uma empilhadeira de 2 500 kg é utilizada para levantar uma caixa de 1 200 kg. Determine a reação em cada uma das rodas: (a) dianteiras A e (b) traseiras B.

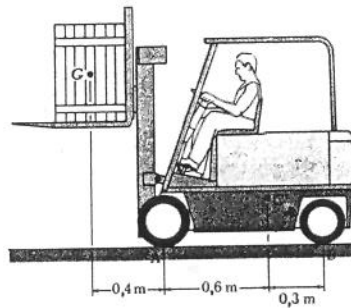


Figura P4.1

4.2 Um carrinho de mão é utilizado para transportar um cilindro de ar comprimido. Sabendo que o peso total do carrinho e do cilindro é de 900 N, determine: (a) a força vertical P que deve ser aplicada ao braço do carrinho para manter o sistema na posição ilustrada e (b) a reação correspondente em cada uma das duas rodas.

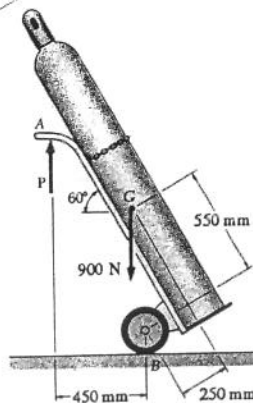
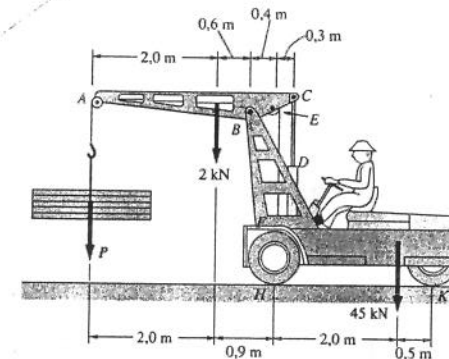


Figura P4.2

4.3 Uma carga de madeira de peso $P = 20$ kN está sendo erguida por um guindaste. O peso da lança ABC e o peso combinado do veículo e do motorista estão indicados na figura. Determine a reação em cada uma das duas rodas: (a) dianteiras H e (b) traseiras K.

4.4 Uma carga de madeira de peso $P = 20$ kN está sendo erguida por um guindaste. Sabendo que a tração é de 20 kN em todas as partes do cabo AEF e que o peso da lança ABC é de 2 kN, determine: (a) a tração na haste CD e (b) a reação no pino B.



Figuras P4.3 e P4.4

4.5 Um guindaste montado em um caminhão é utilizado para erguer um compressor de 3 000 N. Os pesos da lança AB e do caminhão estão indicados, e o ângulo que a lança forma com a horizontal é $\alpha = 45^\circ$. Determine a reação em cada uma das rodas: (a) traseiras C e (b) dianteiras D.

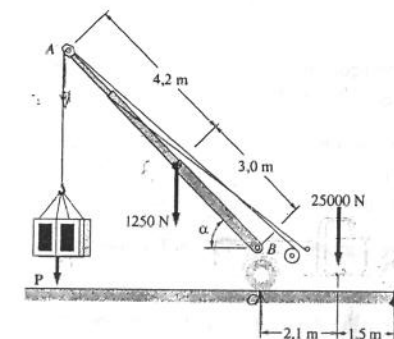


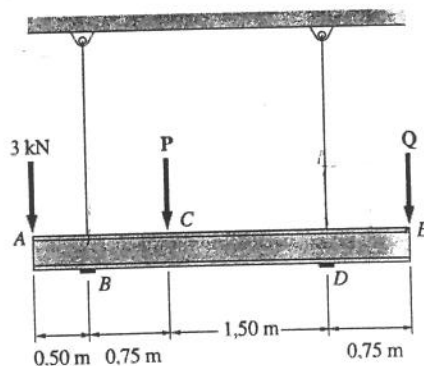
Figura P4.5

4.6 Para o guindaste do Prob. 4.5, determine o menor valor possível de α para que o caminhão não tombe quando a carga de 15 kN for levantada.

4.7 Para a viga do Prob. Resolvido 4.2, determine o intervalo de valores de Q para os quais a viga estará segura, sabendo que o maior valor permitido para cada reação é de 150 kN e que a reação em A deve apontar para cima.

4.8 Três cargas são aplicadas a uma viga leve suspensa por cabos presos em B e D . Desprezando o peso da viga, determine o intervalo de valores de Q para os quais nenhum dos dois cabos fica frouxo quando $P = 0$.

4.9 Três cargas são aplicadas a uma viga leve que está suspensa por cabos presos em B e D . Sabendo que a força de tração máxima permitida em cada cabo é 4 kN, determine o intervalo de valores de Q para os quais o carregamento é seguro, com $P = 0$. Despreze o peso da viga.



Figuras P4.8 e P4.9

4.10 Nas condições do Prob. 4.9, determine o intervalo de valores de Q para os quais o carregamento é seguro, com $P = 1$ kN.

4.11 Determine a maior carga que pode ser erguida pelo guindaste do Prob. 4.3 sem que ele tombe, sabendo que a maior força que pode ser exercida pelo cilindro hidráulico D é 96 kN e que a maior tração permitida no cabo AEF é 40 kN.

4.12 Em um suporte em forma de T é aplicada uma carga de 200 N. Determine as reações em A e C .

4.13 Duas hastas AB e DE estão ligadas por um perfil, como ilustrado. Sabendo que a tração na haste AB é de 750 N determine: (a) a tração na haste DE e (b) a reação em C .

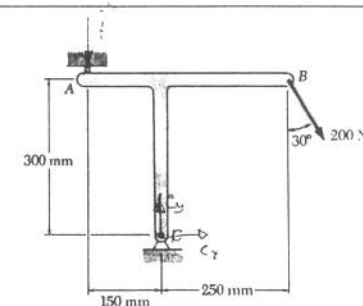
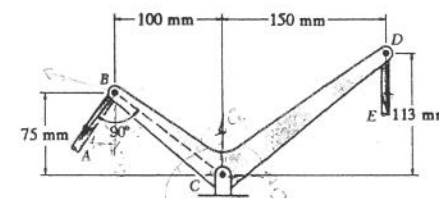


Figura P4.12

4.14 Duas hastas AB e DE estão ligadas por um perfil, como ilustrado. Determine a maior força que pode ser aplicada pela haste AB no perfil se o maior valor permitido para a reação em C é de 2 000 N.



Figuras P4.13 e P4.14

4.15 A alavanca AB está articulada em C e presa a um cabo de controle em A . Se a alavanca está sujeita a uma força horizontal de 400 N em B , determine: (a) a força de tração no cabo e (b) a reação em C .

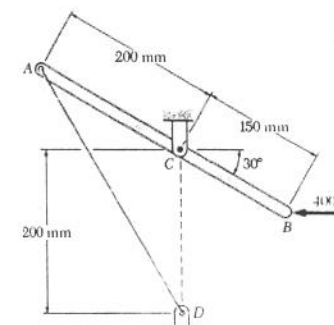


Figura P4.15

4.16 Uma treliça pode ser apoiada das três maneiras ilustradas. Determine as reações nos apoios, em cada caso.

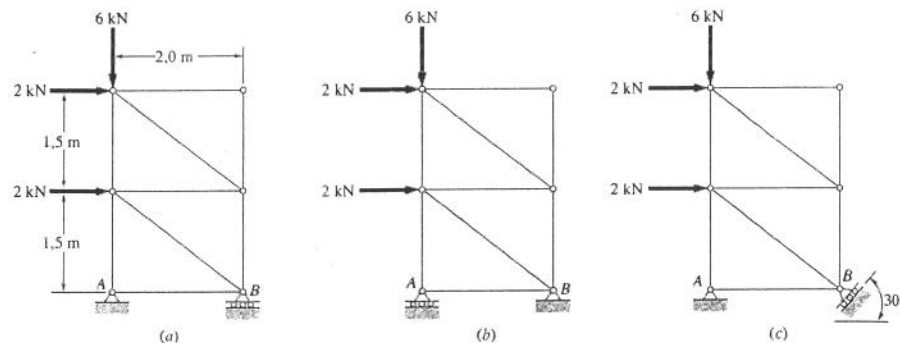


Figura P4.16

4.17 Determine as reações em A e B quando: (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 90^\circ$ e (c) $\alpha = 30^\circ$.

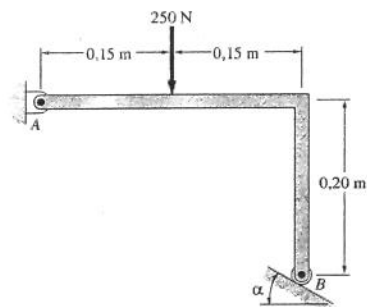


Figura P4.17

4.18 Resolva o Prob. 4.17 supondo que a força de 250 N foi substituída por um binário de momento $37,5 \text{ N} \cdot \text{m}$, de sentido horário.

4.19 Sabendo que a tração em todos os pontos da correia é 300 N, determine as reações nos apoios A e B, quando: (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 90^\circ$ e (c) $\alpha = 30^\circ$.

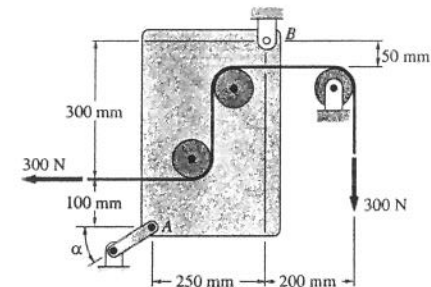


Figura P4.19

4.20 Uma barra leve AD está suspensa por um cabo BE e suporta um bloco de 20 kg preso em C. As extremidades A e D da barra estão em contato, sem atrito, com as paredes verticais. Determine a força de tração no cabo BE e as reações em A e D.

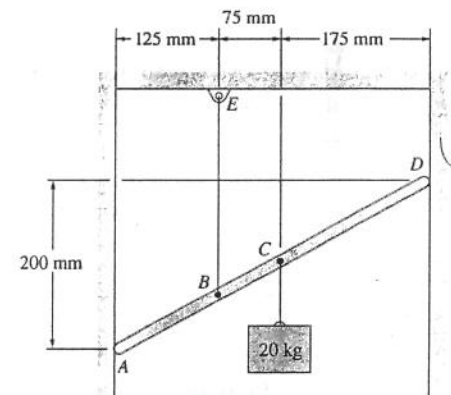


Figura P4.20

4.21 Uma barra leve tem um bloco de 15 kg pendurado em seu ponto médio C. Roletes em A e B estão apoiados em superfícies sem atrito, e um cabo horizontal AD está preso em A. Determine a força de tração no cabo AD e as reações em A e B.

4.22 Uma haste leve AD está apoiada, sem atrito, em A, B e C. Uma força vertical de 600 N ($\alpha = 0$) é aplicada em D. Determine as reações em A, B e C.

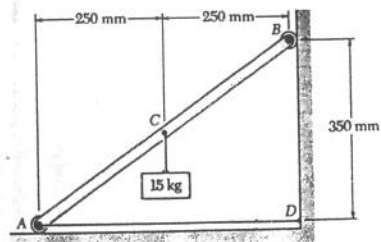


Figura P4.21

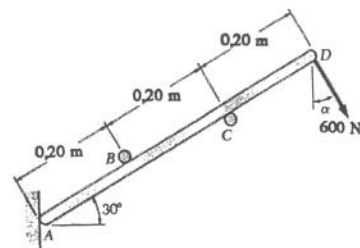
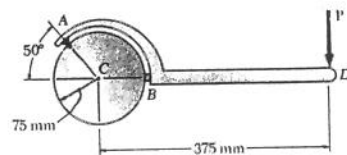


Figura P4.22

4.23 Resolva o Prob. 4.22 supondo que a força de 600 N está aplicada normalmente à haste ($\alpha = 30^\circ$).

4.24 Uma chave é utilizada para girar um eixo. Um pino ajusta-se no furo A, e uma superfície plana e sem atrito apoia-se no ponto B do eixo. Se uma força P de 250 N de intensidade for aplicada ao ponto D da chave, determine: (a) a reação em B e (b) a componente da reação em A na direção perpendicular a AC.

4.25 Com referência ao Prob. 4.24, se o momento em relação a C da força aplicada ao ponto A do eixo for de $75 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine: (a) a força P que deve ser aplicada no ponto D da chave e (b) o valor correspondente da força aplicada ao ponto B da chave.



Figuras P4.24 e P4.25

4.26 Uma porta retangular de garagem tem a dimensão AC igual a 2,10 m. Ela é puxada pelo cabo AE preso ao ponto médio da borda superior da porta e está apoiada, sem atrito, por pares de roletes, um de cada lado da porta, nos pontos A e B. Os roletes A movem-se, sem atrito, em uma guia horizontal, enquanto os roletes B movem-se, sem atrito, em guias verticais. Se a porta for mantida na posição em que $BD = 1,05 \text{ m}$, determine: (a) a força de tração no cabo AE e (b) a reação em cada um dos quatro roletes.

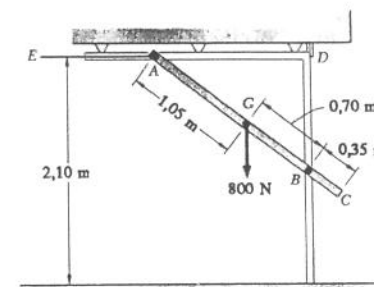


Figura P4.26

4.27 No Prob. 4.26, determine a distância BD para a qual a tração no cabo AE é igual a 4 500 N.

4.28 Na figura, a polia é utilizada para manter uma dada tração na correia de transmissão CDE. A base triangular contém uma mola helicoidal que aplica um binário de momento M no braço AB, que, por sua vez, empurra a polia B, de 60 mm, contra a correia. Sabendo que na posição ilustrada a força de tração na correia é $T = 300 \text{ N}$, determine: (a) o momento M do binário aplicado ao braço AB e (b) as componentes horizontal e vertical da força aplicada em A no braço AB.

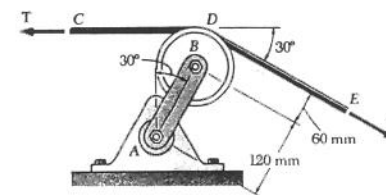


Figura P4.28

4.29 Um poste de 5,40 m que pesa 1 600 N sustenta as extremidades de dois fios. Os fios formam com a horizontal os ângulos ilustrados e estão submetidos a forças de tração $T_1 = 600 \text{ N}$ e $T_2 = 375 \text{ N}$. Determine a reação em A.

4.30 Para o poste do Prob. 4.29, determine o intervalo de valores de T_2 sabendo que o módulo do momento do binário em A não deve exceder $1 350 \text{ N} \cdot \text{m}$ quando $T_1 = 500 \text{ N}$.

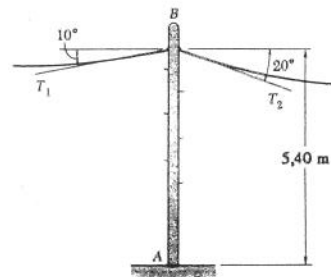


Figura P4.29

4.31 Para a estrutura do Prob. Resolvido 4.4, determine o intervalo de valores possíveis para a força de tração no cabo BDF sabendo que o módulo do momento do binário no extremo fixo E não deve exceder $100 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

4.32 Na haste AD estão aplicadas uma força vertical P no extremo A e duas forças horizontais de mesmo módulo e sentido opostos Q , nos pontos B e C . Desprezando o peso da haste, obtenha a expressão de θ em termos de P e Q , no equilíbrio.

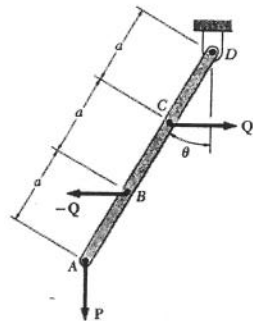


Figura P4.32

4.33 Uma barra uniforme AB , de comprimento l e peso P está suspensa por dois cabos AC e BC de mesmo comprimento. Determine o ângulo θ correspondente à posição de equilíbrio quando um binário de momento M é aplicado à barra.

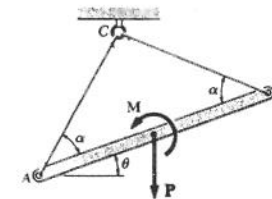


Figura P4.33

4.34 e 4.35 Uma carga vertical P é aplicada à extremidade B da barra BC . (a) Desprezando o peso da barra, expresse o ângulo θ correspondente à posição de equilíbrio em termos de P e do contrapeso W . (b) Determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio para $P = 2W$.

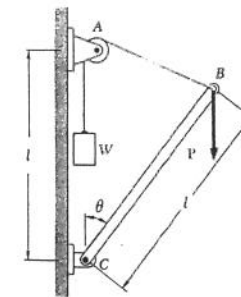


Figura P4.34

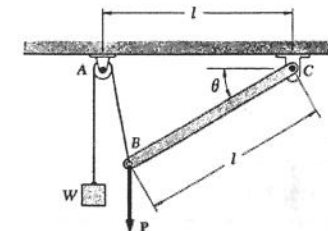


Figura P4.35

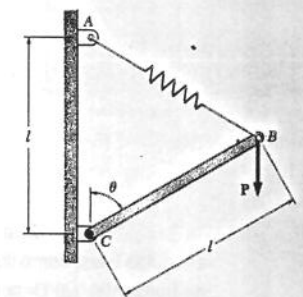


Figura P4.36

4.37 Uma carga vertical P é aplicada à extremidade B da barra BC . A constante da mola é k , e a mola não está esticada quando $\theta = 0$. (a) Desprezando o peso da barra, expresse o valor do ângulo θ , na posição de equilíbrio, em função de P , k e l . (b) Determine o valor de θ na posição de equilíbrio sabendo que $P = 2kl$.

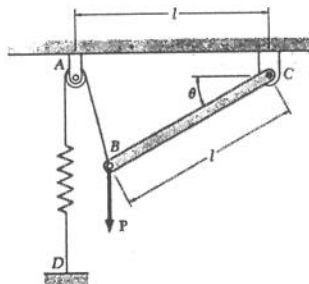


Figura P4.37

4.38 Um mangote de peso P move-se ao longo de um eixo vertical, sem atrito. A constante da mola é k , e a mola não está esticada quando $y = 0$. (a) Deduza uma equação envolvendo y , P , a e k que deve ser satisfeita quando o mangote está em equilíbrio. (b) Determine o valor de k , sabendo que $P = 60 \text{ N}$, $a = 400 \text{ mm}$ e que o mangote está em equilíbrio quando $y = 300 \text{ mm}$.

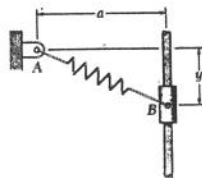


Figura P4.38

4.39 Uma barra delgada AB, de peso P , está presa a dois blocos A e B que se movem em guias lisas, como ilustrado. A constante da mola é k , e a mola não está esticada quando AB está na horizontal. (a) Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação para θ , P , l e k que deve ser satisfeita quando a barra está em equilíbrio. (b) Determine o valor de k sabendo que $P = 30 \text{ N}$, $l = 0,5 \text{ m}$ e que a barra está em equilíbrio quando $\theta = 30^\circ$.

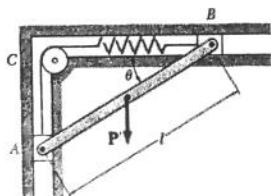


Figura P4.39

4.40 Uma pequena treliça está apoiada de oito maneiras diferentes, como ilustrado na figura. Todas as conexões consistem em articulações, roletes e hastes curtas, sem atrito. Em cada caso, determine: (a) se a treliça está completa, parcial ou imprópriamente vinculada, (b) se as reações são estaticamente determinadas ou indeterminadas e (c) se o equilíbrio da treliça é mantido na posição ilustrada. Sempre que possível, calcule as reações supondo que o módulo de P é 50 kN .

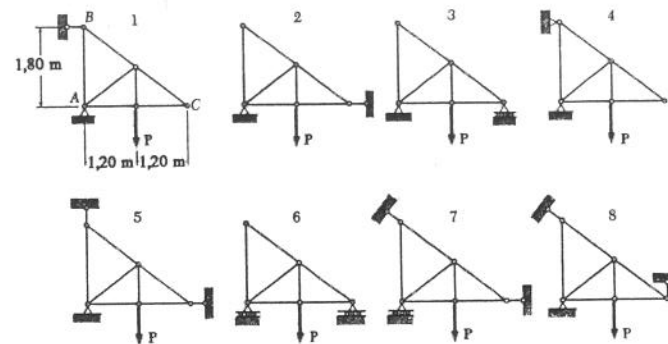


Figura P4.40

4.41 Nove placas retangulares idênticas, de $600 \text{ mm} \times 900 \text{ mm}$, de massa $m = 50 \text{ kg}$, são mantidas em um plano vertical, como ilustrado. Todos os vínculos consistem em articulações, roletes e hastes curtas, sem atrito. Em cada caso, responda às perguntas do Prob. 4.40 e, sempre que possível, calcule as reações.

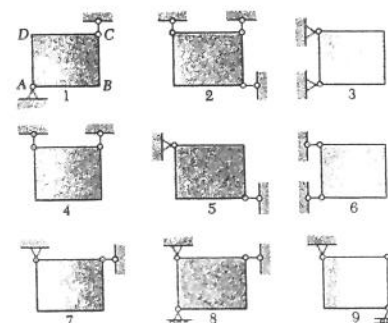


Figura P4.41

4.6. Equilíbrio de um Corpo Submetido a Duas Forças. Um caso particular de equilíbrio, de considerável interesse, é o de um corpo rígido submetido a duas forças. Mostraremos que, se um corpo submetido à ação de duas forças está em equilíbrio, as duas forças devem ter o mesmo módulo, a mesma linha de ação e sentidos opostos.

Consideremos uma placa em L submetida a duas forças F_1 e F_2 , que atuam em A e B, respectivamente (Fig. 4.8a). Se a placa está em equilíbrio, a soma dos momentos de F_1 e F_2 , em relação a qualquer eixo, deve ser zero. Inicialmente somamos os momentos em relação a A: como o momento de F_1 é obviamente nulo, o momento de F_2 também deve ser nulo, e, portanto, a linha de ação de F_2 deve passar pelo ponto A (Fig. 4.8b). Somando os momentos em relação a B, provamos analogamente que a linha de ação de F_1 deve passar pelo ponto B (Fig. 4.8c). Ambas as forças têm a mesma linha de ação (reta AB). Da equação $\sum F_x = 0$ ou $\sum F_y = 0$, vemos que elas devem ter também o mesmo módulo e sentidos opostos.

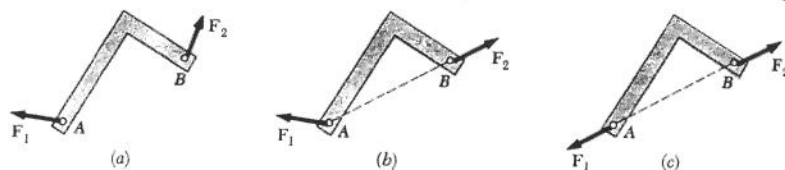


Figura 4.8

Se várias forças atuam em dois pontos A e B, as forças atuantes em A podem ser substituídas pela sua resultante F_1 , e as que atuam em B, por sua resultante F_2 . Então um corpo submetido a duas forças pode ser definido mais genericamente como um corpo rígido submetido a forças que atuam somente em dois pontos. As resultantes F_1 e F_2 devem ter, então, a mesma linha de ação, o mesmo módulo e sentidos opostos, se o corpo está em equilíbrio.

Veremos, em nosso estudo de estruturas, perfis e máquinas, que a identificação de um corpo sujeito a duas forças nos permite simplificar a solução de certos problemas.

4.7. Equilíbrio de um Corpo Submetido a Três Forças. Outro caso de equilíbrio de grande interesse é o de um corpo submetido a três forças ou, mais genericamente, um corpo rígido submetido a forças que atuam somente em três pontos. Consideremos um corpo rígido submetido a um sistema de forças que pode ser reduzido a três forças F_1 , F_2 e F_3 , que atuam em A, B e C, respectivamente (Fig. 4.9a). Mostraremos que, se o corpo está em equilíbrio, as linhas de ação das três forças devem ser concorrentes ou paralelas.

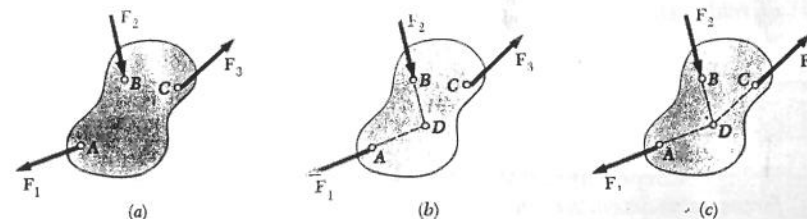


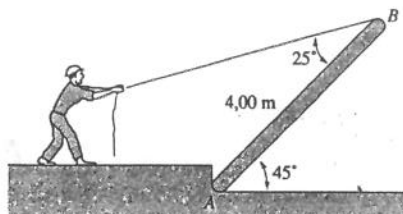
Figura 4.9

Como o corpo rígido está em equilíbrio, a soma dos momentos de F_1 , F_2 e F_3 em relação a qualquer eixo deve ser nula. Supondo que as linhas de ação de F_1 e F_2 se cortem, e sendo o ponto de interseção D, somamos os momentos em relação a D (Figura 4.9b); como os momentos de F_1 e F_2 em relação a D são nulos, o momento de F_3 em relação a D também deve ser nulo, e a linha de ação de F_3 deve passar pelo ponto D (Fig. 4.9c). As três linhas de ação são concorrentes. A única exceção ocorre quando nenhuma das linhas se cortam; as linhas de ação, então, são paralelas.

Embora os problemas referentes a corpos submetidos a três forças possam ser resolvidos pelos métodos gerais das Seções 4.3 e 4.5, a propriedade estabelecida pode ser utilizada para resolvê-los graficamente ou por simples relações trigonométricas ou geométricas.

Problema Resolvido 4.6

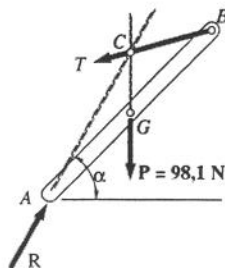
Um homem levanta uma viga de 10,0 kg e 4,00 m de comprimento puxando uma corda. Encontrar a força de tração T na corda e a reação em A.



Solução. A viga é um corpo submetido a três forças: seu peso P , a força T exercida pela corda e a reação R do solo em A . Observamos que

$$P = mg = (10,0 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 98,1 \text{ N}$$

Corpo Submetido a Três Forças. Como a viga é um corpo submetido a três forças, estas devem ser concorrentes. A resultante R , portanto, passará através do ponto de interseção C das linhas de ação do peso P e da força de tração T . Esse fato será usado para determinar o ângulo α que R forma com a horizontal.



Traçando a vertical BF por B e a horizontal CD por C , observamos que

$$AF = BF = (AB) \cos 45^\circ = (4,00 \text{ m}) \cos 45^\circ = 2,83 \text{ m}$$

$$CD = EF = AE = \frac{1}{2} (AF) = 1,41 \text{ m}$$

$$BD = (CD) \cot(45^\circ + 25^\circ) = (1,41 \text{ m}) \tan 20^\circ = 0,51 \text{ m}$$

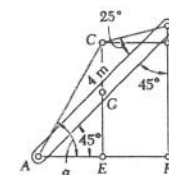
$$CE = DF = BF - BD = 2,83 \text{ m} - 0,51 \text{ m} = 2,32 \text{ m}$$

Escrevemos

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2,32 \text{ m}}{1,41 \text{ m}} = 1,64$$

$$\alpha = 58,6^\circ \leftarrow$$

Conhecemos agora a direção de todas as forças que atuam na viga.

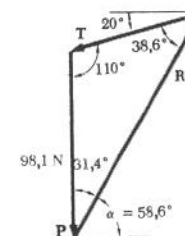


Triângulo de Forças. Um triângulo de forças é desenhado, e seus ângulos internos são determinados a partir das direções conhecidas das forças. Usando a lei dos senos, escrevemos

$$\frac{T}{\sin 31,4^\circ} = \frac{R}{\sin 110^\circ} = \frac{98,1 \text{ N}}{\sin 38,6^\circ}$$

$$T = 81,9 \text{ N} \leftarrow$$

$$R = 148 \text{ N} \angle 58,6^\circ \leftarrow$$



Problemas

4.42 A chave da figura é utilizada para girar um eixo. Um pino ajusta-se ao furo em A, enquanto um apoio plano, liso, encosta em B. Se uma força de 300 N, P , for aplicada em D, determine as reações em A e B.

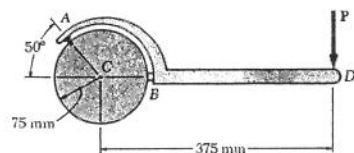


Figura P4.42

4.43 Um tanque cilíndrico de 250 kg tem 2 m de diâmetro e deve galgar uma plataforma de 0,5 m de altura. Um cabo é enrolado no tanque e puxado horizontalmente (ver figura). Sabendo que o canto A da plataforma é áspero, calcule a força de tração no cabo necessária para levantar o tanque e a reação em A.

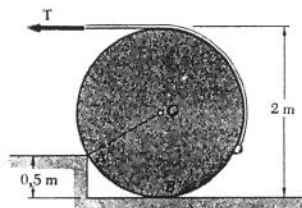


Figura P4.43

4.44 Com o método da Seção 4.7, resolva o Prob. 4.17b.

4.45 Com o método da Seção 4.7, resolva o Prob. 4.17c.

4.46 Uma carga P é aplicada à junta C da treliça da figura. Determine as reações em A e B com: (a) $\alpha = 0$ e (b) $\alpha = 45^\circ$.

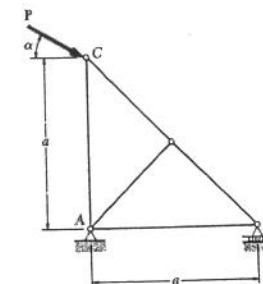


Figura P4.46

4.47 Uma extremidade da barra AB apóia-se no canto A e a outra está atada a cabo ao BD. Com uma carga de 150 N aplicada no centro C da barra, determine a reação em A e a força de tração no cabo.

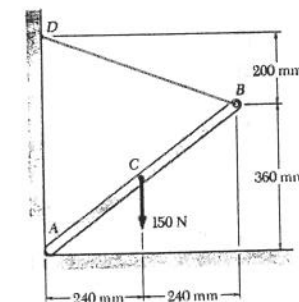


Figura P4.47

4.48 Uma viga de madeira com 3,60 m de comprimento pesa 400 N. Ela está articulada em A e presa a um cabo BC no ponto B. Determine a reação em A e a força de tração no cabo.

4.49 Com o método da Seção 4.7, resolva o Prob. 4.13.

4.50 Com o método da Seção 4.7, resolva o Prob. 4.12.

4.51 Com o método da Seção 4.7, resolva o Prob. 4.15.

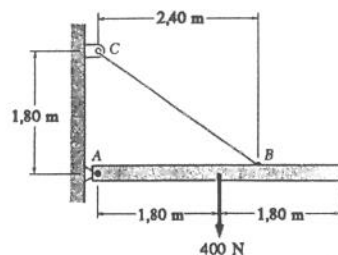


Figura P4.48

4.52 A barra AB está articulada em A e apóia-se, sem atrito, em C . Determine as reações em A e C quando uma força vertical de 170 N é aplicada em B .

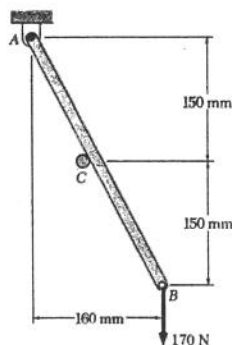


Figura P4.52

4.53 Resolva o Prob. 4.52 supondo que a força de 170 N aplicada em B é horizontal e aponta para a esquerda.

4.54 A peça ACB , em forma de L , está articulada em C e presa a um cabo inextensível em A e em B . O cabo passa por uma roldana lisa em D . Pode-se supor que a força de tração é a mesma nas porções AD e BD do cabo. Sabendo que os módulos das forças aplicadas em A e B são, respectivamente, $P = 150$ N e $Q = 0$, determine: (a) a força de tração no cabo e (b) a reação em C .

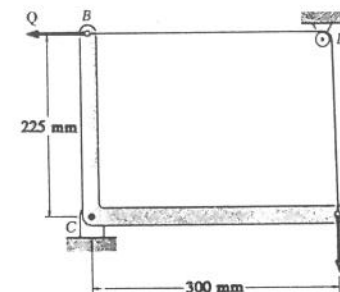


Figura P4.54

4.55 Com referência ao Prob. 4.54, (a) expresse a tração T no cabo em termo das intensidades P e Q das forças aplicadas em A e B e (b) tomando $P = 150$ N, determine o maior valor de Q compatível com o equilíbrio.

4.56 A barra uniforme AB está presa em um plano vertical. Suas extremidades estão presas a roletes que se apóiam em superfícies lisas. Determine a relação entre os ângulos θ e α quando a barra está em equilíbrio.

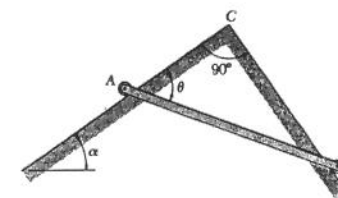


Figura P4.56

4.57 Uma barra delgada de comprimento L está apoiada em C e na parede vertical. Ela suporta uma carga P em sua extremidade A . Desprezando o atrito e o peso da barra, determine o ângulo θ correspondente ao equilíbrio.

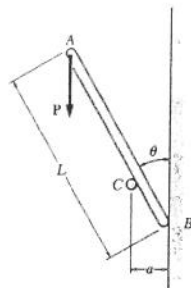


Figura P4.57

4.58 Um anel delgado de 2 kg de massa e raio $r = 140$ mm é mantido apoiado a uma parede lisa por um barbante AB de 125 mm. Determine (a) a distância d , (b) a força de tração no barbante e (c) a reação em C.

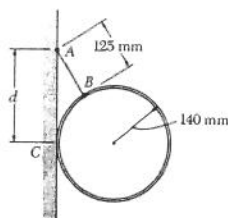
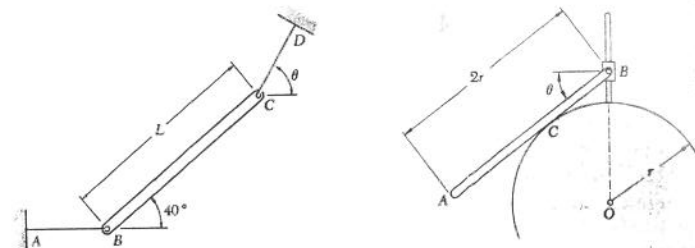


Figura P4.58

4.59 Uma haste delgada BC de comprimento e peso P está presa a dois cabos, como se vê na figura. Sabendo que o cabo AB está na horizontal, determine: (a) o ângulo θ que o cabo CD forma com a horizontal e (b) a força de tração em cada cabo.

*4.60 Uma haste delgada de comprimento $2R$ e peso P está presa a um cursor em B e apoiada em um cilindro de raio r . Sabendo que o cursor pode se deslocar livremente ao longo de sua guia vertical, determine o valor de θ correspondente ao equilíbrio. Despreze o atrito.



Figuras P4.59 e P4.60

4.61 Uma haste uniforme AB, de comprimento $3R$ e peso P , apóia-se no interior de uma calota hemisférica de raio R , como ilustrado. Desprezando o atrito, determine o ângulo θ correspondente ao equilíbrio.

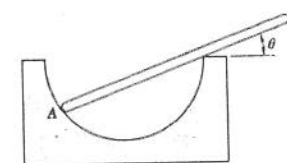


Figura P4.61

Equilíbrio em Três Dimensões

4.8. Reações nos Vínculos de uma Estrutura Tridimensional. As reações sobre uma estrutura tridimensional vão desde uma única força de direção conhecida, exercida por uma superfície lisa, a um sistema força-binário, exercido por um engastamento. Conseqüentemente, o número de incógnitas associadas com a reação em um vínculo pode variar de um a seis nos problemas que envolvem o equilíbrio de uma estrutura tridimensional. Vários tipos de vínculos e as correspondentes reações estão ilustrados na Fig. 4.10. Uma maneira simples de determinar o tipo de reação correspondente a um dado vínculo e o número de incógnitas envolvidas é verificar quais dos seis

movimentos fundamentais (translação nas direções x , y e z , rotação em torno dos eixos x , y e z) são permitidos e quais os impedidos.

Apoios esféricos, superfícies lisas e cabos, por exemplo, impedem a translação em uma única direção e exercem, portanto, uma única força de linha de ação conhecida; cada um envolve uma única incógnita, a intensidade da reação. Roletes sobre superfícies rugosas e rodas sobre trilhos impedem a translação em duas direções; as reações correspondentes são constituídas pelas duas componentes da força desconhecida. Superfícies rugosas ou ásperas em contato direto e juntas esféricas impedem a translação nas três direções; esses vínculos envolvem as três componentes da força desconhecida.

Alguns vínculos podem impedir tanto rotação como translação; as reações correspondentes incluem, por isso, tanto binários como forças. A reação em um engastamento, por exemplo, que impede qualquer movimento (tanto rotação como translação), consiste de três forças incógnitas e três binários incógnitos. Uma junta universal, projetada para permitir rotação em relação a dois eixos, exercerá uma reação constituída de três componentes de força incógnitas e um binário incógnito.

Outros vínculos são projetados basicamente para impedir translação; contudo, seu projeto é tal que impedem também algumas rotações. As reações correspondentes consistem essencialmente em componentes de forças, mas também *podem* incluir binários. Um grupo de vínculos desse tipo inclui dobradiças e mancais projetados para suportar somente cargas radiais (por exemplo, mancais de deslizamentos, mancais de rolamento). As reações correspondentes são constituídas de duas componentes de força, embora possam incluir também dois binários. Outro grupo inclui pino e suporte, dobradiça e mancais, projetados para suportar tanto empuxo axial quanto carga radial (por exemplo, rolamentos de esferas). As reações correspondentes são constituídas de três componentes de força, embora possam incluir, também, dois binários. Contudo, esses vínculos não exercerão qualquer binário apreciável sob condições normais de uso. Por conseguinte, *somente* as componentes de força devem ser incluídas em sua análise, *a menos* que se ache que os binários são necessários para manter o equilíbrio do corpo rígido ou a não ser que o apoio tenha sido projetado especificamente para exercer um binário (ver Probs. 4.86 a 4.89).

4.9. Equilíbrio de um Corpo Rígido em Três Dimensões. Vimos na Seção 4.1 que, de maneira geral, são necessárias seis equações escalares para exprimir as condições de equilíbrio de um corpo rígido no caso tridimensional:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

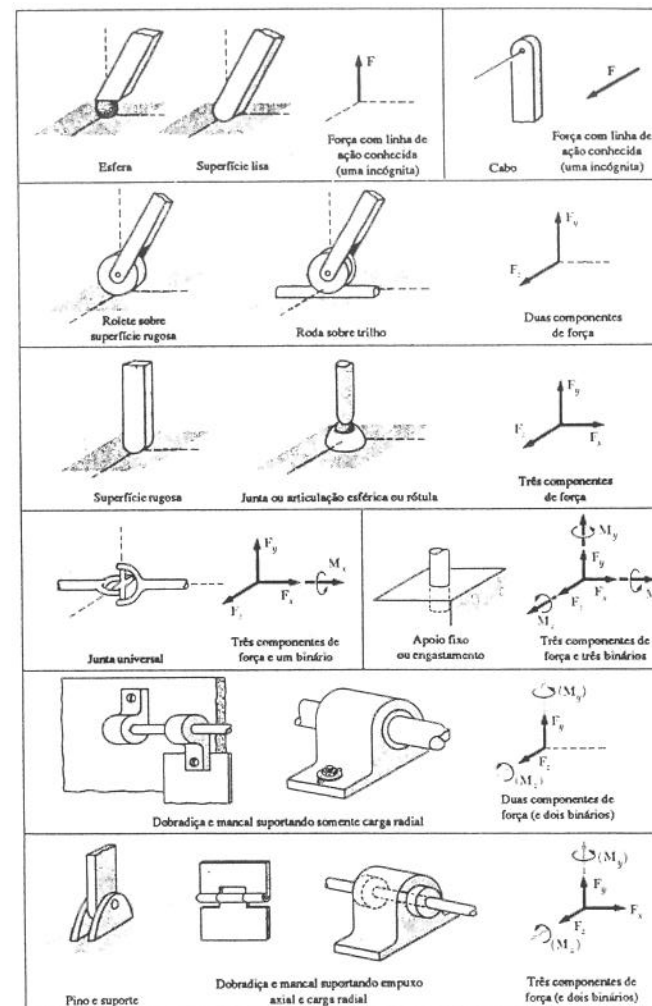


Figura 4.10 Reações nos vínculos.

Essas equações podem ser resolvidas para um máximo de *seis incógnitas*, que geralmente representarão as reações nos apoios ou conexões.

Na maioria dos problemas, as equações escalares (4.2) e (4.3) serão mais convenientemente obtidas se expressarmos, inicialmente, as condições de equilíbrio do corpo rígido considerado na forma vetorial. Escrevemos

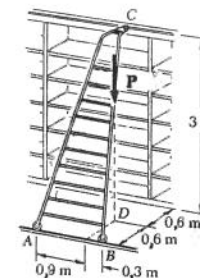
$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

e exprimimos as forças $\mathbf{F}$ e os vetores-posição $\mathbf{r}$ em função das componentes escalares e dos vetores unitários. A seguir calculamos todos os produtos vetoriais, ou diretamente, ou por meio de determinantes (ver Seção 3.8). Igualando os coeficientes dos vetores unitários a zero em cada uma das relações (4.1), obtemos as equações escalares desejadas.

Se as reações envolvem mais de seis incógnitas, existem mais incógnitas que equações, e algumas das reações são *estaticamente indeterminadas*, nesse caso diz-se que o corpo é *hiperestático*. Se as reações envolvem menos de seis incógnitas, existem mais equações que incógnitas, e algumas equações de equilíbrio não podem ser satisfeitas sob condições gerais de carregamento; o corpo rígido está *parcialmente vinculado*, ou seja, é *hipoestático*. Contudo, sob condições particulares de carregamento, correspondentes a um dado problema, as equações extras se reduzem muitas vezes a identidades triviais como $0 = 0$ e podem ser desprezadas. Embora somente vinculado parcialmente, o corpo rígido permanece em equilíbrio (ver Problemas Resolvidos 4.7 e 4.8). Mesmo com seis ou mais incógnitas, é possível que algumas equações de equilíbrio não sejam satisfeitas. Isto pode ocorrer quando os vínculos são tais que as reações são forças paralelas ou então interceptam a mesma reta; o corpo rígido, nesse caso, está *impropriamente vinculado*.

Problema Resolvido 4.7

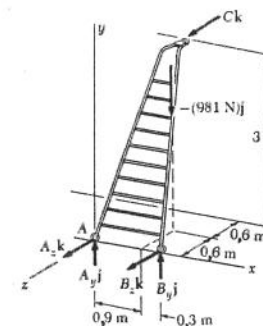
Uma escada de 20 kg, usada para alcançar prateleiras elevadas em um depósito, está apoiada por duas rodas flangeadas A e B, montadas sobre um trilho, e por uma roda não flangeada C, apoiada contra um trilho fixado à parede. Um homem de 80 kg sobe a escada e recosta-se para a direita. A linha de ação do peso $\mathbf{P}$ do homem e da escada combinados intercepta o piso em um ponto D. Determinar as componentes das reações em A, B e C.



Solução. Desenha-se um diagrama de corpo livre para a escada. As forças envolvidas são o peso combinado do homem e da escada,

$$\mathbf{P} = -mg\mathbf{j} = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(981 \text{ N})\mathbf{j}$$

e cinco componentes desconhecidas das reações: duas em cada roda flangeada e uma na roda não flangeada. A escada está, então, somente parcialmente vinculada; ela está livre para rolar ao longo dos trilhos. Contudo, já que a equação $\Sigma F_x = 0$ está satisfeita, a escada está em equilíbrio.*



* A escada poderia ainda girar ao redor do eixo AB. Entretanto, dos valores obtidos é fácil ver que $\Sigma M_x = 0$, não havendo, pois, rotação ao redor daquele eixo. (N. do R.T.)

Equações de Equilíbrio. Impomos que as forças que atuam sobre a escada formam um sistema equivalente a zero:

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad & A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k} - (981 \text{ N}) \mathbf{j} + C \mathbf{k} = 0 \\ & (A_y + B_y - 981 \text{ N}) \mathbf{j} + (A_z + B_z + C) \mathbf{k} = 0\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0: \quad & 1,2 \mathbf{i} \times (B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) + (0,9 \mathbf{i} - 0,6 \mathbf{k}) \times (-981 \mathbf{j}) \\ & + (0,6 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} - 1,2 \mathbf{k}) \times C \mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

Calculando os produtos vetoriais, temos*

$$\begin{aligned}1,2 B_y \mathbf{k} - 1,2 B_z \mathbf{j} - 8,8 \times 10^2 \mathbf{k} - 5,9 \times 10^2 \mathbf{i} - 0,6 C \mathbf{j} + 3 C \mathbf{i} &= 0 \\ (3C - 5,9 \times 10^2) \mathbf{i} - (1,2 B_z + 0,6 C) \mathbf{j} + (1,2 B_y - 8,8 \times 10^2) \mathbf{k} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Fazendo os coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ iguais a zero na Eq. (2), obtemos as três equações escalares seguintes, que expressam que a soma dos momentos em relação a cada eixo coordenado deve ser zero:

$$\begin{aligned}3C - 5,9 \times 10^2 &= 0 & C &= +2,0 \times 10^2 \text{ N} \\ 1,2 B_z + 0,6 C &= 0 & B_z &= -1,0 \times 10^2 \text{ N} \\ 1,2 B_y - 8,8 \times 10^2 &= 0 & B_y &= +7,3 \times 10^2 \text{ N}\end{aligned}$$

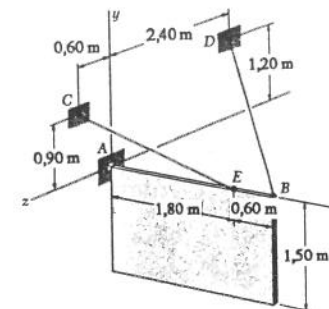
Fazendo os coeficientes de $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ iguais a zero na Eq. (1), obtemos duas equações escalares que expressam que a soma das componentes nas direções y e z são iguais a zero. Substituindo B_y , B_z e C pelos valores acima obtidos, escrevemos

$$\begin{aligned}A_y + B_y - 981 &= 0 & A_y + 7,3 \times 10^2 - 981 &= 0 & A_y &= +2,5 \times 10^2 \text{ N} \\ A_z + B_z + C &= 0 & A_z - 1,0 \times 10^2 + 2,0 \times 10^2 &= 0 & A_z &= -1,0 \times 10^2 \text{ N}\end{aligned}$$

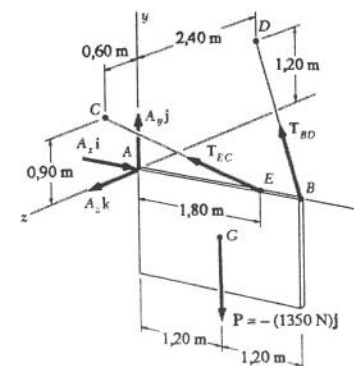
* Os momentos neste Problema Resolvido e nos Problemas Resolvidos 4.8 e 4.9 poderiam, também, ter sido expressos na forma de um determinante (ver Problema Resolvido 3.10).

Problema Resolvido 4.8

Um cartaz de $1,50 \text{ m} \times 2,40 \text{ m}$, de densidade uniforme, pesa $1\,350 \text{ N}$ e está vinculado por uma junta esférica em A e por dois cabos. Determine a força de tração em cada cabo e a reação em A.



Solução. Desenha-se um diagrama de corpo livre do cartaz. No corpo livre estão aplicados seu peso $\mathbf{P} = -(1350 \text{ N}) \mathbf{j}$ e as reações em A, B e E. A reação em A é uma força de direção desconhecida, representada por três componentes a determinar. Como as direções das forças devidas aos cabos são conhecidas, cada uma delas introduz apenas uma incógnita. Há, pois, duas dessas incógnitas T_{BD} e T_{EC} . Como há apenas cinco incógnitas, o cartaz está apenas parcialmente vinculado. Ele pode girar livremente em torno do eixo x , mas está em equilíbrio com o carregamento dado, já que a equação $\Sigma M_x = 0$ está satisfeita.



As componentes das forças T_{BD} e T_{EC} podem ser expressas em termos dos módulos T_{BD} e T_{EC} como se segue:

$$\vec{BD} = -(2,40 \text{ m})\mathbf{i} + (1,20 \text{ m})\mathbf{j} - (2,40 \text{ m})\mathbf{k} \quad BD = 3,60 \text{ m}$$

$$\vec{EC} = -(1,80 \text{ m})\mathbf{i} + (0,90 \text{ m})\mathbf{j} + (0,60 \text{ m})\mathbf{k} \quad EC = 2,10 \text{ m}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{\vec{BD}}{BD} \right) = T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right)^*$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \left(\frac{\vec{EC}}{EC} \right) = T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right)^*$$

Equações de Equilíbrio. Impomos que as forças aplicadas ao cartaz sejam equivalentes a zero:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (1\,350 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x - \frac{2}{3}T_{BD} - \frac{6}{7}T_{EC})\mathbf{i} + (A_y + \frac{1}{3}T_{BD} + \frac{3}{7}T_{EC} - 1\,350 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{3}T_{BD} + \frac{2}{7}T_{EC})\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$(2,40 \text{ m})\mathbf{i} \times T_{BD} \left(-\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) + (1,80 \text{ m})\mathbf{i} \times T_{EC} \left(-\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{2}{7}\mathbf{k} \right) + (1,20 \text{ m})\mathbf{j} \times (-1\,350 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(0,800T_{BD} + 0,771T_{EC} - 1\,620)\mathbf{k} + (1,60T_{BD} - 0,514T_{EC})\mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

Igualando a zero os coeficientes de $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na Eq. (2), obtemos equações escalares que determinam T_{BD} e T_{EC} :

$$T_{BD} = 506 \text{ N} \quad T_{EC} = 1,58 \times 10^3 \text{ N} \leftarrow$$

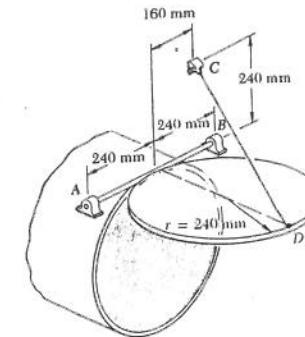
* O autor representou as frações sem maiores preocupações com a precisão envolvida nas medidas diretas. É importante, na sua utilização, não perder de vista a limitação, em algarismos significativos, que têm numeradores e denominadores. Por exemplo: $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2,40 \text{ m}}{3,60 \text{ m}} \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1,20 \text{ m}}{3,60 \text{ m}}$ (N. do R. T.)

Igualando a zero os coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na Eq. (1), obtemos três equações que determinam as componentes de $\mathbf{A}$. Obtemos:

$$\mathbf{A} = + (1,69 \times 10^3 \text{ N})\mathbf{i} + (504 \text{ N})\mathbf{j} - (114 \text{ N})\mathbf{k} \leftarrow$$

Problema Resolvido 4.9

A tampa homogênea de um conduto de raio $r = 240 \text{ mm}$ e massa 30 kg é mantida na posição horizontal pelo cabo CD . Supondo que o mancal em B não exerça qualquer empuxo axial, determine a força de tração no cabo e as componentes das reações em A e B .



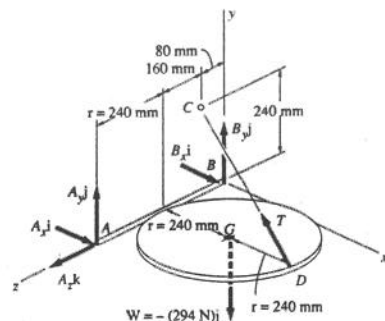
Solução. Um diagrama de corpo livre é traçado, mostrando-se os eixos coordenados. As forças que atuam sobre o corpo livre são o peso da tampa

$$\mathbf{P} = -mg\mathbf{j} = -(30 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(294 \text{ N})\mathbf{j}$$

e as reações que envolvem seis incógnitas, a saber: a intensidade da força $\mathbf{T}$ exercida pelo cabo, três componentes de força no mancal A e duas no B . As componentes de $\mathbf{T}$ são expressas em função do módulo incógnito T , decompondo-se o vetor $\vec{DC}$ em componentes cartesianas e escrevendo

$$\vec{DC} = -(480 \text{ mm})\mathbf{i} + (240 \text{ mm})\mathbf{j} - (160 \text{ mm})\mathbf{k} \quad DC = 560 \text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T \frac{\vec{DC}}{DC} = -\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k} *$$



Equações de Equilíbrio. Estabelecemos que as forças que atuam sobre a tampa do conduto formam um sistema equivalente a zero

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} + B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + \mathbf{T} - (294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(A_x + B_x - \frac{6}{7}T)\mathbf{i} + (A_y + B_y + \frac{3}{7}T - 294 \text{ N})\mathbf{j} + (A_z - \frac{2}{7}T)\mathbf{k} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_B = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0:$$

$$2r\mathbf{k} \times (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (2r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-\frac{6}{7}T\mathbf{i} + \frac{3}{7}T\mathbf{j} - \frac{2}{7}T\mathbf{k}) + (r\mathbf{i} + r\mathbf{k}) \times (-294 \text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$(-2A_y - \frac{3}{7}T + 294 \text{ N})r\mathbf{i} + (2A_x - \frac{2}{7}T)r\mathbf{j} + (\frac{6}{7}T - 294 \text{ N})r\mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Fazendo os coeficientes dos vetores unitários iguais a zero na Eq. (2), escrevemos três equações escalares, que conduzem a

$$A_x = +49,0 \text{ N} \quad A_y = +73,5 \text{ N} \quad T = 343 \text{ N} \leftarrow$$

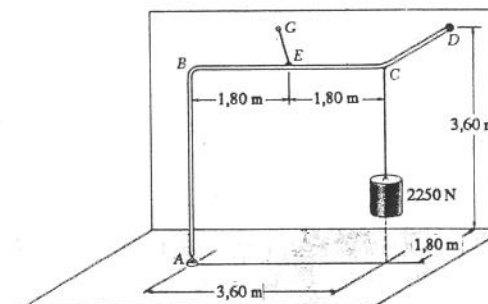
* Vide N. do R. T. à página 262.

Igualando a zero os coeficientes dos vetores unitários na Eq. (1), obtemos mais três equações escalares. Depois, substituindo os valores de T , A_x e A_y nessas equações, obtemos:

$$A_z = +98,0 \text{ N} \quad B_x = +245 \text{ N} \quad B_y = +73,5 \text{ N} \leftarrow$$

Problema Resolvido 4.10

Uma carga de 2 250 N está pendurada em um canto C de um cano rígido ABCD, que foi dobrado conforme ilustrado. O cano está vinculado por duas juntas esféricas A e D, fixadas respectivamente ao solo e à parede vertical, e por um cabo ligado ao ponto médio E da porção BC do tubo e ao ponto G na parede. Determinar: (a) onde G deve estar situado para que a força de tração no cabo seja mínima, (b) o valor mínimo da força de tração correspondente.



Solução. O diagrama de corpo livre do cano inclui a carga $\mathbf{P} = -2 250 \text{ Nj}$, as reações em A e D e a força $\mathbf{T}$ exercida pelo cabo. Para eliminar as reações de A e D dos cálculos, exprimimos que a soma dos momentos das forças em relação a AD é zero. Denominado λ o vetor unitário segundo AD, escrevemos

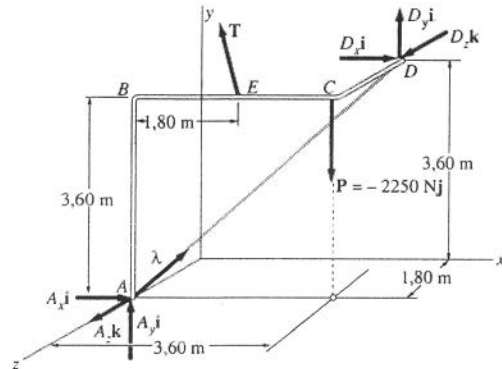
$$\Sigma M_{AD} = 0: \quad \lambda \cdot (\vec{AE} \times \mathbf{T}) + \lambda \cdot (\vec{AC} \times \mathbf{P}) = 0 \quad (1)$$

O segundo termo na Eq. (1) pode ser calculado como se segue:

$$\vec{AC} \times \mathbf{P} = (3,60\mathbf{i} + 3,60\mathbf{j}) \times (-2\,250\mathbf{j}) = -8,10 \times 10^3 \mathbf{k}$$

$$\lambda = \frac{\vec{AD}}{AD} = \frac{3,60\mathbf{i} + 3,60\mathbf{j} - 1,80\mathbf{k}}{5,40} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}^*$$

$$\lambda \cdot (\vec{AC} \times \mathbf{P}) = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \cdot (-8,10 \times 10^3 \mathbf{k}) = +2,70 \times 10^3$$



Substituindo o valor obtido na Eq. (1), escrevemos

$$\lambda \cdot (\vec{AE} \times \mathbf{T}) = -2,70 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (2)$$

Valor Mínimo da Força de Tração. Lembrando a propriedade comutativa para os produtos mistos, reescrevemos a Eq. (2) na forma

$$\mathbf{T} \cdot (\lambda \times \vec{AE}) = -2,70 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (3)$$

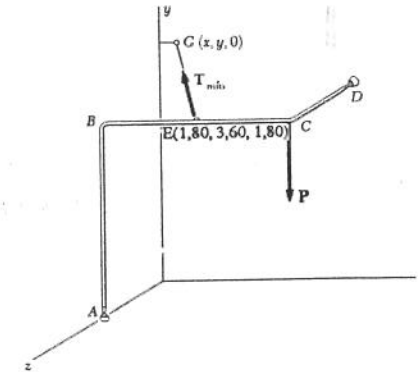
que mostra que a projeção de $\mathbf{T}$ sobre o vetor $\lambda \times \vec{AE}$ é uma constante. Segue-se que $\mathbf{T}$ é mínimo, quando for paralelo ao vetor

$$\lambda \times \vec{AE} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \times (1,80\mathbf{m}\mathbf{i} + 3,60\mathbf{m}\mathbf{j}) = 1,20\mathbf{m}\mathbf{i} - 0,60\mathbf{m}\mathbf{j} + 1,20\mathbf{m}\mathbf{k}$$

* Vide N. do R. T. à página 262.

Sendo o vetor unitário correspondente $\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$ escrevemos

$$\mathbf{T}_{\min} = T \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) \quad (4)$$



Substituindo $\mathbf{T}$ e $\lambda \times \vec{AE}$ na Eq. (3), encontramos $T = -1,50 \times 10^3$. Levando esse valor à Eq. (4), obtemos

$$\mathbf{T}_{\min} = -1,00 \times 10^3 \mathbf{i} + 500 \mathbf{j} - 1,00 \times 10^3 \mathbf{k} \quad \mathbf{T}_{\min} = 1,50 \times 10^3 \text{ N} \leftarrow$$

Localização de G. Como o vetor $\vec{EG}$ e a força $\mathbf{T}_{\min}$ têm a mesma direção, suas componentes devem ser proporcionais. Denominando x , y e 0 as coordenadas de G , escrevemos

$$\frac{x - 1,80}{-1000} = \frac{y - 3,60}{+500} = \frac{0 - 1,80}{-1000} \quad x = 0 \quad y = 4,50 \text{ m} \leftarrow$$

Problemas

4.62 Uma folha de compensado de $1,20 \text{ m} \times 2,40 \text{ m}$ pesa 250 N e foi temporariamente encostada na coluna CD . Ela não escorrega por estar apoiada em pregos salientes fixos em tacos de madeira colocados em A e B . Desprezando o atrito, calcule as reações em A , B e C .

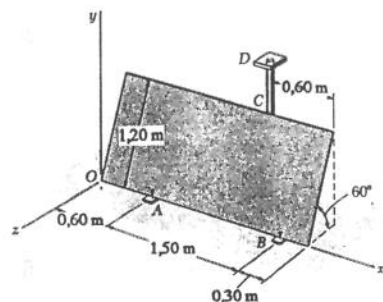


Figura P4.62

4.63 Duas correias de transmissão passam sobre polias montadas em um eixo que se apóia em mancais *A* e *D*. As polias têm raios de 150 mm e 300 mm. Sabendo que o sistema está em repouso e que as forças de tração são de 75 N dos dois lados da correia *B* e de 135 N dos dois lados da correia *C*, determine as reações em *A* e *D*. Suponha que o mancal em *D* não exerça empuxo axial.

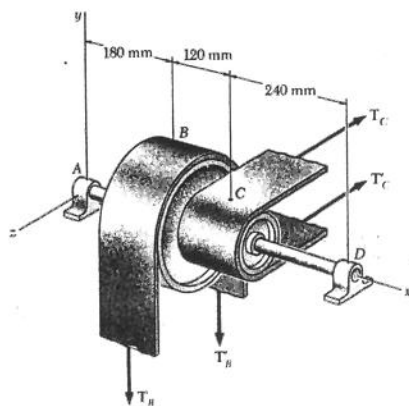


Figura P4.63

4.64 Resolva o Prob. 4.63 supondo que as polias giram com velocidade angular constante e que $T_E = 87$ N, $T_B = 69$ N e $T_C = T_D = 144$ N.

4.65 Um sarilho é utilizado para erguer uma carga de 750 N. Determine: (a) o módulo da força horizontal *P* que deve ser aplicada a *C* para manter o equilíbrio e (b) as reações em *A* e *B*, supondo que o mancal em *B* não exerça empuxo axial.

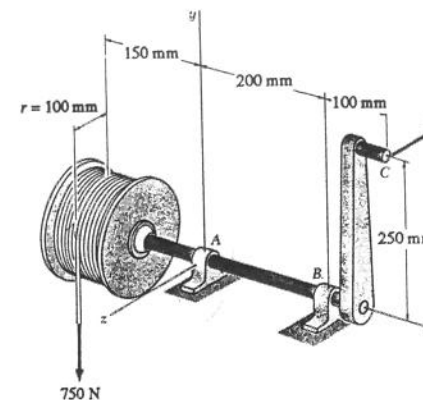


Figura P4.65

4.66 Uma alavanca de 250 mm é soldada ao eixo *BE*, no qual está presa uma polia de 300 mm de diâmetro. O eixo é suportado por mancais em *C* e *D*. Se uma carga de 450 N for aplicada em *A* quando a alavanca se encontrar na posição horizontal, determine: (a) a força de tração na corda e (b) as reações em *C* e *D*. Suponha que o mancal em *D* não exerça empuxo axial.

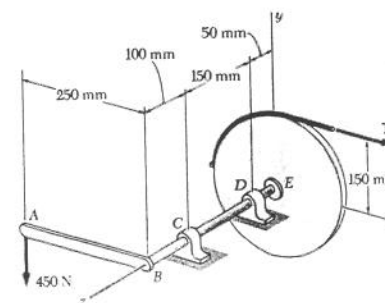


Figura P4.66

4.67 Resolva o Prob. 4.66 supondo que o eixo girou de 60° no sentido horário.

4.68 A placa de 20 kg da figura está suspensa por três fios. Determine a tração em cada fio.

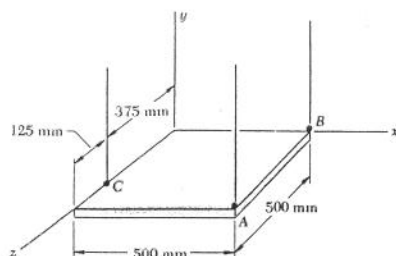


Figura P4.68

4.69 Na ilustração, a placa retangular pesa 300 N e está suspensa por três fios. Determine a tração em cada fio.

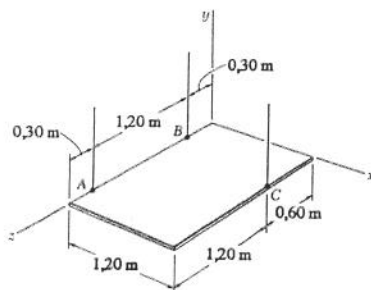


Figura P4.69

4.70 Uma carga P é aplicada à placa do Prob. 4.69. Determine o valor de P e o ponto onde deve ser colocada para que a tração seja de 250 N em cada fio.

4.71 Determine a massa e o ponto da placa do Prob. 4.68 onde deve ser colocado o bloco de menor massa para que as forças de tração nos três fios sejam iguais.

4.72 Do guindaste da figura pende um caixote de 2 000 kg. O guindaste tem uma junta esférica em A e está amarrado por dois cabos em D e E. Sabendo que o guindaste está no plano vertical xy ($\phi = 0$), determine: (a) a força de tração em cada cabo e (b) a reação em A.

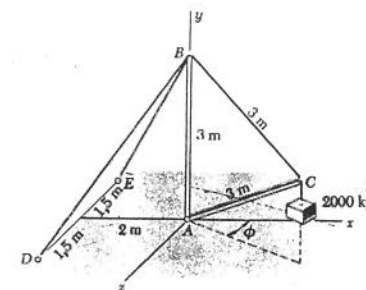


Figura P4.72

4.73 Resolva o Prob. 4.72 supondo que o guindaste está em um plano vertical que forma um ângulo $\phi = 20^\circ$ com o plano xy .

4.74 À lança AB de 3,60 m está aplicada a força de 4 250 N ilustrada. Determine: (a) a força de tração em cada cabo e (b) a reação na junta esférica em A .

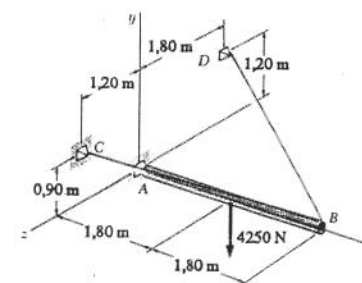


Figura P4.74

4.75 Resolva o Prob. 4.74 supondo que a carga de 4 250 N está aplicada no ponto *B*.

4.76 Uma caixa de 200 kg pende de um cabo que passa sobre uma polia B e está preso ao suporte H . A lança AB , de 100 kg, tem uma junta esférica em A e está presa por dois cabos DE e

- DF. O centro de gravidade da lança fica no ponto G. Determine: (a) a força de tração nos cabos DE e DF e (b) a reação em A.

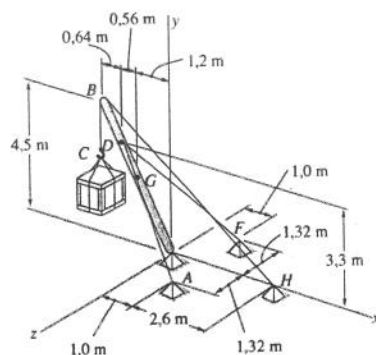


Figura P4.76

- 4.77 No Prob. 4.72 determine o ângulo ϕ para o qual a força de tração em BE é máxima se: (a) nenhum cabo fica frouxo, (b) os cabos BE e BD são substituídos por hastes que podem suportar tanto uma força de tração como uma de compressão.

- 4.78 Um alçapão que pesa 450 N está preso por dobradiças nos cantos A e B e mantido na posição desejada por uma haste CD articulada em C. Um pino, no extremo C da haste, pode ser encaixado em um dos furos existentes na lateral do alçapão. Com $\alpha = 45^\circ$, determine: (a) a intensidade da força exercida pela haste CD e (b) as reações nas dobradiças. Suponha que a dobradiça em B não exerça empuxo axial.

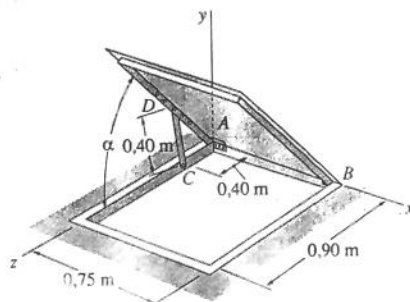


Figura P4.78

- 4.79 Resolva o Prob. 4.78 com $\alpha = 60^\circ$.

- 4.80 Um caixilho de 0,90 m x 1,50 m pesa 75 N e está preso por dobradiças em A e B. Na figura ele é mantido aberto por uma vara CD de 0,60 m. Supondo que a dobradiça em A não exerça empuxo axial, determine: (a) a intensidade da força exercida pela vara e (b) as reações em A e B.

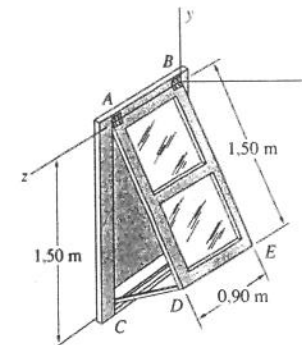


Figura P4.80

- 4.81 Uma folha de compensado de 1,20 m x 2,40 m é mantida temporariamente em pé por pregos cravados em D e E e por dois sarrafos pregados em A, B e C. Bate vento na face oculta da folha e supõe-se que o efeito equivale ao de uma força P_k aplicada no centro da folha. Sabendo que cada sarrafo suporta forças axiais de até 1,5 kN, determine: (a) o valor máximo de P e (b) o valor correspondente da componente z da reação em E. Suponha que os pregos estão frouxos e não aplicam binários na folha.

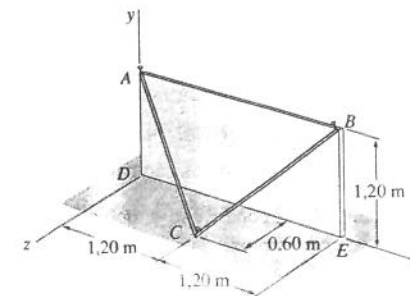


Figura P4.81

4.82 Uma placa retangular de $2,56\text{ m} \times 1,20\text{ m}$, de 200 kg , está presa por dobradiças em A e B e por um cabo fixo nos cantos C e D que passa por um gancho, sem atrito, em E . Supondo que a força de tração seja a mesma nas duas partes do cabo e que a dobradiça em A não exerça empuxo axial, determine: (a) a tração no cabo e (b) as reações em A e B .

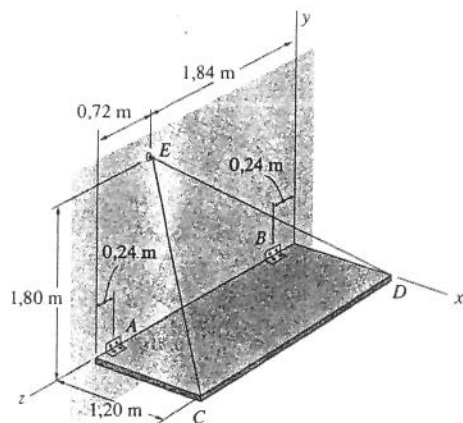


Figura P4.82

- 4.83 Resolva o Prob. 4.82 substituindo o cabo CED por outro preso no canto C e no gancho em E .
- 4.84 Resolva o Prob. 4.82 substituindo o cabo CED por outro preso no canto D e no gancho em E .
- 4.85 Resolva o Prob. 4.82 supondo que o cabo esteja amarrado em E e que a dobradiça em A é substituída por um rolete que aplica na placa uma força paralela ao eixo x .
- 4.86 Resolva o Prob. 4.80 supondo que a dobradiça em A foi removida e que a dobradiça em B pode aplicar binários cujos momentos são paralelos aos eixos x e y .
- 4.87 Resolva o Prob. 4.80 supondo que a dobradiça em B foi removida e que a dobradiça em A pode aplicar binários cujos momentos são paralelos aos eixos x e y .
- 4.88 Resolva o Prob. 4.82 supondo que a dobradiça em A foi removida e que a dobradiça em B pode aplicar binários com momentos paralelos aos eixos x e y .
- 4.89 Resolva o Prob. 4.82 supondo que a dobradiça em B foi removida e que a dobradiça em A pode exercer empuxo axial e binário de momentos paralelos aos eixos x e y .

4.90 A barra uniforme AB pesa 60 N . Ela tem uma junta esférica em A e está presa por um cabo CD fixo ao ponto médio C da barra. Sabendo que a barra está encostada em uma parede lisa no ponto B , determine: (a) a força de tração no cabo e (b) as reações em A e B .

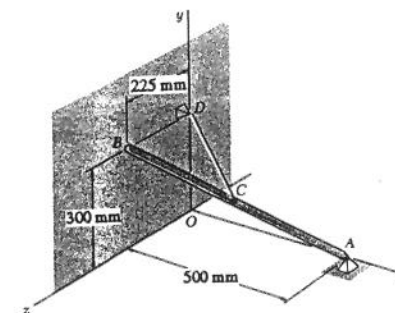


Figura P4.90

4.91 A barra uniforme AB pesa $182,5\text{ N}$. Ela tem uma junta esférica em A e apóia-se na haste CD e na parede vertical. Supondo que a haste e a parede não tenham atrito, determine: (a) a força aplicada pela haste CD em AB e (b) as reações em A e B . (Sugestão: A força aplicada por CD em AB deve ser perpendicular a ambas.)

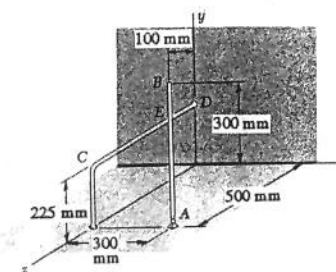


Figura P4.91

4.92 Um catamarã de 200 kg navega em curso retilíneo com velocidade constante. O efeito do vento na vela pode ser representado pela força $\mathbf{F} = (450\text{ N})\mathbf{i} - (600\text{ N})\mathbf{k}$ aplicada no ponto

de coordenadas $x = -0,48$ m, $y = 3$ m e $z = -0,36$ m. Por causa dos esforços da tripulação, o mastro é mantido na vertical e os dois cascos estão sujeitos a forças iguais formadas pelo empuxo $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$ com linhas de ação $x = 0,6$ m, $z = \pm 1,2$ m, forças de arrasto $\mathbf{D} = D\mathbf{i}$ com linhas de ação $y = 0,6$ m, $z = \pm 1,2$ m e forças laterais $\mathbf{S} = S\mathbf{k}$ com linha de ação comum $x = -d$, $y = 0,6$ m. Determine: (a) o módulo D da força de arrasto e (b) o módulo S de cada uma das forças laterais e a distância d que define sua linha de ação.

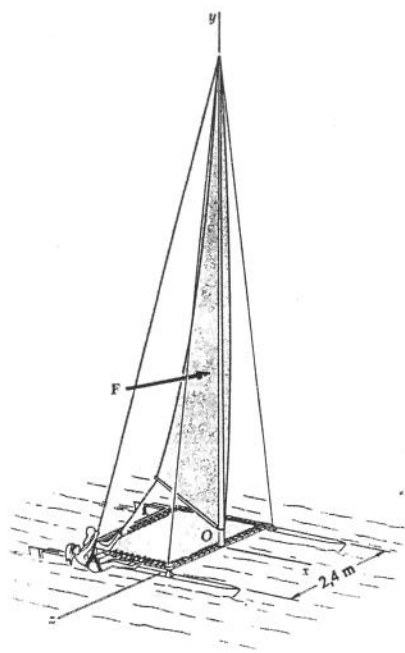


Figura P4.92

4.93 O catamarã do Prob. 4.93 é tripulado por dois marinheiros, um de massa 80 kg e outro de 65 kg. O centro de gravidade do barco fica em $x = -0,9$ m, $z = 0$. O marinheiro de 80 kg está sentado em $x = -1,5$ m, $z = +1,2$ m, enquanto o de 65 kg inclina-se para fora, a fim de manter o mastro na vertical. Determine as coordenadas x e z do centro de gravidade do segundo marinheiro.

4.94 A fim de desentupir o cano de esgoto AE, um encanador abriu os dois extremos e introduziu um cabo flexível pela abertura A. O cabo gira movido por um motor elétrico, de modo que a ponta livre abre caminho na medida em que o encanador a empurra pelo cano adentro. As forças

aplicadas pelo encanador e pelo motor na ponta do cabo podem ser representados pelo torsor $\mathbf{F} = -(32,5 \text{ N})\mathbf{j}$, $\mathbf{M} = -(146 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$. Determine as reações em B , C e D causadas pela operação de limpeza. Admita que a reação em cada suporte seja formada por duas componentes perpendiculares ao cano.

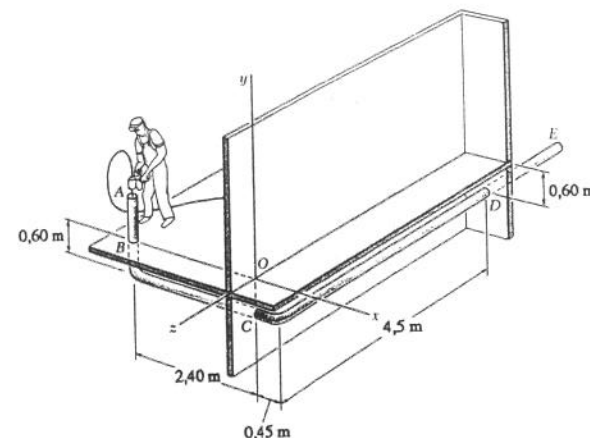


Figura P4.94

4.95 Resolva o Prob. 4.94 supondo que o encanador não aplica força no extremo do cabo e que o motor aplica um binário de momento $\mathbf{M} = -(146 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$.

4.96 A peça ABC , em L , tem uma junta esférica em A e está presa por três cabos. Sabendo que uma carga de $2,4 \text{ kN}$ é aplicada em F , determine a força de tração em cada cabo.

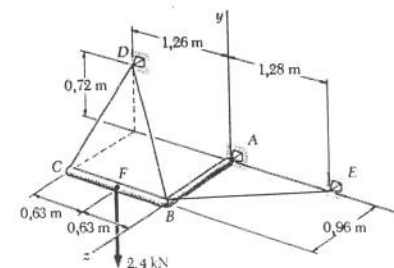


Figura P4.96

4.97 Resolva o Prob. 4.96 com a carga de 2,4 kN aplicada no ponto *C*.

4.98 Uma caixa retangular tem juntas esféricas em *A* e *E* e um rolete apoiado na superfície horizontal em *B*. Determine a reação em *B* quando uma força horizontal de 300 N é aplicada ao ponto médio *D* de *CE*.

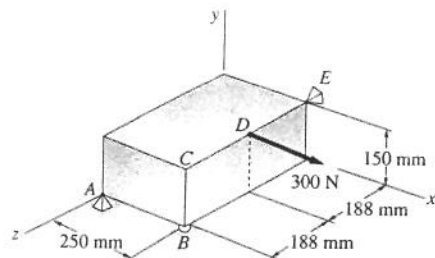


Figura P4.98

4.99 Resolva o Prob. 4.98 supondo que a força de 300 N aplicada em *D* seja vertical, para baixo.

4.100 A barra dobrada *ABC* está vinculada à parede vertical por meio de duas abraçadeiras e apóia-se, em *C*, em outra parede vertical. Desprezando o atrito, determine a reação em *C* quando uma carga de 150 N é aplicada em *D*, como ilustrado.

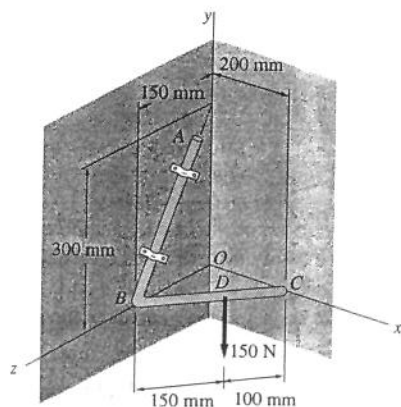


Figura P4.100

4.101 O suporte *ACD* tem juntas esféricas em *A* e *D* e é suportado por um cabo que passa por um anel em *B* e tem as extremidades atadas nos ganchos *G* e *H*. No suporte está aplicada uma carga *P* = 268 N no ponto *C*. Determine a tensão no cabo.

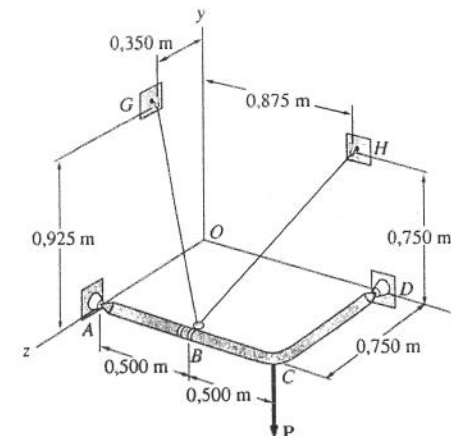


Figura P4.101

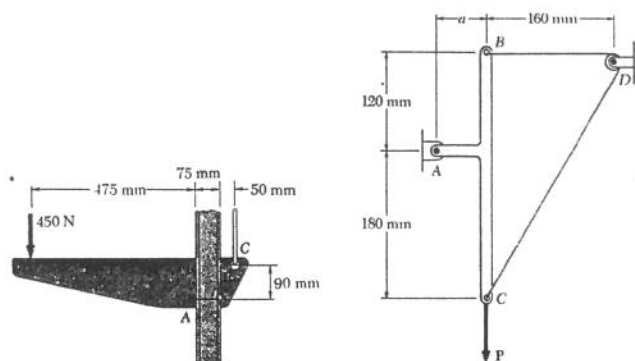
4.102 Resolva o Prob. 4.101 supondo que o cabo *GBH* foi substituído por um cabo *GB* atado em *G* e em *B*.

4.103 Resolva o Prob. 4.101 supondo que o cabo *GBH* foi substituído por um cabo *BH* atado em *B* e em *H*.

Problemas de Recapitulação

4.104 Um suporte móvel é mantido em equilíbrio por um cabo preso em *C* e por rolete sem atrito em *A* e *B*. Para o carregamento da figura, determine: (a) a força de tração no cabo e (b) as reações em *A* e *B*.

4.105 Uma força *P* de 450 N de intensidade é aplicada à peça *ABC*, que está articulada, sem atrito, em *A*. Um cabo *BDC* está preso à peça em *B* e *C* e passa por uma polia em *D*, de modo que a força de tração é a mesma nos trechos *BD* e *DC* do cabo. Determine: (a) a força de tração no cabo e (b) a reação em *A* quando *a* = 60 mm.



Figuras P4.104 e P4.105

4.106 A placa ABCD, de 0,65 m x 0,75 m, está presa por dobradiças em AB e por um fio CE. Sabendo que a placa é uniforme e pesa 500 N, determine a força de tração no fio.

4.107 Resolva o Prob. 4.106 supondo que o fio CE foi substituído por um fio que liga E a D.

4.108 Determine as reações em B e C com $a = 25$ mm.

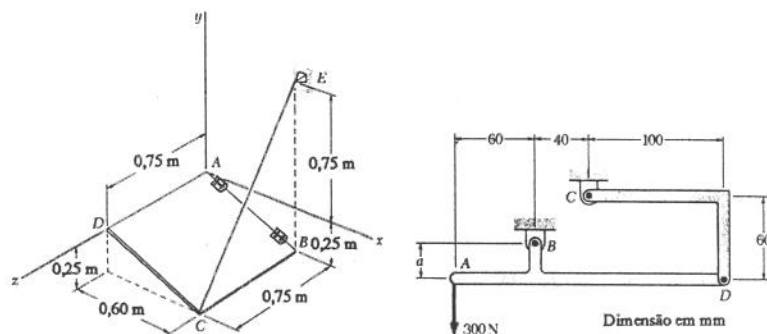
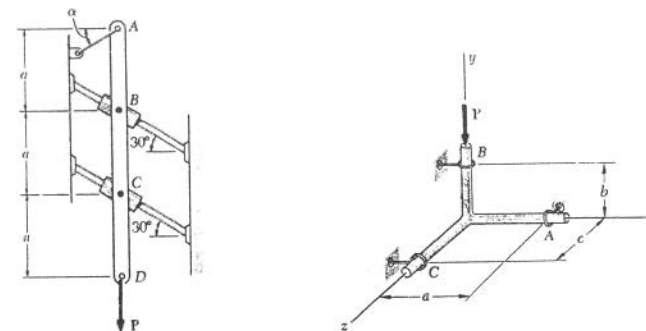


Figura P4.106 e P4.108

4.109 Uma barra leve AD suporta uma carga vertical P e está presa a mangas B e C que deslizam livremente nas hastes da figura. Sabendo que o fio preso em A forma um ângulo $\alpha = 30^\circ$ com a horizontal, determine: (a) a força de tração no fio e (b) as reações em B e C.

4.110 Três barras são soldadas formando a cantoneira da figura. Ela está fixada por três pistões sem atritos. Determine as reações em A, B e C sabendo que $P = 750$ N, $a = 250$ mm, $b = 150$ mm e $c = 200$ mm.



Figuras P4.109 e P4.110

4.111 Resolva o Prob. 4.110 supondo que a força P é removida e que é aplicado o momento $M = + (240 \text{ N} \cdot \text{m})$ em B.

4.112 Uma força P de 300 N é aplicada à ponta E do cabo CDE, que passa sob a polia D e tem a outra ponta presa ao mecanismo em C. Desprezando o peso do mecanismo e as dimensões da polia, determine o valor de θ na posição de equilíbrio. A constante da mola é $k = 4000$ N/m, e a mola não está esticada quando $\theta = 90^\circ$.

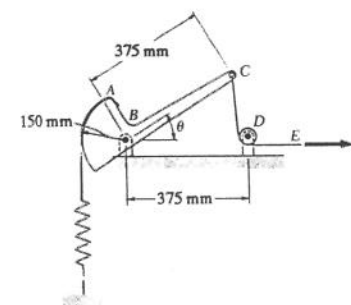


Figura P4.112

4.113 Uma força P é aplicada a uma barra dobrada AD que tem quatro tipos diferentes de fixação, como mostra a figura. Determine as reações nos vínculos em cada caso.

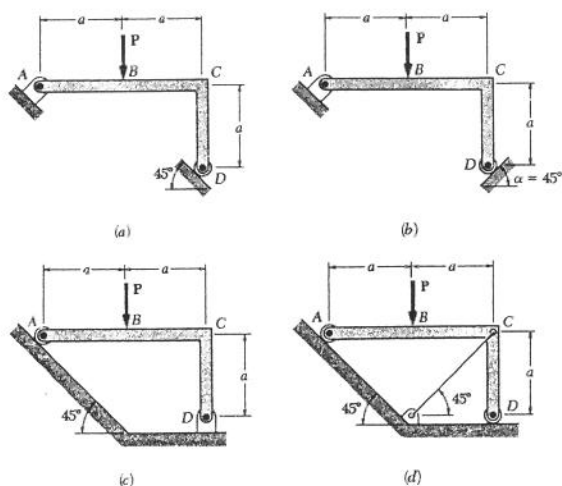


Figura P4.113

4.114 Determine as reações em A e B para a treliça e o carregamento ilustrados.

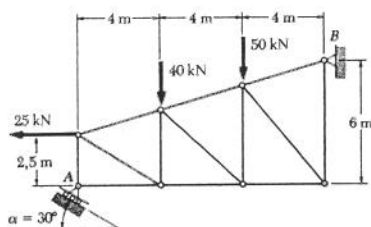


Figura P4.114

4.115 Nos problemas relacionados a seguir, os corpos rígidos estão completamente vinculados e as reações são estaticamente determinadas. Para cada um desses corpos rígidos é possível criar um conjunto impróprio de vínculo mudando uma dimensão do corpo ou a direção de uma reação. Em cada problema, determine o valor de a ou α que resulta em um vínculo impróprio. (a) Prob. 4.105, (b) Prob. 4.108, (c) Prob. 4.109, (d) Prob. 4.113b e (e) 4.114.

Recapitulação e Sumário

Este capítulo foi dedicado ao estudo do *equilíbrio de corpos rígidos*, isto é, à situação em que as forças externas que atuam sobre um corpo rígido *formam um sistema equivalente a zero* [Seção 4.1].

Equações de equilíbrio

Temos então

$$\Sigma F = 0 \quad \Sigma M_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Decompondo cada força e cada momento em suas componentes cartesianas, podemos expressar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido através das seis equações escalares seguintes:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Estas equações podem ser utilizadas para determinar forças desconhecidas aplicadas ao corpo rígido ou reações desconhecidas exercidas pelos vínculos.

Diagrama de corpo livre

Quando se resolve um problema envolvendo o equilíbrio de um corpo rígido é essencial considerar *todas* as forças que agem sobre o corpo. Portanto, como primeiro passo na direção à solução do problema, deve-se desenhar um *diagrama de corpo livre* mostrando o corpo em estudo e todas as forças que agem sobre ele, tanto as conhecidas como aquelas a determinar [Seção 4.2].

Equilíbrio de estruturas bidimensionais

Na primeira parte do capítulo consideramos o *equilíbrio de uma estrutura bidimensional*, isto é, supomos que a estrutura considerada e as forças a ela aplicadas estavam contidas em um plano. Vimos que cada uma das reações exercidas sobre a

estrutura pelos seus vínculos, pode envolver uma, duas ou três incógnitas, dependendo do tipo de vínculo [Seção 4.3].

No caso de uma estrutura bidimensional, as equações (4.1) ou (4.2) e (4.3) reduzem-se às três equações de equilíbrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

onde A é um ponto arbitrário no plano da estrutura [Seção 4.4]. Estas equações podem ser utilizadas para calcular três incógnitas. Embora ao sistema de três equações de equilíbrio (4.5) não se possam acrescentar novas equações, cada uma das equações pode ser substituída por uma outra equação. Podemos assim escrever seis conjuntos de equações de equilíbrio, tais como

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.6)$$

onde o segmento AB é tomado segundo uma direção distinta da do eixo y , ou

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.7)$$

onde os pontos A , B e C não estão alinhados.

Como cada um dos conjuntos de equações de equilíbrio determina apenas três variáveis, as reações sobre uma estrutura rígida bidimensional podem não ser completamente determinadas se houver *mais de três incógnitas*; elas são consideradas *estaticamente indeterminadas* [Seção 4.5].

Indeterminação estática, vinculação parcial, vinculação ineficaz

Se os vínculos envolvem *menos que três incógnitas*, o equilíbrio não pode ser mantido em condições gerais de carregamento, diz-se que o sistema está *parcialmente vinculado*. Mesmo que as reações envolvam exatamente três incógnitas não há garantia de que as equações de equilíbrio possam ser resolvidas determinando as três incógnitas. Se a disposição dos vínculos é de sorte a determinar que as reações sejam *ou concorrentes ou paralelas*, as reações são estaticamente indeterminadas e dizemos que a estrutura é *ineficazmente vinculada*.

Corpo submetido a duas forças

Dois casos particulares de equilíbrio de corpo rígido receberam atenção especial. Na Seção 4.6 um *corpo submetido a duas forças* foi definido como um corpo rígido sujeito a forças em apenas dois pontos. Foi demonstrado que as resultantes F_1 e F_2 destas forças devem ter *mesmo módulo, mesma linha de ação e sentidos opostos* (Fig. 4.11), esta propriedade simplificará a solução de certos problemas de capítulos posteriores.

Corpo submetido a três forças

Na seção 4.7 definimos um *corpo submetido a três forças* como um corpo rígido sujeito a forças aplicadas apenas em três pontos. Notou-se que as resultantes F_1 , F_2 e F_3 destas forças ou são *concorrentes ou são paralelas*. Esta propriedade nos dá uma alternativa para a resolução de problemas envolvendo corpos sujeitos a três forças [Problema Resolvido 4.6].

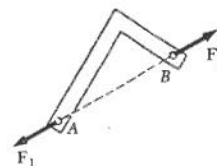


Figura 4.11

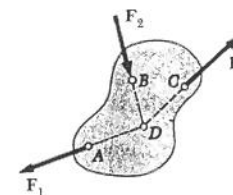


Figura 4.12

Equilíbrio de um corpo tridimensional

Na segunda parte do capítulo consideramos o *equilíbrio de um corpo tridimensional* e vimos que cada uma das reações exercidas sobre o corpo pelos vínculos pode envolver de uma a seis incógnitas, dependendo do tipo de vínculo [Seção 4.8].

No caso geral do equilíbrio de um corpo tridimensional as seis equações escalares de equilíbrio, (4.2) e (4.3), devem ser usadas para determinar *seis incógnitas* [Seção 4.9]. Na maioria dos problemas, entretanto, estas equações serão obtidas de maneira mais conveniente se escrevermos inicialmente

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

e expressarmos as forças $\mathbf{F}$ e os vetores posição $\mathbf{r}$ em termos de suas componentes escalares e dos vetores unitários. Pode-se então calcular os produtos vetoriais diretamente ou por meio de determinantes, obtendo-se as equações escalares procuradas ao igualar a zero os coeficientes dos vetores unitários [Problemas Resolvidos 4.7 a 4.9].

Observamos que até três componentes de reações incógnitas podem ser eliminadas calculando-se $\Sigma \mathbf{M}_O$ na segunda das equações (4.1), através da escolha conveniente do ponto O . Ainda, as reações em dois pontos A e B podem ser eliminadas da solução de alguns problemas escrevendo-se a equação $\Sigma M_{AB} = 0$, a qual envolve o cálculo dos momentos das forças em relação a um eixo AB que passa pelos pontos A e B [Problema Resolvido 4.10].

Se as reações envolvem mais de seis incógnitas, algumas delas são *estaticamente indeterminadas*; se houver menos de seis incógnitas o corpo rígido estará *parcialmente vinculado*. Mesmo com seis ou mais incógnitas o corpo rígido estará *impropriamente vinculado* se os vínculos são tais que as reações são paralelas ou então interceptam a mesma reta.

Capítulo 5

Forças Distribuídas: Centróides e Baricentros

5.1. Introdução. Supusemos anteriormente que a atração exercida pela Terra sobre um corpo rígido poderia ser representada por uma única força $\mathbf{P}$. Essa força, chamada peso do corpo, era aplicada no *baricentro* (Seção 3.2). A Terra realmente exerce uma força sobre cada um dos pontos materiais que formam o corpo. A ação da Terra sobre um corpo rígido deve ser representada por um grande número de pequenas forças distribuídas por todo o corpo. Contudo, veremos neste capítulo que todas essas pequenas forças podem ser substituídas por uma única força equivalente $\mathbf{P}$. Aprenderemos também a determinar o baricentro, isto é, o ponto de aplicação da resultante $\mathbf{P}$, para corpos de diferentes formas.

Na primeira parte do capítulo consideraremos corpos bidimensionais, tais como placas e fios contidos em um plano dado. Serão apresentados dois conceitos associados à determinação do baricentro de uma placa ou fio, isto é, o conceito de *centróide* de uma superfície ou curva e o conceito de *momento de primeira ordem* de uma superfície ou curva com relação a um certo eixo.

Veremos que o cálculo da área de uma superfície de revolução ou o do volume de um sólido de revolução estão diretamente ligados à determinação do centróide da curva ou da superfície usadas para gerar a superfície ou o sólido de revolução (teoremas de Pappus e Guldin). Veremos ainda, nas Seções 5.8 e 5.9, que a determinação do centróide de uma superfície simplifica a análise de vigas sujeitas a cargas distribuídas e o cálculo das forças exercidas em superfícies retangulares, tais como comportas e paredes de represas.

Na parte final do capítulo aprenderemos a determinar o baricentro de um corpo tridimensional, o centróide de um sólido e os momentos de primeira ordem desse sólido com relação aos planos coordenados.

Superfícies e Curvas

5.2. Centro de Gravidade de um Corpo Bidimensional. Consideremos, inicialmente, uma placa horizontal (Fig. 5.1). Podemos dividir essa placa em n pequenos elementos. As coordenadas do primeiro elemento são denominadas x_1 e y_1 , as do segundo elemento, x_2 e y_2 etc. As forças exercidas pela Terra sobre os elementos da placa são denominadas $\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n$, respectivamente. Essas forças ou pesos estão orientados em direção ao centro da Terra; porém, para todas as finalidades práticas, elas podem ser consideradas paralelas. Sua resultante é, por conseguinte, uma única força na mesma direção. O módulo P dessa força é obtido pela adição dos módulos dos pesos elementares

$$\Sigma F_z: \quad P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n$$

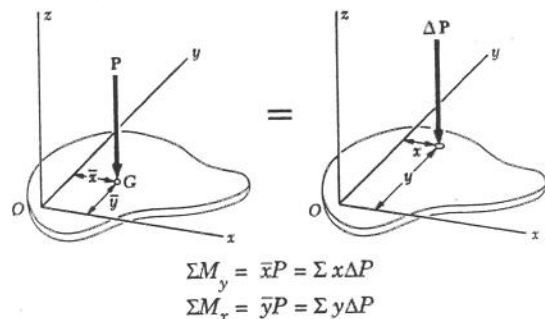


Figura 5.1 Baricentro de uma placa.

Para obter as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do ponto G , onde a resultante P deve ser aplicada, escrevemos que os momentos de P em relação aos eixos y e x são iguais à soma dos momentos correspondentes dos pesos elementares:

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: \quad \bar{x}P &= x_1\Delta P_1 + x_2\Delta P_2 + \dots + x_n\Delta P_n \\ \Sigma M_x: \quad \bar{y}P &= y_1\Delta P_1 + y_2\Delta P_2 + \dots + y_n\Delta P_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

Se, agora, aumentarmos o número de elementos em que a placa é dividida e diminuirmos simultaneamente o tamanho de cada elemento, teremos, no limite, as seguintes expressões:

$$P = \int dP \quad \bar{x}P = \int x dP \quad \bar{y}P = \int y dP \quad (5.2)$$

Essas equações definem o peso P e as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do baricentro G da placa plana. As mesmas equações poderiam ser deduzidas para um arame situado no plano xy (Fig. 5.2). Observaremos nesse caso que o baricentro G geralmente não estará sobre o arame.*

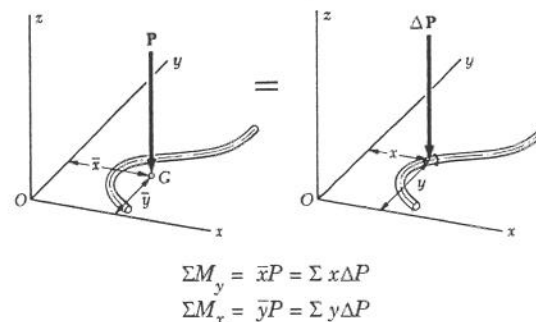


Figura 5.2 Baricentro de um arame.

5.3. Centróides de Superfícies e Curvas. No caso de uma placa homogênea de espessura uniforme, o módulo ΔP do peso de um elemento de placa pode ser expresso como

$$\Delta P = \gamma t \Delta A$$

onde γ = peso específico (peso por unidade de volume) do material

t = espessura da placa

ΔA = área do elemento

* O mesmo pode ocorrer no caso de uma placa toda vez que ela tiver furos ou seu contorno não for um polígono convexo. (N. do R. T.)

Analogamente, podemos exprimir o módulo P do peso da placa inteira na forma

$$P = \gamma t A$$

onde A é a área total da placa.

Em unidades do SI, γ é expresso em N/m^3 , t em metros e as áreas ΔA e A em metros quadrados; os pesos ΔP e P serão então expresso em newtons.*

Substituindo ΔP e P na equação de momentos (5.1) e dividindo por γ , escrevemos

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \dots + x_n\Delta A_n$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \dots + y_n\Delta A_n$$

Se aumentarmos o número de elementos em que a superfície A é dividida e diminuirmos, simultaneamente, o tamanho de cada elemento, obteremos, no limite,

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

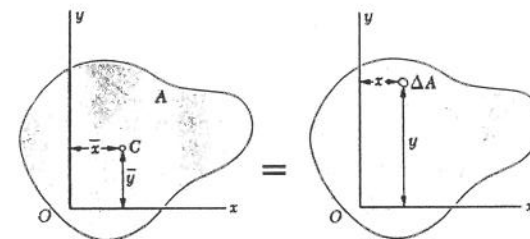
Essas equações definem as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do baricentro de uma placa homogênea. O ponto de coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ é também conhecido como *centróide* C da superfície A da placa (Fig. 5.3). Se a placa não for homogênea, as equações não podem ser utilizadas para determinar o baricentro da placa; porém, definem ainda o centróide da superfície.**

* Deve-se observar que no SI um dado material é caracterizado por sua massa específica ρ (massa por unidade de volume) em vez de por seu peso específico γ . Um corpo tem massa específica constante e peso específico variável. O peso específico do material pode ser obtido escrevendo-se

$$\gamma = \rho g$$

onde g , em m/s^2 , é a aceleração local da gravidade. Como ρ é expresso em kg/m^3 , verificamos que γ será expresso em $(kg/m^3)(m/s^2)$, que é N/m^3 .

** O centróide costuma ainda ser chamado de *centro geométrico*. (N. do R. T.)



$$\Sigma M_y = \bar{x}A = \Sigma x\Delta A$$

$$\Sigma M_x = \bar{y}A = \Sigma y\Delta A$$

Figura 5.3 Centróide de uma superfície.

No caso de um arame homogêneo de seção transversal uniforme, o módulo do peso, ΔP , de um elemento do arame pode ser expresso como

$$\Delta P = \gamma a \Delta L$$

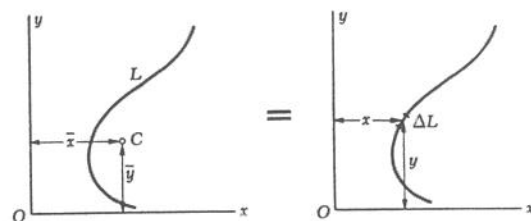
onde γ = peso específico do material

a = área da seção transversal do arame

ΔL = comprimento do elemento

O baricentro do arame coincide, então, com o *centróide* C da curva L definida pela forma do arame (Fig. 5.4). As coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centróide da curva L são obtidas das equações

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$



$$\Sigma M_y = \bar{x}L = \Sigma x\Delta L$$

$$\Sigma M_x = \bar{y}L = \Sigma y\Delta L$$

Figura 5.4 Centróide de uma linha.

5.4. Momentos de Primeira Ordem de Superfícies e Curvas. A integral $\int x dA$ da Eq. (5.3) é conhecida como *momento de primeira ordem da superfície A em relação ao eixo y* e será representado por Q_y . Analogamente, a integral $\int y dA$ define o *momento de primeira ordem de A em relação ao eixo x* e é representada por Q_x . Escrevemos

$$Q_y = \int x dA \quad Q_x = \int y dA \quad (5.5)$$

Comparando as Eqs. (5.3) e (5.5), verificamos que os momentos de primeira ordem da superfície A podem ser expressos como produtos da área pelas coordenadas do centróide:

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

Reciprocamente, as coordenadas do centróide podem ser obtidas dividindo-se os primeiros momentos da superfície por sua área. O cálculo de momentos de primeira ordem é também útil na determinação de forças cortantes devidas a carregamentos transversais, em Resistência dos Materiais. Finalmente, observamos que a Eq. (5.6) indica que, se o centróide de uma superfície estiver situado sobre um eixo coordenado, o momento de primeira ordem da superfície em relação ao eixo será nulo.

Relações semelhantes às Eqs. (5.5) e (5.6) podem ser utilizadas para definir os momentos de primeira ordem de uma curva com relação aos eixos coordenados e para expressar esses momentos como produtos do comprimento L da curva pelas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de seu centróide.

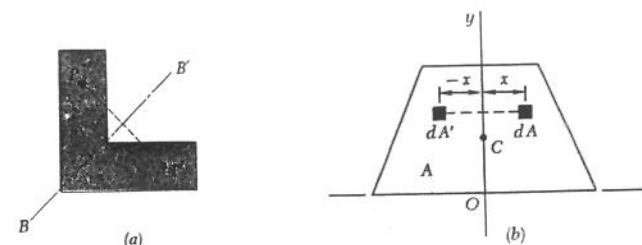


Figura 5.5

Uma superfície A é considerada *simétrica em relação a um eixo BB'* se a todo ponto P da superfície corresponder um ponto P' da mesma superfície, de tal modo que o segmento PP' seja perpendicular a BB' e dividido em duas partes iguais por aquele eixo (Fig. 5.5a). Uma curva L é considerada simétrica em relação a BB' se satisfizer condições análogas. Quando uma superfície A ou uma curva L possuem um eixo de simetria BB', o centróide da superfície ou curva deve estar situado nesse eixo, e o momento de primeira ordem em relação a BB' é nulo. De fato, considerando a superfície A da Fig. 5.5b, que é simétrica em relação ao eixo y, verificamos que a cada elemento de área dA com abscissa x corresponde um elemento de área dA' de abscissa -x. Resulta que a integral na primeira das Eqs. (5.5) é nula e, portanto, que $Q_y = 0$. Também resulta, da primeira das relações (5.3), que $\bar{x} = 0$. Portanto, se uma superfície A, ou uma curva L, tem um eixo de simetria, seu centróide C pertence a esse eixo.

Ainda mais, se uma superfície ou curva possui dois eixos de simetria, seu centróide está situado na interseção desses eixos. (Fig. 5.6). Essa propriedade nos permite determinar imediatamente o centróide de superfícies tais como círculos, elipses, quadrados, retângulos, triângulos equiláteros ou outras figuras simétricas, como também centróides de curvas na forma de circunferências, perímetro de um quadrado etc.

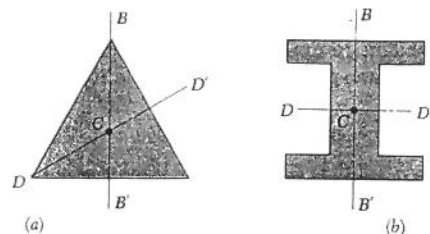


Figura 5.6

Uma superfície é dita *simétrica em relação a um centro O* se a cada elemento de superfície dA com coordenadas x e y corresponder um elemento de superfície dA' com coordenadas $-x$ e $-y$ (Fig. 5.7). Resulta que as integrais nas Eqs. (5.5) são ambas nulas e que $Q_x = Q_y = 0$. Das Eqs. (5.3) obtém-se $\bar{x} = \bar{y} = 0$, isto é, o centróide da superfície coincide com o centro de simetria O . De maneira análoga, pode-se mostrar que o centróide de uma curva simétrica em relação ao centro O coincide com O .

Deve-se notar que uma figura que tem um centro de simetria não tem, necessariamente, um eixo de simetria (Fig. 5.7), ao passo que uma figura que tem dois eixos de simetria não tem, necessariamente, um centro de simetria (Fig. 5.6a). Se, entretanto, uma figura tiver dois eixos de simetria que formam um ângulo reto, o ponto de interseção dos eixos será um centro de simetria (Fig. 5.6b).

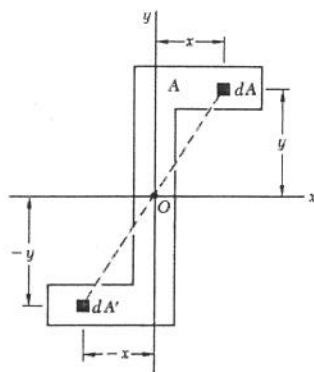


Figura 5.7

Centróides de superfícies e curvas sem simetria e de superfícies e curvas que têm apenas um eixo de simetria serão determinados pelos métodos das Seções 5.6 e 5.7. Centróides de superfícies e curvas com formas comuns são dados nas Fig. 5.8a e b. As fórmulas que determinam esses centróides serão deduzidas nos Problemas Resolvidos e nos problemas que seguem as Seções 5.6 e 5.7.

Forma de Superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Limitada por um segmento de reta e uma semi-elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e uma semiparábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Limitada por um segmento de reta e uma parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do 2º grau.		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do grau n.		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Figura 5.8a Centróides de formas comuns de superfícies.

Forma da curva		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Comprimento
Quarto de circunferência		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircunferência		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de circunferência		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Figura 5.8b Centróides de formas comuns de curvas.

5.5. Placas e Arames Compostos. Em muitos casos, uma placa pode ser dividida em retângulos, triângulos ou outras das formas usuais mostradas na Fig. 5.8a. A abscissa $\bar{X}$ de seu baricentro G pode ser determinada das abscissas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$, dos baricentros das várias partes, exprimindo que o momento do peso de toda a placa em relação ao eixo y é igual à soma dos momentos dos pesos das várias partes em relação ao mesmo eixo (Fig. 5.9). A ordenada $\bar{Y}$ do baricentro da placa é obtida de maneira análoga; equacionando-se os momentos em relação ao eixo x :

$$\begin{aligned} \Sigma M_y: \quad \bar{X}(P_1 + P_2 + \dots + P_n) &= \bar{x}_1 P_1 + \bar{x}_2 P_2 + \dots + \bar{x}_n P_n \\ \Sigma M_x: \quad \bar{Y}(P_1 + P_2 + \dots + P_n) &= \bar{y}_1 P_1 + \bar{y}_2 P_2 + \dots + \bar{y}_n P_n \end{aligned}$$

ou, de forma compacta,

$$\boxed{\bar{X} \Sigma P_i = \Sigma \bar{x}_i P_i \quad \bar{Y} \Sigma P_i = \Sigma \bar{y}_i P_i} \quad (5.7)$$

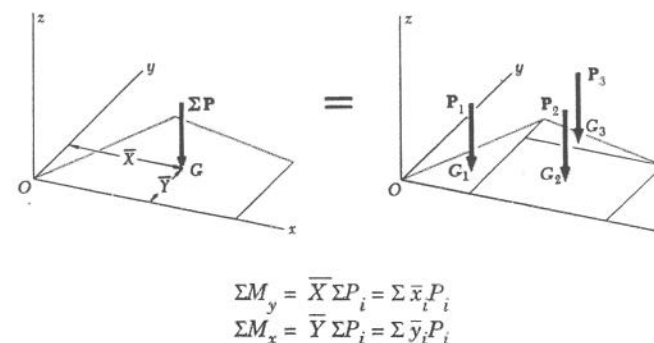


Figura 5.9 Baricentro de uma placa composta.

Essas equações podem ser resolvidas obtendo-se as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do baricentro da placa.

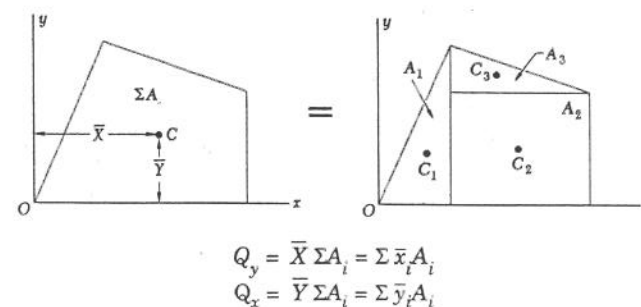


Figura 5.10 Centróide de uma superfície composta.

Se a placa é homogênea e de espessura constante, o baricentro coincide com o centróide C de sua superfície. A abscissa $\bar{X}$ do centróide da superfície pode ser determinada notando que o momento de primeira ordem Q_y , em relação ao eixo y , da superfície composta, pode ser expresso seja como o produto de $\bar{X}$ pela área total seja como a soma dos momentos de primeira ordem em relação ao eixo y das áreas elementares (Fig. 5.10).

A ordenada $\bar{Y}$ do centróide é determinada de maneira análoga, a partir do momento de primeira ordem Q_x da superfície composta:

$$Q_y = \bar{X} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \dots + \bar{x}_n A_n$$

$$Q_x = \bar{Y} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots + \bar{y}_n A_n$$

ou, de forma compacta,

$$Q_y = \bar{X} \Sigma A_i = \Sigma \bar{x}_i A_i \quad Q_x = \bar{Y} \Sigma A_i = \Sigma \bar{y}_i A_i \quad (5.8)$$

Essas equações determinam os momentos de primeira ordem da superfície composta e também podem ser utilizadas para calcular as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ de seu centróide.

Deve-se tomar cuidado para registrar o momento de cada superfície com o sinal apropriado. Momentos estáticos de superfícies, assim como os momentos de forças, podem ser positivos ou negativos. Por exemplo, uma superfície cujo centróide está localizado à esquerda do eixo y terá um momento estático negativo em relação a esse eixo. Também a superfície de um furo terá um sinal negativo (Fig. 5.11).

Analogamente, em muitos casos, é possível determinar o baricentro de um arame composto ou o centróide de uma linha composta dividindo-se o arame ou a linha em elementos mais simples. (Problema Resolvido 5.2).

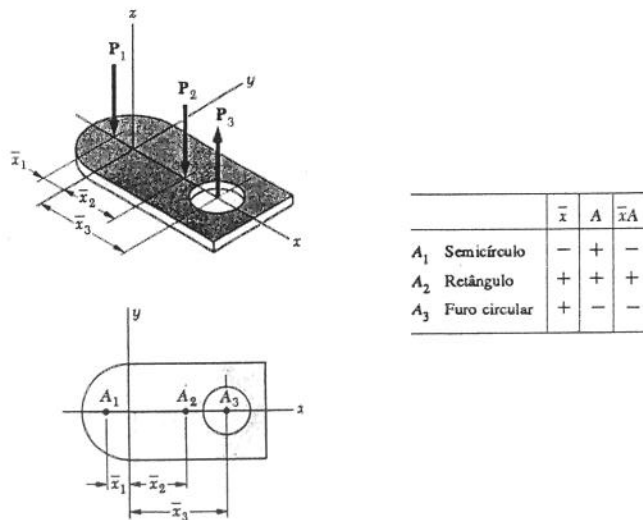
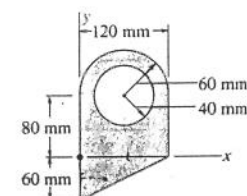


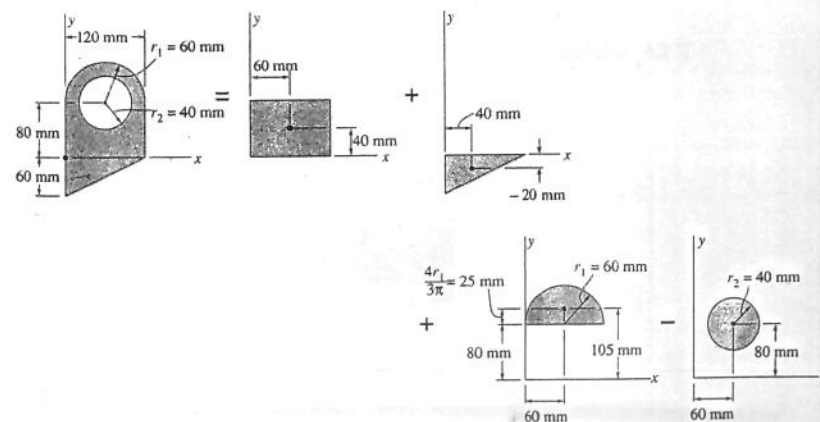
Figura 5.11

Problema Resolvido 5.1

Determine para a superfície plana da figura (a) os momentos estáticos com relação aos eixos x e y e (b) a posição do centróide.



Solução. A superfície é obtida juntando-se um retângulo, um triângulo e um semicírculo, subtraindo-se, em seguida, um círculo. Com o sistema de eixos da figura, determinam-se as coordenadas do centróide de cada superfície componente, colocando-se os resultados na tabela. A superfície do furo circular é negativa, pois deve ser subtraída do restante. Observamos que com os eixos utilizados a coordenada $\bar{y}$ do centróide é negativa. Os momentos estáticos das superfícies componentes são calculados no sistema de eixos coordenados da figura, e os resultados estão anotados na tabela.



Componente	A, mm ²	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm ³	$\bar{y}A$, mm ³
Retângulo	$(120)(80) = 9,6 \times 10^3$	60	40	$+ 576 \times 10^3$	$+ 384 \times 10^3$
Triângulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3,6 \times 10^3$	40	-20	$+ 144 \times 10^3$	$- 72 \times 10^3$
Semicírculo	$\frac{\pi(60)^2}{2} = 5,6 \times 10^3$	60	105	$+ 339 \times 10^3$	$+ 596 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5,0 \times 10^3$	60	80	$- 301 \times 10^3$	$- 402 \times 10^3$
	$\Sigma A = 13,8 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = + 758 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = + 506 \times 10^3$

a) **Momentos Estáticos da Superfície.** Usando a Eq. (5.8), temos:

$$Q_x = \Sigma \bar{y}_i A_i = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad Q_x = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \leftarrow$$

$$Q_y = \Sigma \bar{x}_i A_i = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \quad Q_y = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \leftarrow$$

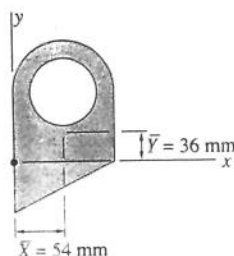
b) **Posição do Centróide.** Substituindo, nas equações que determinam a posição do centróide de uma superfície composta, os valores da tabela, obtemos:

$$\bar{X} \Sigma A_i = \Sigma \bar{x}_i A_i: \quad \bar{X} (14 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 758 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{X} = 54 \text{ mm} \leftarrow$$

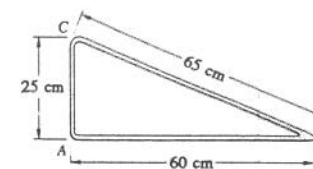
$$\bar{Y} \Sigma A_i = \Sigma \bar{y}_i A_i: \quad \bar{Y} (14 \times 10^3 \text{ mm}^2) = 506 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\bar{Y} = 36 \text{ mm} \leftarrow$$

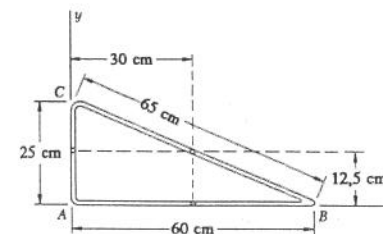


Problema Resolvido 5.2

O triângulo da figura é feito de um arame fino homogêneo. Determinar seu baricentro.



Solução. Como o triângulo é formado de arame homogêneo, seu baricentro pode ser localizado determinando o centróide da linha correspondente. Escolhendo os eixos coordenados ilustrados, com origem em A, determinamos as coordenadas do centróide de cada segmento de reta e calculamos seu momento estático em relação aos eixos coordenados.



Segmento	L, cm	$\bar{x}$, cm	$\bar{y}$, cm	$\bar{x}L$, cm ²	$\bar{y}L$, cm ²
AB	60	30	0	$1,80 \times 10^3$	0
BC	65	30	12,5	$1,95 \times 10^3$	$0,81 \times 10^3$
CA	25	0	12,5	0	$0,31 \times 10^3$
	$\Sigma L = 150$	...	...	$\Sigma \bar{x}L = 3,75 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}L = 1,12 \times 10^3$

Substituindo os valores tirados da tabela nas equações que definem o centróide de uma linha composta, obtemos:

$$\bar{X} \Sigma L = \Sigma \bar{x} L: \quad \bar{X} (150 \text{ cm}) = 3,75 \times 10^3 \text{ cm}^2 \quad \bar{X} = 25,0 \text{ cm}$$

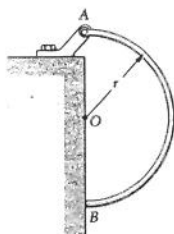
$$\bar{X} = 250 \text{ mm} \leftarrow$$

$$\bar{Y} \Sigma L = \Sigma \bar{y} L: \quad \bar{Y} (150 \text{ cm}) = 1,12 \times 10^3 \text{ cm}^2 \quad \bar{Y} = 7,5 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = 75 \text{ mm} \leftarrow$$

Problema Resolvido 5.3

Uma barra semicircular uniforme de peso P e raio r é vinculada por um pino em A e está apoiada contra uma superfície lisa em B . Determine as reações em A e B .



Solução. Um diagrama de corpo livre é desenhado. As forças que atuam sobre a barra consistem de seu peso P aplicado ao baricentro G , cuja posição é obtida da Fig. 5.8B, da reação em A representada por suas componentes A_x e A_y e da reação horizontal em B :

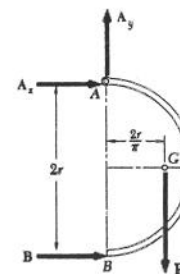
$$+ \curvearrowright \Sigma M_A = 0: \quad B(2r) - P\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0$$

$$B = + \frac{P}{\pi} \rightarrow \leftarrow \quad B = \frac{P}{\pi} \rightarrow \leftarrow$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{P}{\pi} \quad A_x = \frac{P}{\pi} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - P = 0 \quad A_y = P \uparrow$$



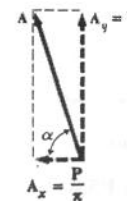
Adicionando as duas componentes da reação em A :

$$A = \left[P^2 + \left(\frac{P}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad A = P \left(1 + \frac{1}{\pi^2} \right)^{1/2} \leftarrow$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{P}{P/\pi} = \pi \quad \alpha = \text{arctg}^{-1} \pi \leftarrow$$

As respostas também podem ser expressas como se segue:

$$A = 1,049 P \nearrow 72,3' \quad B = 0,318 P \rightarrow \leftarrow$$



Problemas

5.1 a 5.10 Determine a posição do centróide da superfície plana da figura.

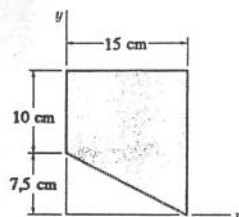


Figura P5.1

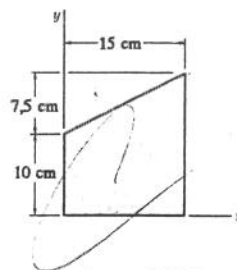


Figura P5.2

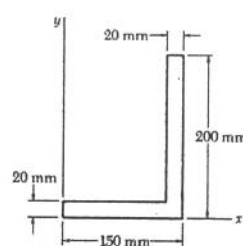


Figura P5.3

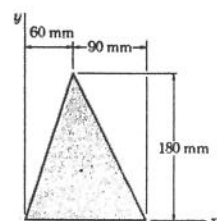


Figura P5.4

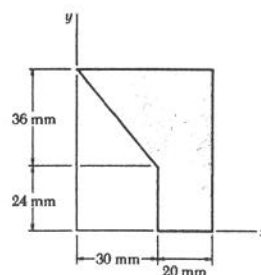


Figura P5.5

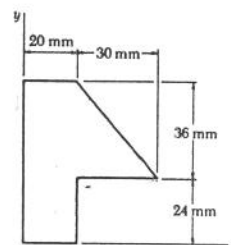


Figura P5.6

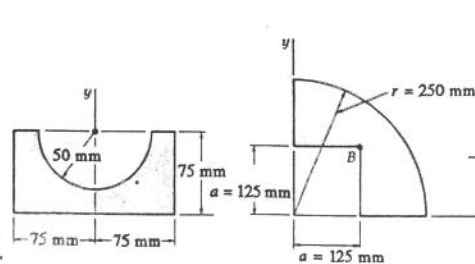


Figura P5.7

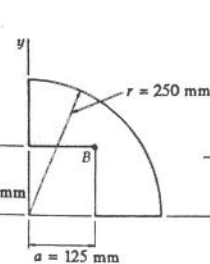


Figura P5.8

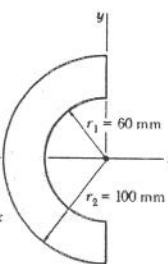


Figura P5.9

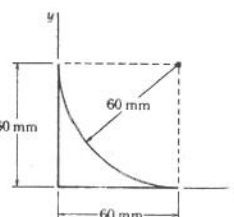


Figura P5.10

5.11 a 5.14 Determine a posição do centróide da área plana da figura.

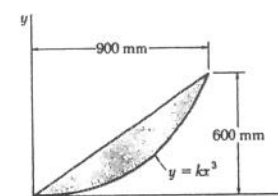


Figura P5.11

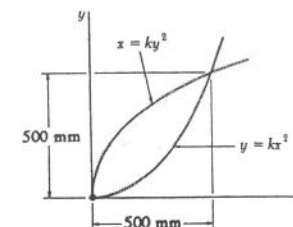


Figura P5.12

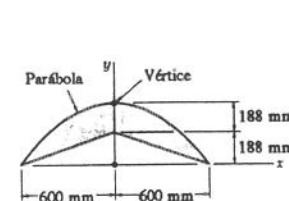


Figura P5.13

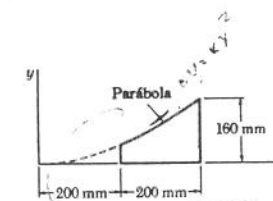


Figura P5.14

5.15 Determine a abscissa do centróide do segmento de círculo da figura, em função de r e α .

e α .

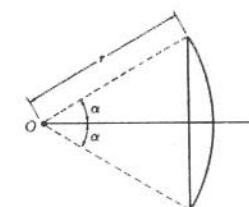


Figura P5.15

5.16 Determine a abscissa do centróide do trapézio da ilustração, em função de h_1 , h_2

e a .

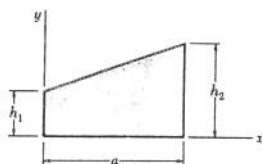


Figura P5.16

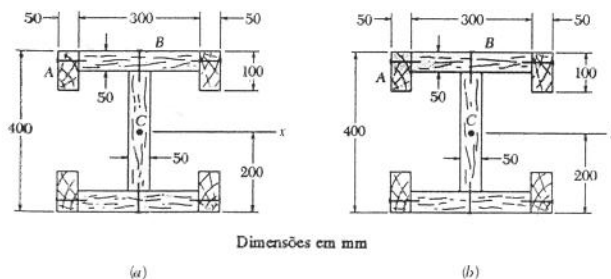
5.17 Localize o centróide C no Prob. 5.9, em termos de r_1 e r_2 , e mostre que quando r_1 tende a r_2 a posição do centróide tende a de um semicírculo de raio $(r_1 + r_2)/2$.

5.18 Para o semi-anel do Prob. 5.9, determine a razão entre r_1 e r_2 para a qual o centróide da superfície tem coordenadas $x = -r_2/2$ e $y = 0$.

5.19 Para a superfície plana do Prob. 5.8, determine a razão entre a e r para a qual o centróide da superfície é o ponto B .

5.20 Para o semi-anel do Prob. 5.9, determine a razão entre r_1 e r_2 para a qual o centróide da superfície fica na interseção da circunferência interna com o eixo x .

5.21 Uma estrutura foi construída pregando sete peças de madeira. Os pregos têm espaçamento uniforme, e a estrutura suporta uma carga vertical. Prova-se, em resistência dos materiais, que as tensões de cisalhamento* nos pregos em A e B são proporcionais aos momentos de primeira ordem em relação ao eixo x , que passa pelo centróide, das superfícies escurecidas das partes a e b , respectivamente, da figura. Sabendo que a força aplicada no prego A é de 120 N, determine a força aplicada no prego B .



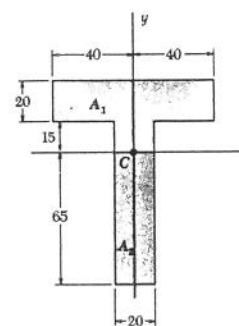
Dimensões em mm

Figura P5.21

* Tensão de cisalhamento é a força, por unidade de área, que atua no sentido de cisalhar (cortar) um corpo, que, no caso, é um prego. Este está sujeito a uma força que tende a seccioná-lo transversalmente. (N. do R. T.)

5.22 e 5.23 O eixo x , horizontal, passa pelo centróide C da superfície da figura e a divide em duas partes A_1 e A_2 . Determine o momento estático de cada parte componente em relação ao eixo x e explique os resultados obtidos.

5.24 Q_x é o momento estático da área escurecida, em relação ao eixo x . (a) Escreva Q_x em termos de b , c e da distância y da base da área escurecida ao eixo x . (b) Qual o valor de y para o qual Q_x é máximo e qual é esse valor máximo?



Dimensões em mm

Figura P5.22

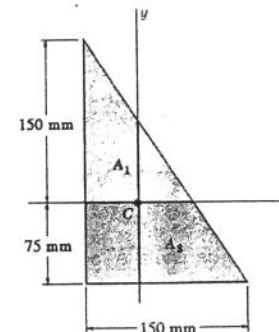


Figura P5.23

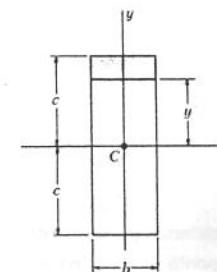


Figura P5.24

5.25 a 5.28 Um arame fino, homogêneo, é utilizado para formar o perímetro da figura indicada. Localize o centro de gravidade de cada figura de arame formada por:

5.25 Fig. P5.1.

5.26 Fig. P5.2.

5.27 Fig. P5.5.

5.28 Fig. P5.6.

5.29 Uma barra uniforme de forma circular está presa por um pino em B e apoiada em uma parede sem atrito em A . Determine as reações em A e B .

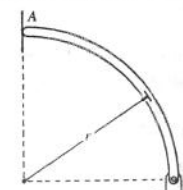
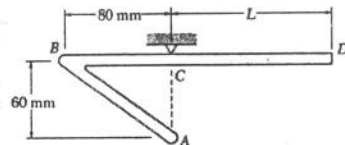


Figura P5.29

5.30 Um arame homogêneo $ABCD$ é dobrado, como se vê na figura. Em C o fio é preso por uma articulação. Determine o comprimento L para que a parte BCD fique em posição horizontal.

5.31 Com referência ao Prob. 5.30, determine o comprimento L para que a parte AB fique em posição horizontal.



Figuras P5.30 e P5.31

5.32 Sabendo que o objeto da figura é formado por um arame fino e homogêneo, determine o comprimento l da parte CE do fio de modo que o baricentro da figura fique localizado no ponto C , quando (a) $\theta = 30^\circ$ e (b) $\theta = 90^\circ$.

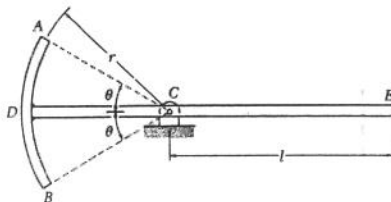
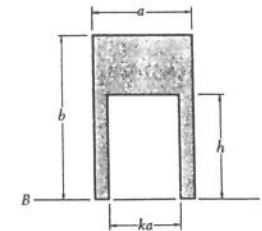


Figura P5.32

5.33 Determine a distância h de modo que o centróide da superfície escurecida fique o mais longe possível acima da linha BB' , quando (a) $k = 0,25$ e (b) $k = 0,75$.

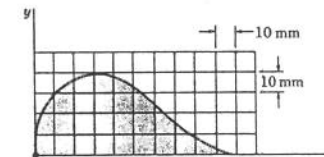
5.34 Mostre que, quando a distância h é determinada de maneira a tornar máxima a distância y do centróide da superfície escurecida à linha BB' , temos $\bar{y} = h$.

5.35 Determine de maneira aproximada a coordenada x do centróide da superfície da figura.



Figuras P5.33 e P5.34

5.36 Determine de maneira aproximada a coordenada y do centróide da superfície da figura.



Figuras P5.35 e P5.36

5.37 Divida a superfície escurecida, que fica sob a parábola, em cinco seções por retas verticais e determine de maneira aproximada a coordenada x de seu centróide. Aproxime as seções por retângulos $bcc'b'$. Qual o erro percentual da resposta obtida? (Veja a Fig. 5.8a para a resposta exata.)

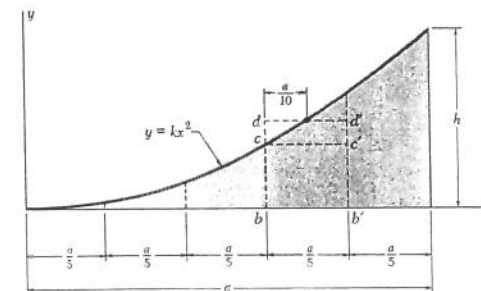


Figura P5.37

5.38 Resolva o Prob. 5.37 utilizando retângulos do tipo $b d' b'$.

5.6. Determinação do Centróide por Integração. O centróide de uma superfície limitada por curvas analíticas (isto é, curvas definidas por equações algébricas) é determinado geralmente pelo cálculo das integrais da Eq. (5.3):

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

Se o elemento de área dA é escolhido como sendo um pequeno retângulo de lados dx e dy , a determinação do centróide requer uma *dupla integração*, em x e y . Uma dupla integração também será necessária se forem utilizadas coordenadas polares e dA for escolhido como sendo um pequeno quadrado de lados dr e $r d\theta$.

Contudo, é possível, na maioria dos casos, determinar as coordenadas do centróide de uma superfície efetuando-se uma única integração. Consegue-se isto escolhendo dA como um retângulo estreito ou uma faixa fina, ou um setor fino ou elemento em forma de setor circular (Fig. 5.12); o centróide de um retângulo estreito está localizado no seu centro e o centróide de um setor fino, a distância $\frac{2}{3}r$ de seu vértice (como para um triângulo). As coordenadas do centróide da superfície sob consideração são, então, obtidas igualando-se o momento estático de toda a superfície, em relação a cada eixo coordenado, à soma (ou integral) dos correspondentes momentos dos elementos de área. Denominando $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ as coordenadas do elemento dA , escrevemos

$$Q_y = \bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA \quad Q_x = \bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA \quad (5.9)$$

Se a área em si ainda não for conhecida, também poderá ser calculada a partir desses elementos.

As coordenadas $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ do centróide do elemento de área devem ser expressas em função das coordenadas de um ponto localizado sobre a curva limitante dessa superfície. O elemento de área dA deve ser também expresso em termos das coordenadas do ponto e suas diferenciais. Isto foi feito na Fig. 5.12 para três tipos comuns de elementos; o elemento triangular da parte *c* deve ser usado quando a equação da curva limitante da superfície é dada em coordenadas polares. As expressões apropriadas devem ser substituídas nas fórmulas (5.9), e a equação da curva deve ser utilizada para exprimir uma das coordenadas em termos da outra. A integração é, então, reduzida a uma integral simples, que pode ser obtida segundo as regras usuais do cálculo. Quando a área e as integrais da Eq. (5.9) forem determinadas, podem-se obter as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centróide.

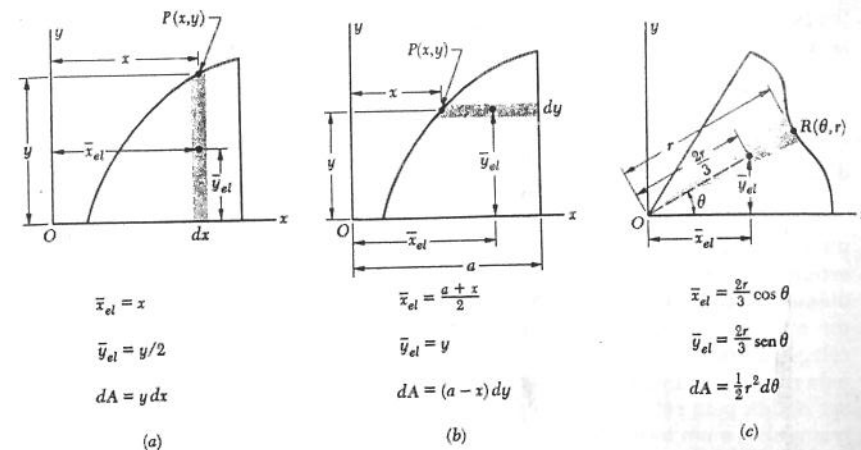


Figura 5.12 Centróides e áreas de elementos diferenciais de superfícies.

O centróide de uma linha definida por uma equação algébrica pode ser determinado pelo cálculo das integrais nas Eqs. (5.4) da Seção 5.3:

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

O elemento dL deve ser substituído por uma das seguintes expressões, dependendo do tipo de equação utilizada para definir a linha (estas expressões podem ser deduzidas pelo uso do teorema de Pitágoras):

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

A equação da linha é, então, utilizada para exprimir uma das coordenadas em função da outra, e a integração pode ser desenvolvida pelos métodos de cálculo, obtendo-se assim as coordenadas x e y do centróide.

5.7. Teoremas de Pappus-Guldin. Esses teoremas, primeiramente enunciados pelo geômetra grego Pappus, durante o século III a.D. e mais tarde reenunciados pelo matemático suíço Guldinus ou Guldin (1577-1643), referem-se a superfícies e corpos de revolução.

Superfície de revolução é uma superfície que pode ser gerada pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo fixo. Por exemplo (Fig. 5.13), a superfície de uma esfera pode ser obtida pela rotação de uma semicircunferência ABC em torno do diâmetro AC ; a superfície lateral de um cone, pela rotação de uma reta AB em torno de um eixo AC ; a superfície de um toro ou anel, pela rotação de uma circunferência em relação a um eixo não secante. Um *corpo de revolução* é um corpo que pode ser gerado pela rotação de uma superfície plana em torno de um eixo fixo. Uma esfera sólida pode ser obtida pela rotação de um semicírculo; um cone, pela rotação de uma superfície triangular, e um toro sólido, pela rotação de um círculo (Fig. 5.14).

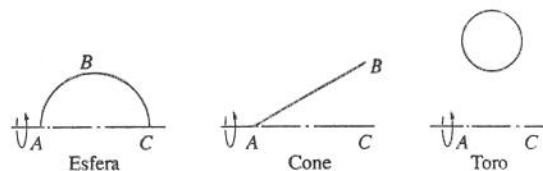


Figura 5.13 Geração de uma superfície de revolução.

Teorema I. A área de uma superfície de revolução é igual ao comprimento da curva geratriz multiplicada pela distância percorrida pelo centróide da curva durante a geração da superfície.

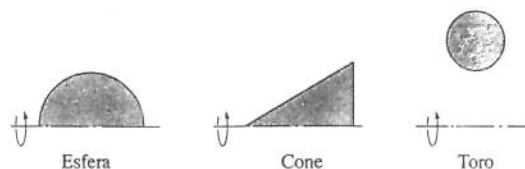


Figura 5.14 Geração de um corpo de revolução.

Prova. Consideremos um elemento dL da linha L (Fig. 5.15), que gira ao redor do eixo x . A área dA gerada pelo elemento dL é igual a $2\pi y dL$. Assim, a área total gerada por L é $A = \int 2\pi y dL$.

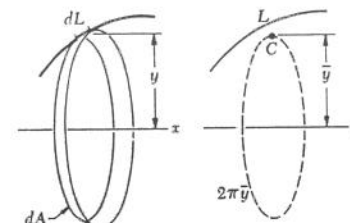


Figura 5.15

Mas, como vimos na Seção 5.3, a integral $\int y dL$ é igual a $\bar{y}L$. Temos, portanto,

$$A = 2\pi \bar{y}L \quad (5.10)$$

onde $2\pi \bar{y}$ é a distância percorrida pelo centróide de L . Deve-se observar que a curva geratriz não deve cruzar o eixo em torno do qual gira; se o fizesse, as duas seções em ambos os lados do eixo gerariam áreas de sinais opostos, e o teorema não se aplicaria.

Teorema II. O volume de um corpo de revolução é igual à área geratriz multiplicada pela distância percorrida pelo centróide da superfície, durante a geração do corpo.

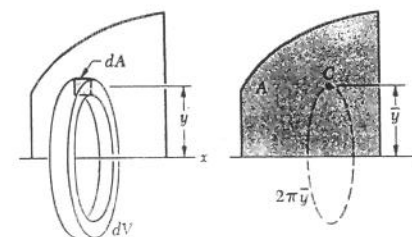


Figura 5.16

Prova. Consideremos um elemento dA da superfície A que é girado em relação ao eixo x (Fig. 5.16). O volume dV gerado pelo elemento dA é igual a $2\pi y dA$. Por conseguinte, o volume total gerado por A é $V = \int 2\pi y dA$. Mas, como a integral $\int y dA$ é igual a $\bar{y}A$ (Seção 5.3), temos

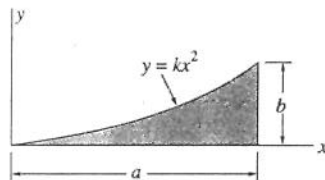
$$V = 2\pi \bar{y} A \quad (5.11)$$

onde $2\pi \bar{y}$ é a distância percorrida pelo centróide de A . Novamente, deve-se observar que o teorema não se aplica se o eixo de rotação é secante à superfície geratriz.

Os teoremas de Pappus-Guldin oferecem um modo simples de calcular a área de superfícies de revolução e o volume de corpos de revolução. Também podem ser utilizados, reciprocamente, para determinar o centróide de uma curva plana quando a área da superfície gerada pela curva é conhecida ou para determinar o centróide de uma superfície plana quando o volume do corpo gerado pela superfície é conhecido (ver Prob. Resolvido 5.8).

Problema Resolvido 5.4

Determinar, por integração direta, o centróide da superfície sob a parábola.



Solução. O valor de k é determinado pela substituição de $x = a$ e $y = b$ na equação dada. Temos $b = ka^2$, portanto, $k = b/a^2$. A equação da curva é, por conseguinte,

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} *$$

* Essa equação vale somente para o semi-eixo $x > 0$, sobre o qual a figura do problema está contida, o que explica o fato de ter sido desprezado o ramo da parábola correspondente a $x < 0$. (N. do R. T.)

Elemento Diferencial Vertical. Escolhemos o elemento de área ilustrado e encontramos a área total da figura:

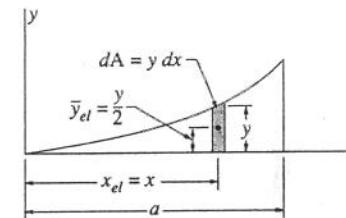
$$A = \int dA = \int y dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ab}{3}$$

O momento estático do elemento diferencial em relação ao eixo y é $\bar{x}_{el} dA$, e o momento da área total em relação a esse eixo é

$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int xy dx = \int_0^a x \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

Como $Q_y = \bar{x}A$, temos

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA \quad \bar{x} \frac{ab}{3} = \frac{a^2 b}{4} \quad \bar{x} = \frac{3}{4} a \Leftarrow$$



Da mesma maneira, o momento estático do elemento diferencial em relação ao eixo x é $\bar{y}_{el} dA$, e o momento estático da área total é:

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 dx = \left[\frac{b^2}{2a^4} \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

Como $Q_x = \bar{y}A$ temos

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA \quad \bar{y} \frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \quad \bar{y} = \frac{3}{10} b \leftarrow$$

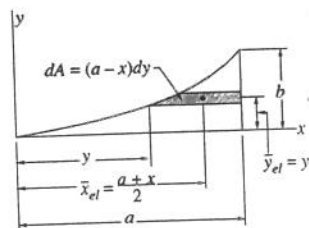
Elemento Diferencial Horizontal. O mesmo resultado pode ser obtido se consideramos um elemento horizontal. Os momentos estáticos da área são

$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{a+x}{2} (a-x) dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b} y \right) dy = \frac{a^2 b}{4}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int y (a-x) dy = \int y \left(a - \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} \right) dy$$

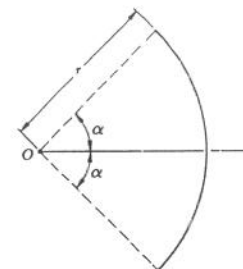
$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}} y^{3/2} \right) dy = \frac{ab^2}{10}$$



Esses elementos são novamente substituídos nas equações que definem o centróide da área para obter $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Problema Resolvido 5.5

Determinar o centróide do arco de circunferência ilustrado.



Solução. Como o arco é simétrico em relação ao eixo x , temos $\bar{y} = 0$. Um elemento diferencial é escolhido conforme a figura, e o comprimento do arco é determinado por integração:

$$L = \int dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} r d\theta = r \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = 2r\alpha$$

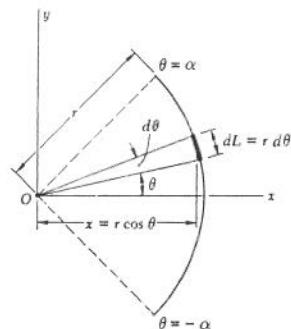
O momento do arco em relação ao eixo y é

$$Q_y = \int x dL = \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \theta) (r d\theta) = r^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta = r^2 [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} = 2r^2 \sin \alpha$$

Como $Q_y = \bar{x}L$, temos

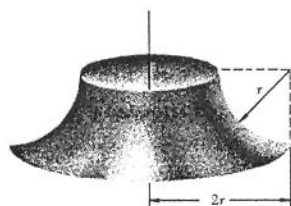
$$\bar{x}(2r\alpha) = 2r^2 \sin \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \leftarrow$$



Problema Resolvido 5.6

Determinar a área de superfície de revolução ilustrada, obtida pela rotação de um arco de quarto de circunferência em torno de um eixo vertical.

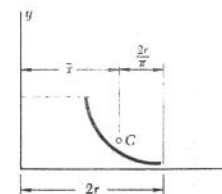


Solução. De acordo com o teorema I de Pappus-Guldin, a área gerada é igual ao produto do comprimento do arco pela distância percorrida por seu centróide. Reportando-nos à Fig. 5.8b, temos

$$\bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r \left(1 - \frac{1}{\pi} \right)$$

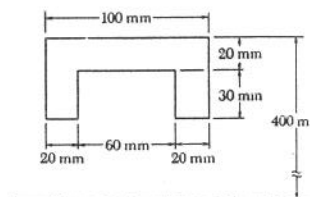
$$A = 2\pi \bar{x} L = 2\pi 2r \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) \frac{\pi r}{2}$$

$$A = 2\pi r^2 (\pi - 1) \leftarrow$$

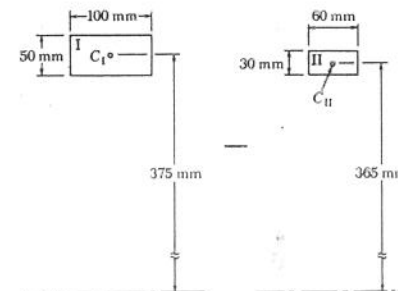


Problema Resolvido 5.7

O diâmetro externo de uma polia mede 0,800 m e a seção reta de seu aro está ilustrada na figura. Determinar a massa e o peso do aro, sabendo-se que a polia é feita de aço e que sua massa específica é $\rho = 7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.



Solução. O volume do aro pode ser encontrado pelo teorema II de Pappus-Guldin, o qual estabelece que o volume é igual ao produto da área da seção dada pela distância percorrida por seu centróide em uma revolução completa. Entretanto, o volume será mais facilmente obtido se observarmos que a seção reta consiste em um retângulo (I) com uma área positiva e um retângulo (II) com uma área negativa.



Compo- nente	Área, mm ²	$\bar{y}$, mm	Distância Percorrida por C, mm	Volume, mm ³
I	$+5,00 \times 10^3$	375	$2\pi(375) = 2,36 \times 10^3$	$(5,00 \times 10^3)(2,36 \times 10^3) = 11,80 \times 10^6$
II	$-1,80 \times 10^3$	365	$2\pi(365) = 2,29 \times 10^3$	$(-1,80 \times 10^3)(2,29 \times 10^3) = -4,12 \times 10^6$
				Volume do aro = $7,70 \times 10^6$

Como $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, temos $1 \text{ mm}^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$ e $V = 7,65 \times 10 \text{ mm}^3 = (7,70 \times 10^6)(10^{-9} \text{ m}^3) = 7,70 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

$$m = \rho V = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7,70 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \quad m = 60,0 \text{ kg} \leftarrow$$

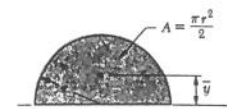
$$P = mg = (60,0 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 589 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad P = 589 \text{ N} \leftarrow$$

Problema Resolvido 5.8

Usando os teoremas de Pappus-Guldin, determinar: (a) o centróide de uma superfície semicircular e (b) o centróide de uma semicircunferência. Lembramos que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi r^3$ e que a área de sua superfície é $4\pi r^2$.

Solução. O volume de uma esfera é igual ao produto da área de um semicírculo pela distância percorrida pelo centróide do semicírculo em uma revolução em torno do eixo x:

$$V = 2\pi\bar{y}A \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right) \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \leftarrow$$



Do mesmo modo, a área de uma esfera é igual ao produto do comprimento da semicircunferência geratriz pela distância percorrida por seu centróide em uma revolução:

$$A = 2\pi\bar{y}L$$

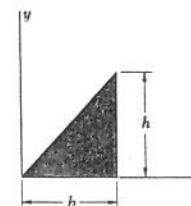
$$4\pi r^2 = 2\pi\bar{y}(\pi r)$$

$$\bar{y} = \frac{2r}{\pi} \leftarrow$$

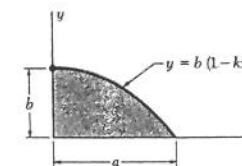


Problemas

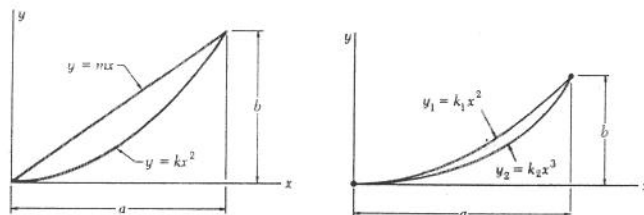
5.39 a 5.42 Determine, diretamente por integração, o centróide da superfície da figura.



Figuras P5.39



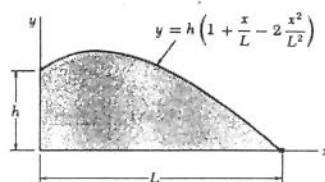
Figuras P5.40



Figuras P5.41 e P5.42

5.43 a 5.48 Obtenha, diretamente por integração, as expressões para $\bar{x}$ e $\bar{y}$ dadas na Fig. 5.8 para:

- 5.43 Superfície sob uma parábola de grau n ($y = kx^n$).
- 5.44 Um quarto da superfície limitada por uma elipse.
- 5.45 Semicírculo.
- 5.46 Superfície semiparabólica.
- 5.47 Setor circular.
- 5.48 Um quarto de circunferência.
- 5.49 Determine, diretamente por integração, a coordenada x do centróide da superfície da figura.
- 5.50 Determine, diretamente por integração, a coordenada y do centróide da superfície da figura.



Figuras P5.49 e P5.50

*5.51 e *5.52 Determine, diretamente por integração, o centróide da superfície da figura.

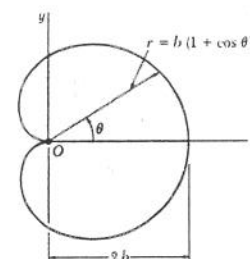


Figura P5.51

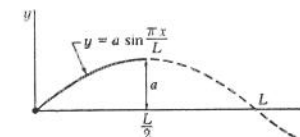
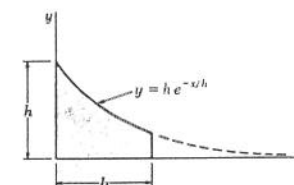


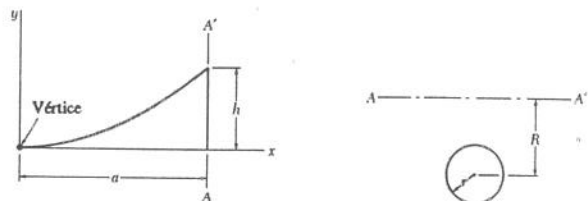
Figura P5.52

- 5.53 Determine o centróide da superfície escurecida, com $b = h$.
- 5.54 Determine o centróide da superfície da figura, com $b \rightarrow \infty$.



Figuras P5.53 e P5.54

- 5.55 Determine o volume do sólido gerado pela rotação da superfície do Prob. 5.6 em torno do eixo: (a) x e (b) y .
- 5.56 Determine o volume do sólido gerado pela rotação do trapézio do Prob. 5.2 em torno do eixo: (a) x e (b) y .
- 5.57 Determine o volume do sólido gerado pela rotação da superfície escurecida, sob a parábola, em torno do eixo: (a) x e (b) AA' .
- 5.58 Determine a área e o volume do toro gerado pela rotação do círculo da figura em torno do eixo AA' .



Figuras P5.57 e P5.58

5.59 Sabendo que duas calotas iguais foram cortadas de uma esfera de madeira de 25 cm de diâmetro, determine a área total da parte restante.

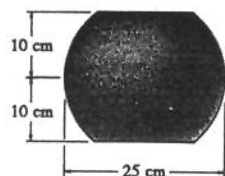


Figura P5.59

5.60 Determine o volume e o peso do sólido do Prob. 5.59. (Peso específico da madeira = $7,40 \times 10^3 \text{ N/m}^3$.)

5.61 Um recipiente de alta pressão tem um diâmetro interno de 1,60 m. Determine: (a) o volume do propano líquido necessário para encher o recipiente até uma altura de 1,20 m e (b) a massa dessa quantidade de propano. (A massa específica do propano líquido é 580 kg/m^3 .)

5.62 Determine a área da superfície de contato entre o recipiente do Prob. 5.61 e o propano líquido.

5.63 Determine o volume e a área do corpo da figura.

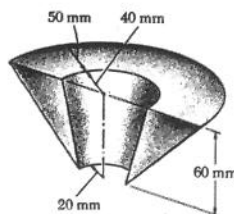


Figura P5.63

5.64 Determine o volume e a massa da peça de ferro fundido obtida pela rotação da superfície quadrangular escurecida em torno do eixo de simetria do cano de 12 mm de diâmetro. (Massa específica do ferro fundido = $7,20 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)

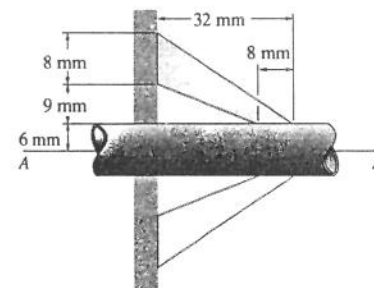
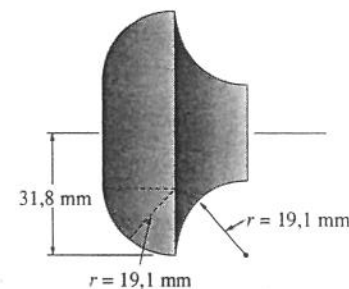


Figura P5.64

5.65 Determine o volume e o peso do botão sólido de bronze da figura. (O peso específico do bronze é $83,0 \times 10^3 \text{ N/m}^3$.)

5.66 Determine a área total do botão sólido da figura.



Figuras P5.65 e P5.66

5.67 O aro de uma polia com dois sulcos em V tem um diâmetro externo de 30 cm, é feito de ferro fundido e pesa 37,5 N. Sabendo que a área da seção reta do arco é 494 m^2 , determine a distância $\bar{y}$ do eixo de rotação AA' ao centróide da seção reta do aro. (O peso específico do ferro fundido é $84,0 \times 10^3 \text{ N/m}^3$.)

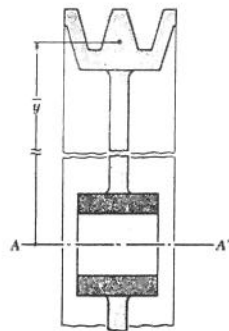


Figura P5.67

5.68 A figura mostra uma seção reta de uma betoneira móvel. Determine de modo aproximado: (a) o volume da caçamba e (b) a área das partes curvas da caçamba.

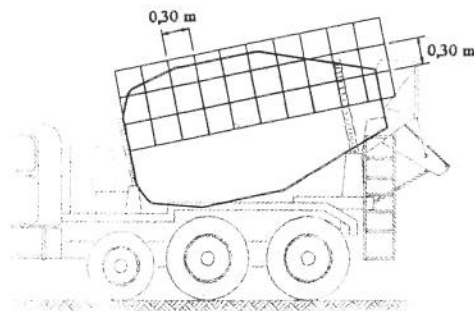


Figura P5.68

5.69 Uma lâmpada de 60 W tem sua seção reta mostrada na figura. Desprezando a espessura do vidro, calcule para a parte acima da base: (a) o volume de gás inerte dentro do bulbo e (b) a área da superfície externa do bulbo.

5.70 Determine o volume do sólido de revolução formado pela rotação de cada uma das figuras planas da figura em torno da aresta vertical (AB). Mostre que os volumes dos sólidos formados estão na razão 6:4:3:2:1.

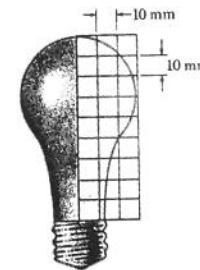
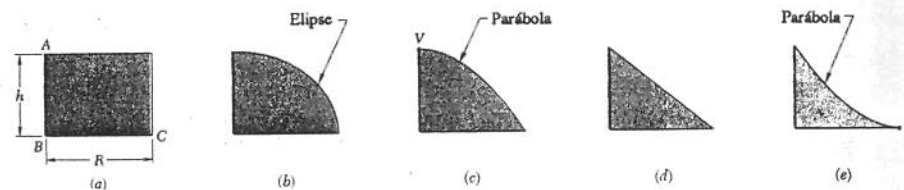


Figura P5.69

5.71 Determine o volume do sólido de revolução formado pela rotação de cada uma das figuras planas da figura em torno da base (BC). Mostre que os volumes dos sólidos formados estão na razão 15:10:8:5:3.



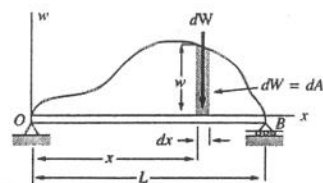
Figuras P5.70 e P5.71

5.8. Cargas Distribuídas sobre Vigas. O conceito de centróide de uma superfície pode ser utilizado para resolver outros problemas, além dos referentes ao peso de placas planas. Consideremos, por exemplo, uma viga que suporte uma *carga distribuída*. Essa carga pode ser constituída pelo peso de materiais apoiados direta ou indiretamente sobre a viga ou ser causada pelo vento ou pressão hidrostática. A carga distribuída pode ser representada pelo diagrama de uma carga w suportada por unidade de comprimento (Fig. 5.17). Essa carga será expressa em N/m. O módulo da força exercida sobre um elemento de viga dx é, portanto, $dw = w dx$, e a carga total suportada pela viga é

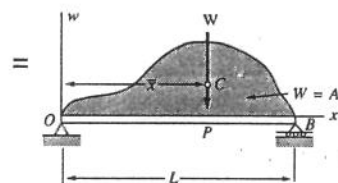
$$W = \int_0^L w dx$$

Mas o produto $w dx$ é igual, em módulo, ao elemento de área dA mostrado na Fig. 5.17a, e W é, por conseguinte, igual à área* total A sob a curva de carga:

$$W = \int dA = A$$



(a)



(b)

Figura 5.17

Determinaremos agora onde uma carga única concentrada W , do mesmo módulo W que a carga distribuída total, deverá ser aplicada sobre a viga, para produzir as mesmas reações nos apoios (Fig. 5.17b). Essa carga concentrada W , que representa a resultante do dado carregamento distribuído, deve ser equivalente a esse carregamento no que se refere ao diagrama de corpo livre da viga.

O ponto de aplicação P da carga concentrada equivalente W será então obtido igualando-se o momento de W em relação ao ponto O à soma dos momentos das cargas elementares dW em relação a O :

$$(OP)W = \int x dW$$

* Vide observação no rodapé da pág. 104 (N. do R. T.)

ou, como $dW = w dx = dA$ e $W = A$,

$$(OP)A = \int_0^L x dA \quad (5.12)$$

Como a integral representa o momento estático em relação ao eixo w da superfície sob a curva de carga, ela pode ser substituída pelo produto $\bar{x}A$. Por conseguinte, temos $OP = \bar{x}$, onde $\bar{x}$ é a distância do eixo w ao centróide C da superfície A (este não é o centróide da viga).

Uma carga distribuída sobre uma viga pode ser então substituída por uma carga concentrada; o módulo dessa única carga é igual à área sob a curva de carga e sua linha de ação passa pelo centróide dessa superfície. Contudo, deve-se notar que a carga é equivalente ao carregamento dado unicamente no que se refere às forças externas. Isto pode ser utilizado para determinar as reações, mas não deve ser utilizado no cálculo de forças internas e deflexões.

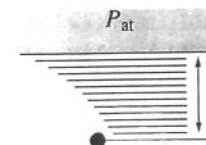
5.9. Forças sobre Superfícies Submersas. Outro exemplo do uso de momentos estáticos e centróides de áreas é obtido pela consideração das forças exercidas sobre uma superfície retangular submersa em um líquido. Consideremos a placa retangular ilustrada na Fig. 5.18. Ela tem um comprimento L e sua largura, perpendicular ao plano da figura, é igual à unidade. Como a pressão manométrica* dentro de um líquido é $p = \gamma h$, onde γ é o peso específico do líquido e h a distância à superfície livre, a pressão na placa varia linearmente com a distância x . A largura da placa sendo tomada igual à unidade, a pressão p é igual em módulo à carga w por unidade de comprimento usada na Seção 5.8.** Os resultados obtidos naquela seção podem ser, então, usados aqui, e encontramos que o módulo da resultante R das forças exercidas sobre uma face da placa é igual à área sob a curva de pressão. Verificamos também que a linha de ação de R passa através do centróide C dessa superfície.

* Pressão manométrica em um ponto de um líquido é a diferença entre a pressão no ponto e a pressão na superfície. Na superfície age a pressão atmosférica, que não é considerada. A pressão absoluta no ponto do líquido será a soma da pressão manométrica com a pressão atmosférica:

$$p_{\text{man}} = \gamma h$$

$$p_{\text{abs}} = \gamma h + \gamma_{\text{at}}$$

(N. do R. T.)



** Observamos que, enquanto a carga w por unidade de comprimento é expressa em N/m , a pressão p , que representa uma carga por unidade de área, é expressa em N/m^2 . A correspondente unidade do SI, N/m^2 , é denominada pascal (Pa).

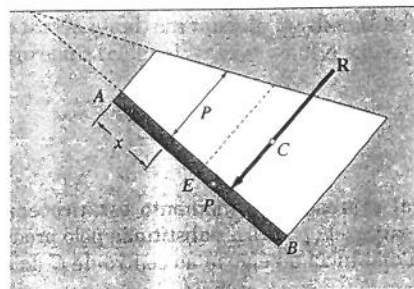


Figura 5.18

Observando que a área sob a curva de pressão é igual a $p_E L$, onde p_E é a pressão no centro E da placa e L o comprimento (ou área*) da placa, notamos que o módulo R da resultante pode ser obtido pela multiplicação da área da placa pela pressão em seu centro E . Contudo, a resultante R não deve ser aplicada em E . Como foi indicado acima, sua linha de ação passa através do centróide C da área sob a curva de pressão. O ponto de aplicação P da resultante R é conhecido como *centro de pressão*.

Consideremos, a seguir, as forças exercidas por um líquido sobre uma superfície curva de largura constante (Fig. 5.19a). Como a determinação da resultante R dessas forças, por integração direta, não seria fácil, consideraremos o diagrama de corpo livre obtido destacando o volume ABD do líquido, limitado pela superfície curva AB e pelas duas superfícies planas AD e DB ilustradas na Fig. 5.19b. As forças que atuam sobre o corpo livre ABD são o peso W do volume do líquido destacado, a resultante R_1 das forças exercidas sobre AD , a resultante R_2 das forças exercidas sobre BD e a resultante $-R$ das forças exercidas pela superfície curva sobre o líquido. Essa última resultante é igual, oposta e tem a mesma linha de ação da resultante R das forças exercidas pelo líquido sobre a superfície curva; portanto denominaremos essa resultante $-R$. As forças W , R_1 e R_2 podem ser determinadas pelos métodos convencionais; após terem sido encontrados seus valores, será obtida a força $-R$ pela resolução das equações de equilíbrio de corpo livre da Fig. 5.19b. A resultante R das forças hidrostáticas exercidas sobre a superfície curva será, então, obtida trocando-se o sinal de $-R$.

Os métodos desenvolvidos nesta seção podem ser utilizados para determinar a resultante das forças hidrostáticas sobre superfícies de diques ou comportas retangulares e lâminas. As resultantes das forças submersas sobre superfícies de larguras variáveis serão determinadas pelos métodos do Cap. 9.

* A superfície de uma placa retangular de comprimento L e largura b unitária tem uma área cujo valor coincide numericamente com o valor do comprimento L pois $L \cdot b = L \cdot 1 = L$ unidades de área. (N. do R. T.)

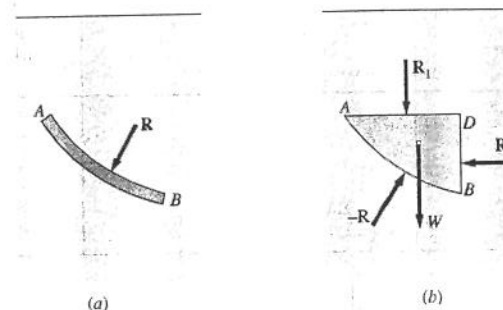
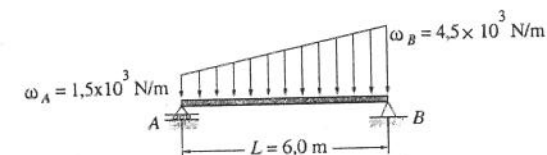


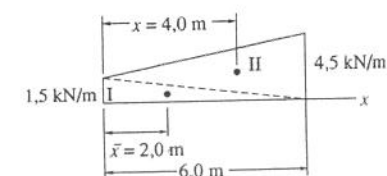
Figura 5.19

Problema Resolvido 5.9

Uma viga suporta uma carga distribuída conforme ilustrado. (a) Determinar a carga concentrada equivalente. (b) Determinar as reações nos apoios.

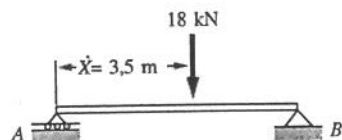


a) **Carga Concentrada Equivalente.** O módulo da resultante do carregamento é igual à área sob a curva de carga, e a linha de ação da resultante passa pelo centróide da referida área. Dividimos a área sob a curva de carga em dois triângulos e construímos a tabela. Para simplificar os cálculos e a tabulação, as cargas por unidade de comprimento foram convertidas em kN/m .



Componente	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Triângulo I	4,5	2,0	9,0
Triângulo II	13,5	4,0	54,0
	$\Sigma A = 18,0$	...	$\Sigma \bar{x}A = 63$

Então $\bar{X} \Sigma A = \Sigma \bar{x}A$: $\bar{X} (18 \text{ kN}) = 63 \text{ kN} \cdot \text{m}$ $\bar{X} = 3,5 \text{ m}$



A carga concentrada equivalente é

$$W = 18 \text{ kN} \downarrow \Leftarrow$$

e sua linha de ação está situada a uma distância

$$\bar{X} = 3,5 \text{ m à direita de A} \Leftarrow$$

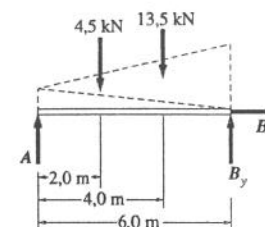
b) **Reações.** A reação em A é vertical e denominada A; a reação em B é representada por suas componentes B_x e B_y . A carga dada pode ser considerada como a soma das duas cargas triangulares indicadas. A resultante de cada carga triangular é igual à área do triângulo* e atua em seu centróide. Escrevemos as seguintes equações de equilíbrio para o diagrama de corpo livre mostrado:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0 \Leftarrow$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma M_A = 0: & \quad -(4,5 \text{ kN})(2,0 \text{ m}) - (13,5 \text{ kN})(4,0 \text{ m}) + B_y(6,0 \text{ m}) = 0 \\ & \quad B_y = 10,5 \text{ kN} \uparrow \Leftarrow \end{aligned}$$

* Vide observação no rodapé da pág. 104. (N. do R. T.)

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma M_B = 0 & \quad + (4,5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + (13,5 \text{ kN})(2 \text{ m}) - A(6 \text{ m}) = 0 \\ & \quad A = 7,5 \text{ kN} \uparrow \Leftarrow \end{aligned}$$

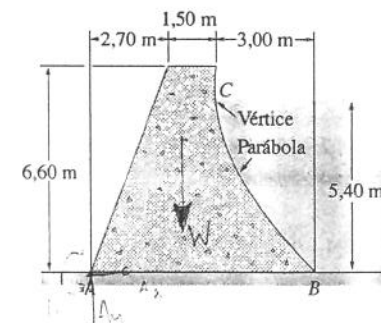


Solução Alternativa. O carregamento distribuído dado pode ser substituído por sua resultante, que foi encontrada no item (a). As reações podem ser determinadas escrevendo-se as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$. E temos, novamente,

$$\begin{aligned} B_x &= 0 & B_y &= 10,5 \text{ kN} \uparrow & A &= 7,5 \text{ kN} \uparrow \Leftarrow \end{aligned}$$

Problema Resolvido 5.10

A figura mostra a seção transversal de um dique de concreto. Considerar a seção do dique com 1,00 m de espessura e determinar: (a) a resultante das forças reativas exercidas pelo solo sobre a base AB do dique e (b) a resultante das forças de pressão exercidas pela água sobre a face BC do dique. Peso específico do concreto = $23,5 \times 10^3 \text{ N/m}^3$; da água = $9,81 \times 10^3 \text{ N/m}^3$.



a) **Reação do Solo.** Escolhemos como corpo livre uma seção AEFCD, de 1,00 m de espessura, do dique e da água, como ilustrado. As forças reativas exercidas pelo solo sobre a base AB são representadas por um sistema força-binário equivalente em A. Outras forças que atuam sobre o corpo livre são o peso do dique, representado pelo peso de suas componentes W_1 , W_2 e W_3 , o peso da água W_4 e a resultante P das forças de pressão exercidas sobre a seção BD, pela água situada a sua direita. Temos

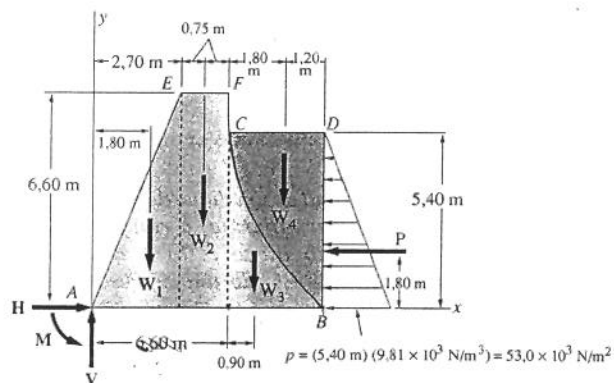
$$W_1 = \frac{1}{2} (2,70 \text{ m})(6,60 \text{ m})(1,00 \text{ m})(23,5 \times 10^3 \text{ N/m}^3) = 209 \times 10^3 \text{ N}$$

$$W_2 = (1,50 \text{ m})(6,60 \text{ m})(1,00 \text{ m})(23,54 \times 10^3 \text{ N/m}^3) = 233 \times 10^3 \text{ N}$$

$$W_3 = \frac{1}{3} (3,0 \text{ m})(5,40 \text{ m})(1,00 \text{ m})(23,54 \times 10^3 \text{ N/m}^3) = 127 \times 10^3 \text{ N}$$

$$W_4 = \frac{2}{3} (3,0 \text{ m})(5,40 \text{ m})(1,00 \text{ m})(9,81 \times 10^3 \text{ N/m}^3) = 106 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = \frac{1}{2} (5,4 \text{ m})(1,00 \text{ m}) \times (53,0 \times 10^3 \text{ N/m}^2) = 143 \times 10^3 \text{ N}$$



Equações de Equilíbrio

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad H - 143 \times 10^3 \text{ N} = 0 \quad H = 143 \times 10^3 \text{ N} \rightarrow \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V - 209 \times 10^3 \text{ N} - 233 \times 10^3 \text{ N} - 127 \times 10^3 \text{ N} - 106 \times 10^3 \text{ N} = 0$$

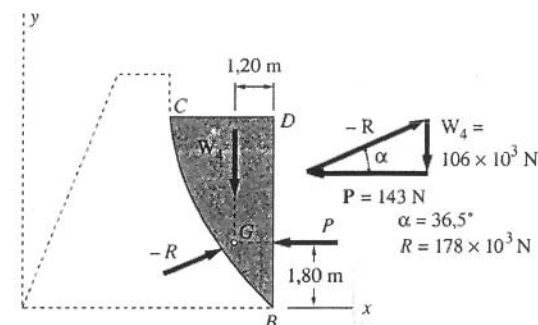
$$V = 675 \times 10^3 \text{ N} \uparrow \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma M_A = 0: \quad - (209 \times 10^3 \text{ N})(1,80 \text{ m}) - (233 \times 10^3 \text{ N})(3,45 \text{ m}) - (127 \times 10^3 \text{ N})(5,10 \text{ m}) - (106 \times 10^3 \text{ N})(6,00 \text{ m}) + (143 \times 10^3 \text{ N})(1,80 \text{ m}) + M = 0$$

$$M = 2,21 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow \leftarrow$$

Podemos substituir o sistema força-binário obtido por uma força única que atua à distância d à direita de A, onde

$$d = \frac{2,21 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}}{675 \times 10^3 \text{ N}} \quad d = 3,27 \text{ m} \leftarrow$$



b) **Resultante R das Forças da Água.** A seção parabólica da água BCD é escolhida como um corpo livre. As forças envolvidas são: a resultante $-R$ das forças exercidas pelo dique sobre a água, o peso W_4 e a força P . Como essas forças devem ser concorrentes, $-R$ passa pelo ponto de interseção G de W_4 e P . Desenha-se um triângulo de forças, do qual é determinado o módulo e a direção de $-R$. A resultante R das forças exercidas pela água sobre a face BC é igual e oposta:

$$R = 178 \times 10^3 \text{ N} \nearrow 36,5^\circ \leftarrow$$

Problemas

5.72 e 5.73 Determine o módulo e a localização da resultante das cargas distribuídas da ilustração. Calcule também as reações em A e B.

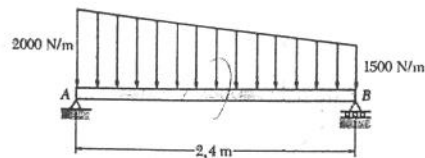


Figura P5.72

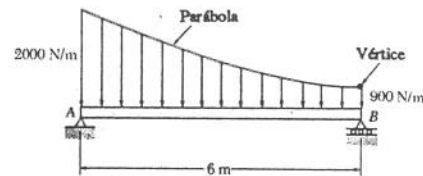


Figura P5.73

5.74 a 5.79 Determine as reações nos apoios das vigas para as condições de carregamento dadas.

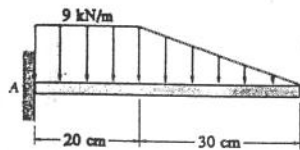


Figura P5.74

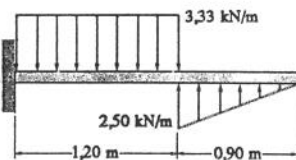


Figura P5.75

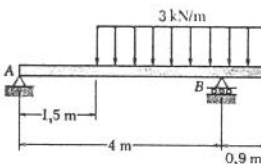


Figura P5.76

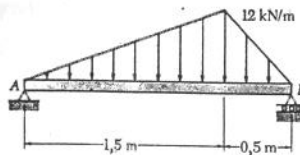


Figura P5.77

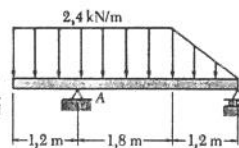


Figura P5.78

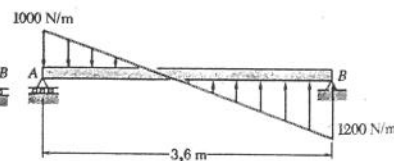
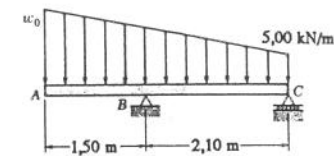


Figura P5.79

5.80 Determine as reações nos apoios das vigas para as condições de carregamento dadas, quando $w_0 = 6,67 \text{ kN/m}$.

5.81 Determine: (a) a carga distribuída w_0 na extremidade A da viga ABC de modo que a reação em C seja nula e (b) a correspondente reação em B.



Figuras P5.80 e P5.81

5.82 A viga AB está submetida a duas cargas concentradas e apoiada no solo, o qual exerce uma carga distribuída, linear, como mostra a figura. Determine os valores de w_A e w_B correspondentes ao equilíbrio.

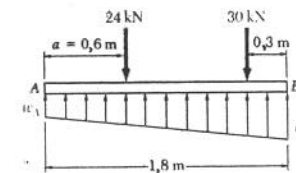


Figura P5.82

5.83 Com referência ao Prob. 5.82, determine: (a) a distância a para a qual $w_A = 20 \text{ kN/m}$ e (b) o valor correspondente de w_B .

Nos problemas abaixo, utilize os valores $\gamma = 1,00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ para a massa específica da água e $\gamma_c = 2,40 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ para a massa específica do concreto.

5.84 e 5.85 A figura mostra a seção de uma represa de concreto. Considere uma seção de 1 m de espessura e determine: (a) a resultante das forças de reação do solo sobre a base AB da represa e (b) a resultante das forças devidas à pressão da água na face BC da represa.

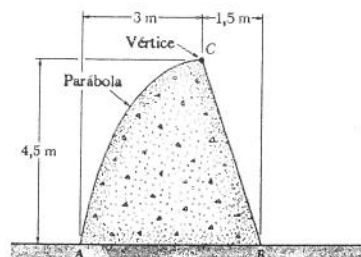


Figura P5.84

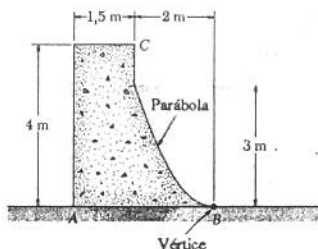


Figura P5.85

5.86 Uma comporta de $1,5 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$ está localizada em uma parede, abaixo do nível da água. (a) Determine a intensidade e a localização da resultante das forças exercidas pela água na comporta. (b) Se a comporta está articulada em sua borda superior A, determine a força aplicada na comporta pela escora BC.

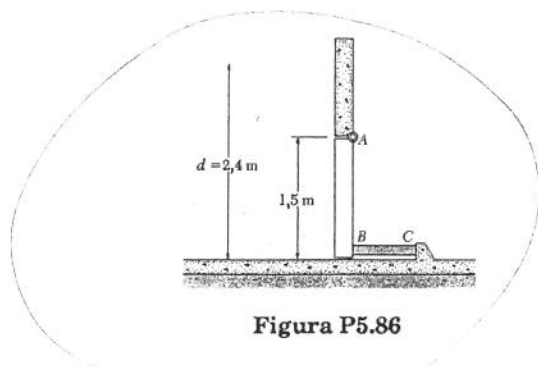


Figura P5.86

5.87 No Prob. 5.86, determine a profundidade d da água para que a força aplicada pela escora BC na comporta seja de: (a) 20 kN e (b) 9 kN.

5.88 Uma válvula automática é constituída de uma placa de $225 \text{ mm} \times 225 \text{ mm}$ que pode girar em torno de um eixo horizontal em A, que fica a uma distância $h = 90 \text{ mm}$ acima da borda inferior. Determine a profundidade d da água para a qual a válvula se abre.

5.89 Com referência ao Prob. 5.88, se a válvula se abrir quando a profundidade da água for $d = 450 \text{ mm}$, determine a distância h da borda inferior da válvula ao eixo que passa por A.

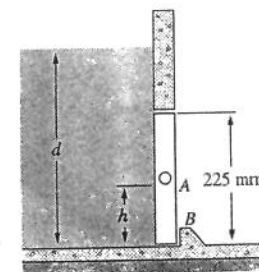


Figura P5.88 e P5.89

5.90 A comporta AB fica no extremo de um canal de água de 2 m de largura e está suspensa por dobradiças presas em sua borda superior A. Sabendo que o fundo do canal é liso, determine as reações em A e B com $d = 2,4 \text{ m}$.

5.91 Resolva o Prob. 5.90 com $d = 1,8 \text{ m}$.

5.92 A comporta quadrada AB é mantida na posição da figura por dobradiças presas a sua borda superior A e por um pino em B. Para uma profundidade de água $d = 1,05 \text{ m}$, determine a força aplicada na comporta pelo pino.

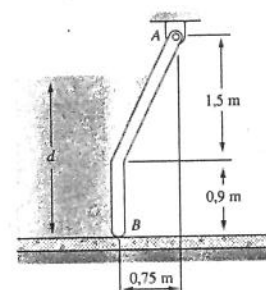


Figura P5.90

5.93 Resolva o Prob. 5.92 com $d = 1,50 \text{ m}$.

5.94 Um recipiente é suportado por uma dobradiça contínua presa a sua borda inferior e por cabos horizontais presos a sua borda superior. Determine a tração em cada cabo quando o recipiente está completamente cheio de água.

5.95 Determine o menor valor possível da largura a da represa retangular de concreto para que ela não tombe girando em torno de A quando $d = 3,0 \text{ m}$. Suponha que exista vedação em B para que não haja pressão da água embaixo da represa.

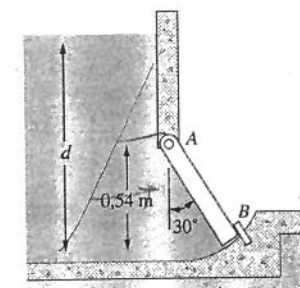


Figura P5.92

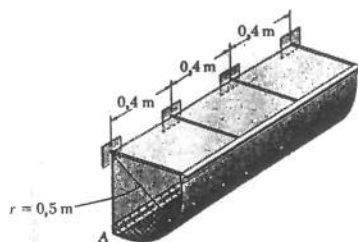
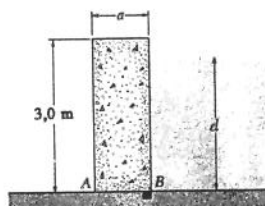


Figura P5.94

5.96 Resolva o Prob. 5.95 supondo que haja vedação apenas em A e que a pressão hidrostática embaixo da represa seja igual à pressão em B.

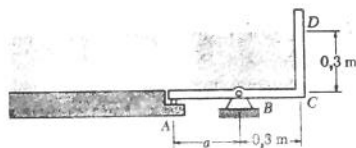
5.97 Sabendo que a largura da represa retangular de concreto é $a = 0,90$ m, determine o maior valor possível para a profundidade d da água, a fim de que a represa não tombe girando em torno de A. Suponha que há vedação em B para que não haja pressão da água embaixo da represa.



Figuras P5.95 e P5.97

5.98 A extremidade de um canal de água é formada por uma chapa ABCD de 0,4 m de largura, articulada em B. Sabendo que $a = 0,5$ m, determine as reações em A e B.

5.99 No Prob. 5.98, determine o comprimento a para o qual a reação em A é nula.



Figuras P5.98 e P5.99

Sólidos

5.10. **Baricentro de um Corpo Tridimensional. Centróide de um Sólido.*** O baricentro G de um corpo tridimensional é obtido dividindo-se o corpo em pequenos elementos e considerando que o peso P do corpo, aplicado em G, é equivalente ao sistema de forças distribuídas ΔP , representativas dos pesos dos pequenos elementos. Escolhendo o eixo y vertical, com sentido positivo para cima (Fig. 5.20), e denominando $\bar{r}$ o vetor-posição de G, escrevemos que P é igual à soma dos pesos elementares ΔP e que seu momento em relação a O é igual à soma dos momentos em relação a O dos pesos elementares:

$$\begin{aligned} \Sigma F: \quad & -Pj = \Sigma(-\Delta P j) \\ \Sigma M_O: \quad & \bar{r} \times (-Pj) = \Sigma[\bar{r} \times (-\Delta P j)] \end{aligned} \quad (5.13)$$

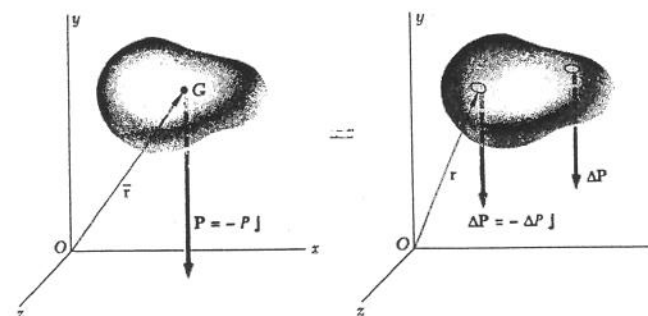


Figura 5.20

Reescrevendo a última equação na forma

$$\bar{r}P \times (-j) = (\Sigma r \Delta P) \times (-j) \quad (5.14)$$

* Neste capítulo, entende-se por sólido a noção geométrica comum. O termo volume refere-se a um número que representa a medida do volume do sólido, como é costume em vernáculo corrente. (N. do R. T.)

observamos que o peso P do corpo será equivalente ao sistema dos pesos elementares ΔP se forem satisfeitas as seguintes condições:

$$P = \Sigma \Delta P \quad \bar{r}P = \Sigma r \Delta P$$

Aumentando o número de elementos e diminuindo, simultaneamente, o tamanho de cada elemento, obtemos no limite:

$$P = \int dP \quad \bar{r}P = \int r dP \quad (5.15)$$

Observamos que as relações obtidas são independentes da orientação do corpo. Por exemplo, se o corpo e os eixos coordenados fossem girados de tal modo que o eixo z apontasse para cima, o vetor unitário $-\mathbf{j}$ seria substituído por $-\mathbf{k}$ nas Eqs. (5.13) e (5.14), mas as relações (5.15) permaneceriam inalteradas. Decompondo os vetores $\bar{r}$ e $\mathbf{r}$ em componentes cartesianas, verificamos que a segunda das relações (5.15) é equivalente às três equações escalares

$$\bar{x}P = \int x dP \quad \bar{y}P = \int y dP \quad \bar{z}P = \int z dP \quad (5.16)$$

Se o corpo é feito de material homogêneo de peso específico γ , o valor dP do peso de um elemento infinitesimal pode ser expresso em função do volume dV do elemento, e o peso total P em função do volume V . Escrevemos:

$$dP = \gamma dV \quad P = \gamma V$$

Substituindo dP e P na segunda das relações (5.15), escrevemos

$$\bar{r}V = \int \mathbf{r} dV \quad (5.17)$$

Edmarkson Ferreira

ou, na forma escalar,

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV \quad (5.18)$$

O ponto de coordenadas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ é também conhecido como centróide C do sólido de volume V . Se o corpo não é homogêneo, as Eqs. (5.18) não podem ser usadas para determinar o baricentro do corpo; elas ainda definem, entretanto, o centróide do sólido.

A integral $\int x dV$ é conhecida como momento estático ou momento de primeira ordem do sólido em relação ao plano yz . Analogamente, as integrais $\int y dV$ e $\int z dV$ definem os momentos estáticos ou momentos de primeira ordem do sólido em relação ao plano zx e ao plano xy , respectivamente. Vê-se pelas Eqs. (5.18) que, se o centróide de um sólido está localizado em um plano coordenado, o momento estático do sólido em relação a esse plano é zero.

Um sólido é considerado simétrico em relação a um dado plano se a todo ponto P do sólido corresponde um ponto P' do mesmo sólido tal que o segmento PP' seja perpendicular ao dado plano e dividido em duas partes iguais por esse plano. O plano é chamado *plano de simetria* do sólido. Quando um sólido V possui um plano de simetria, o momento estático de V em relação ao plano é nulo e o centróide do sólido deve estar localizado nesse plano. Quando um sólido tem dois planos de simetria, o centróide do sólido deve estar localizado sobre a reta intersecção dos dois planos. Finalmente, quando um sólido possui três planos de simetria que se interceptam num ponto definido (isto é, não ao longo de uma reta comum), o ponto de intersecção dos três planos deve coincidir com o centróide do sólido. Essa propriedade nos permite determinar, imediatamente, o centróide de esferas, elipsóides, cubos, paralelepípedos retangulares etc.

Centróides de sólidos não-simétricos ou de sólidos que possuam somente um ou dois planos de simetria serão determinados por integração (Seção 5.12). Centróides de formas usuais de sólidos estão indicados na Fig. 5.21. Deve-se observar que o centróide de um sólido de revolução em geral *não coincide* com o centróide de sua seção transversal. Por exemplo, o centróide de um hemisfério é diferente do de um semicírculo, e o centróide de um cone é diferente do de um triângulo.

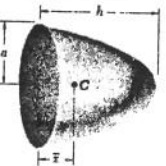
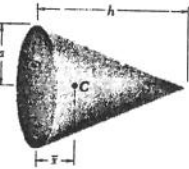
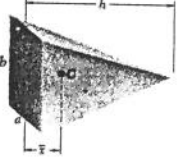
Forma		$\bar{x}$	Volume
Hemisfério		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semi-elipsóide de revolução		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Parabolóide de revolução		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
Cone		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Prisma		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{2}abh$

Figura 5.21 Centróides de formas usuais de sólidos.

5.11. Corpos Compostos. Se um corpo pode ser dividido em diversos outros que possuem as formas usuais ilustradas na Fig. 5.21, seu baricentro G pode ser determinado igualando-se o momento de seu peso total em relação a O à soma dos momentos dos pesos das várias partes componentes em relação a esse mesmo ponto. Procedendo como na Seção 5.10, obtemos as seguintes equações, que definem as coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ e $\bar{Z}$ do baricentro G :

$$\bar{X} \Sigma P = \Sigma \bar{x} P \quad \bar{Y} \Sigma P = \Sigma \bar{y} P \quad \bar{Z} \Sigma P = \Sigma \bar{z} P \quad (5.19)$$

Se o corpo é feito de material homogêneo, seu baricentro coincide com o centróide de seu volume, podendo-se utilizar as seguintes equações:

$$\bar{X} \Sigma V = \Sigma \bar{x} V \quad \bar{Y} \Sigma V = \Sigma \bar{y} V \quad \bar{Z} \Sigma V = \Sigma \bar{z} V \quad (5.20)$$

5.12. Determinação dos Centróides Sólidos por Integração. O centróide de um sólido limitado por superfícies analíticas pode ser determinado pelo cálculo das integrais dadas na Seção 5.10:

$$\bar{x} V = \int x dV \quad \bar{y} V = \int y dV \quad \bar{z} V = \int z dV \quad (5.21)$$

Se o elemento dV escolhido é igual a um pequeno cubo de lados dx , dy e dz , a determinação de cada uma dessas integrais requer uma integração tripla, em x , y e z . Contudo, será possível determinar as coordenadas do centróide da maioria dos sólidos por *dupla integração* se dV for escolhido como sendo igual ao volume de uma fibra delgada, ilustrado na Fig. 5.22. As coordenadas do centróide do sólido são então obtidas escrevendo-se

$$\bar{x} V = \int \bar{x}_{el} dV \quad \bar{y} V = \int \bar{y}_{el} dV \quad \bar{z} V = \int \bar{z}_{el} dV \quad (5.22)$$

e substituindo-se o volume dV e as coordenadas $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ e $\bar{z}_{el}$ pelas expressões dadas na Fig. 5.22. Usando a equação da superfície para exprimir z em função de x e y , a integração se reduz a uma dupla integração em x e y .

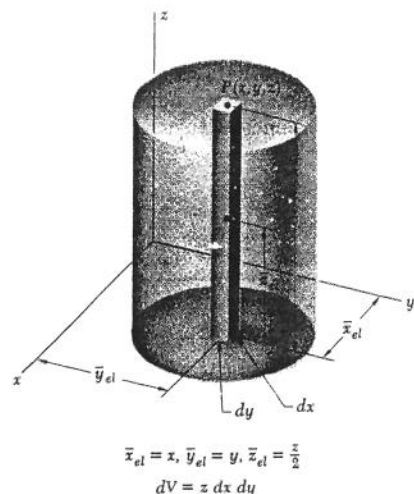


Figura 5.22 Determinação do centróide de um sólido por dupla integração.

Se o sólido em consideração possuir *dois planos de simetria*, seu centróide deve estar localizado sobre a reta de interseção desses planos. Escolhendo o eixo x ao longo dessa linha, temos

$$\bar{y} = \bar{z} = 0$$

e a única coordenada a ser determinada é $\bar{x}$. Isto será realizado mais convenientemente dividindo-se o sólido dado em finas fatias paralelas ao plano yz . No caso particular de um sólido de revolução, essas fatias são circulares e seu volume dV é dado na Fig. 5.23. Substituindo $\bar{x}_{el}$ e dV na equação

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad (5.23)$$

e exprimindo o raio r da fatia em função de x , podemos determinar $\bar{x}$ por uma única integração.

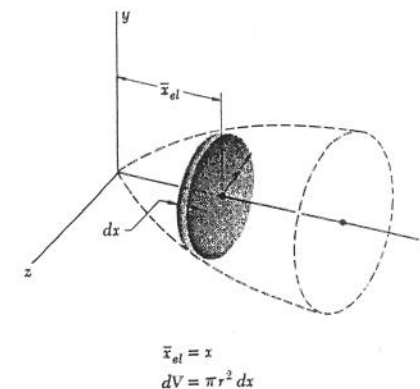
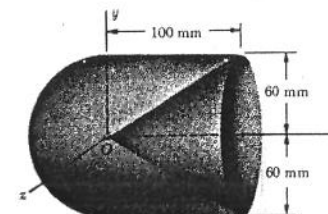


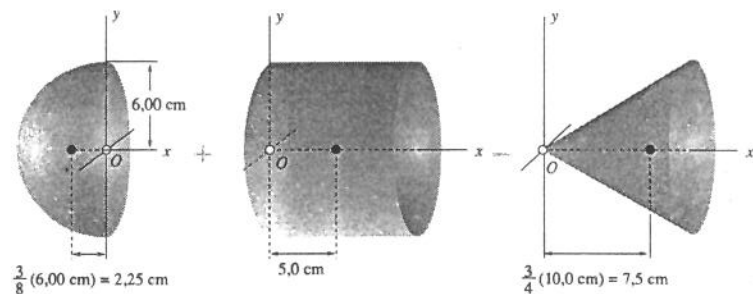
Figura 5.23 Determinação do centróide de um sólido de revolução.

Problema Resolvido 5.11

Determinar o baricentro do corpo homogêneo, de revolução, ilustrado.



Solução. Por causa da simetria, o baricentro se situa sobre o eixo x . O corpo é constituído de um hemisfério, mais um cilindro, menos um cone, como ilustrado. O volume e a abscissa do centróide de cada uma dessas componentes são obtidos da Fig. 5.21 e registrados na tabela abaixo. Todas as dimensões foram convertidas em centímetros para evitar valores numéricos excessivamente grandes no cálculo dos volumes e momentos de volumes. São calculados o volume total do corpo e o momento estático com relação ao plano yz .



Componente	Volume, cm ³	$\bar{x}$, cm	$\bar{x}V$, cm ⁴
Hemisfério	$\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} (6,00)^3 = 452$	- 2,25	$- 1,02 \times 10^3$
Cilindro	$\pi (6,00)^2 (10,0) = 1,13 \times 10^3$	+ 5,00	$+ 5,66 \times 10^3$
Cone	$-\frac{\pi}{3} (6,00)^2 (10,0) = - 377$	+ 7,50	$- 2,83 \times 10^3$
	$\Sigma V = 1,20 \times 10^3$	...	$\Sigma \bar{x}V = + 1,81 \times 10^3$

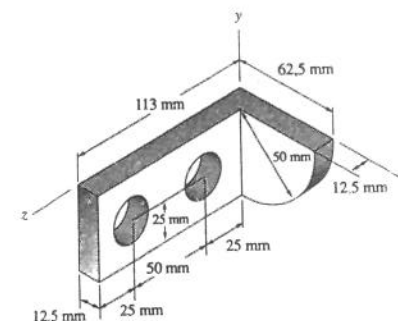
Portanto

$$\bar{X} \Sigma V = \Sigma \bar{x}V: \quad \bar{X} (1,20 \times 10^3 \text{ cm}^3) = 1,81 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

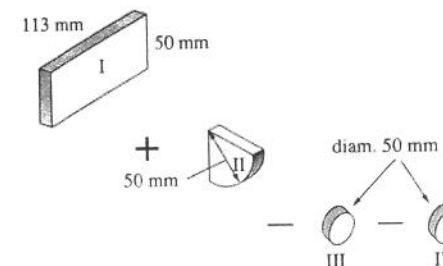
$$\bar{X} = 1,50 \text{ cm} \quad \bar{X} = 15,0 \text{ mm} \leftarrow$$

Problema Resolvido 5.12

Localize o baricentro da peça de aço da figura. Os dois furos têm 25 mm de diâmetro.



Solução. A peça é formada por um paralelepípedo retangular (I), um quarto de cilindro (II), menos dois cilindros de 25 mm de diâmetro (III e IV). O volume e as coordenadas do centróide de cada elemento são anotados na tabela abaixo. Com esses dados são então determinados o volume total e os momentos estáticos do volume em relação a cada plano coordenado.



	V, mm^3	x, mm	y, mm	z, mm	xV, mm^4	yV, mm^4	zV, mm^4
I	$(113) \times (50) \times (12,5) = 7,06 \times 10^4$	6,25	- 25,0	56,3	$44,1 \times 10^4$	$- 176,6 \times 10^4$	397×10^4
II	$\frac{1}{4} \pi (50)^2 (12,5) = 2,45 \times 10^4$	33,7	- 21,2	6,25	$82,7 \times 10^4$	$- 52,0 \times 10^4$	$15,34 \times 10^4$
III	$-\pi (12,5)^2 (12,5) = 0,614 \times 10^4$	6,25	- 25,0	87,5	$- 3,83 \times 10^4$	$15,35 \times 10^4$	$- 53,7 \times 10^4$
IV	$-\pi (12,5)^2 (12,5) = 0,614 \times 10^4$	6,25	- 25,0	37,5	$- 3,83 \times 10^4$	$15,35 \times 10^4$	$- 23,0 \times 10^4$
	$\Sigma V = 8,29 \times 10^4$				$\Sigma \bar{x} V = 119 \times 10^4$	$\Sigma \bar{y} V = -198 \times 10^4$	$\Sigma \bar{z} V = 336 \times 10^4$

Assim:

$$\bar{X} \Sigma V = \Sigma \bar{x}V: \quad \bar{X} (8,29 \times 10^4 \text{ mm}^3) = 119 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

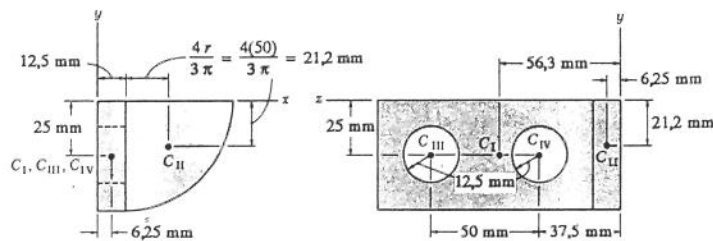
$$\bar{X} = 14,4 \text{ mm} \quad \Leftarrow$$

$$\bar{Y} \Sigma V = \Sigma \bar{y}V: \quad \bar{Y} (8,29 \times 10^4 \text{ mm}^3) = -198 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\bar{Y} = -23,9 \text{ mm} \quad \Leftarrow$$

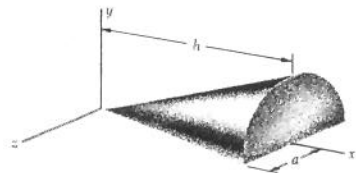
$$\bar{Z} \Sigma V = \Sigma \bar{z}V: \quad \bar{Z} (8,29 \times 10^4 \text{ mm}^3) = 336 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\bar{Z} = 40,5 \text{ mm} \quad \Leftarrow$$



Problema Resolvido 5.13

Determinar a posição do centróide do semicone circular reto ilustrado.

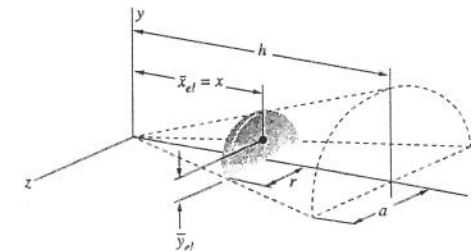


Solução. Como o plano xy é um plano de simetria, o centróide está situado nesse plano e $\bar{z} = 0$. Uma fatia de espessura dx é escolhida como o elemento diferencial. O volume desse elemento é

$$dV = \frac{1}{2} \pi r^2 dx$$

As coordenadas $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$ do centróide do elemento são obtidas da Fig. 5.8 (área semicircular):

$$\bar{x}_{el} = x \quad \bar{y}_{el} = \frac{4r}{3\pi}$$



Observamos que r é proporcional a x e escrevemos

$$\frac{r}{x} = \frac{a}{h} \quad r = \frac{a}{h} x$$

O volume do corpo é

$$V = \int dV = \int_0^h \frac{1}{2} \pi r^2 dx = \int_0^h \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h}{6}$$

O momento do elemento infinitesimal em relação ao plano yz é $\bar{x}_{el} dV$, e o momento total do corpo em relação a esse plano é

$$\int \bar{x}_{el} dV = \int_0^h x \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) dx = \int_0^h x \left(\frac{1}{2} \pi \right) \left(\frac{a}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi a^2 h^2}{8}$$

Então,

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad \bar{x} \frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{\pi a^2 h^2}{8} \quad \bar{x} = \frac{3}{4} h \quad \leftarrow$$

Da mesma maneira, o momento do elemento infinitesimal em relação ao plano xy é $y_{el} dV$, e o momento total

$$\int \bar{y}_{el} dV = \int_0^h \frac{4r}{3\pi} \left(\frac{1}{2} \pi r^2 \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^h \left(\frac{a}{h} x \right)^3 dx = \frac{a^3 h}{6}$$

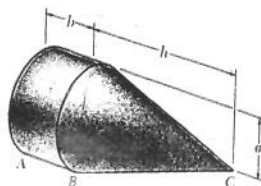
Então

$$\bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV \quad \bar{y} \frac{\pi a^2 h}{6} = \frac{a^3 h}{6} \quad \bar{y} = \frac{a}{\pi} \quad \leftarrow$$

Problemas

5.100 Determine o centróide do corpo composto da figura quando $h = 3b$.

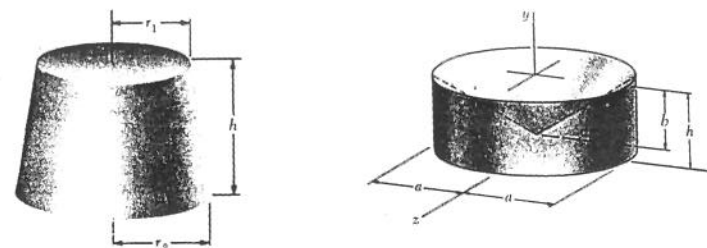
5.101 Determine o valor da razão h/b para o qual o centróide do corpo composto fica localizado no plano entre o cone e o cilindro.



Figuras P5.100 e P5.101

5.102 Localize o centróide de um tronco de cone circular reto quando $r_1 = 40$ mm, $r_2 = 50$ mm e $h = 60$ mm.

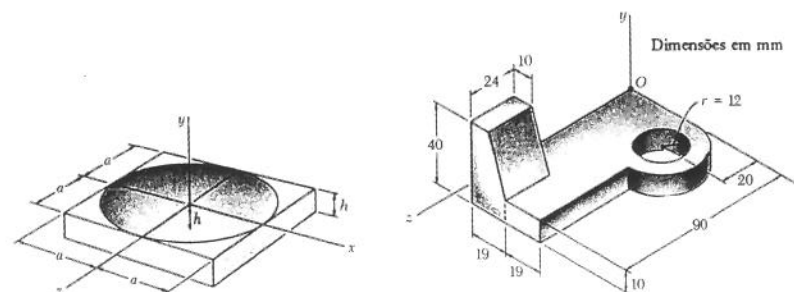
5.103 Determine a coordenada y do centróide do corpo da ilustração quando: (a) $b = 1/2 h$ e (b) $b = h$.



Figuras P5.102 e P5.103

5.104 Determine a localização do baricentro do refletor parabólico da figura, que é feito usinando-se um bloco retangular de modo que a superfície curva seja um parabolóide de revolução com raio da base a e altura h .

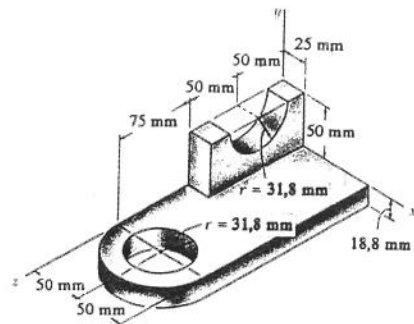
5.105 Determine a coordenada x do baricentro da peça da figura.



Figuras P5.104 e P5.105

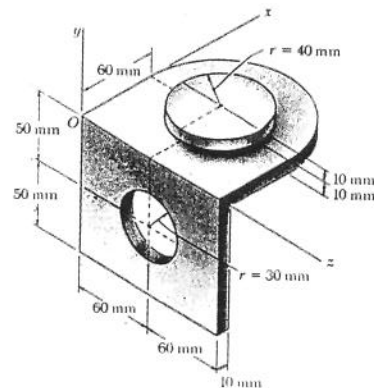
5.106 e 5.107 Determine a coordenada y do baricentro da peça da ilustração.

5.108 Determine a coordenada z do baricentro da peça da figura.



Figuras P5.107 e P5.108

5.109 Determine a coordenada x do baricentro da peça da figura.



Figuras P5.106 e P5.109

5.110 Determine a coordenada z do baricentro da peça da figura.

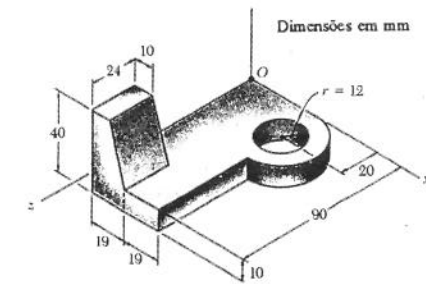
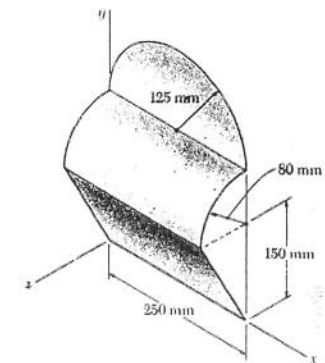
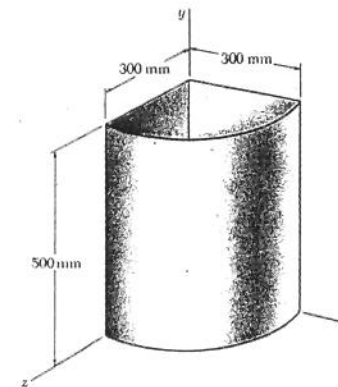


Figura P5.110

5.111 Um recipiente de lixo, feito para ajustar-se ao canto de um cômodo, tem 500 mm de altura e sua base é um quarto de círculo de raio 300 mm. Localize o baricentro do recipiente sabendo que ele é feito de uma folha de metal de espessura constante.

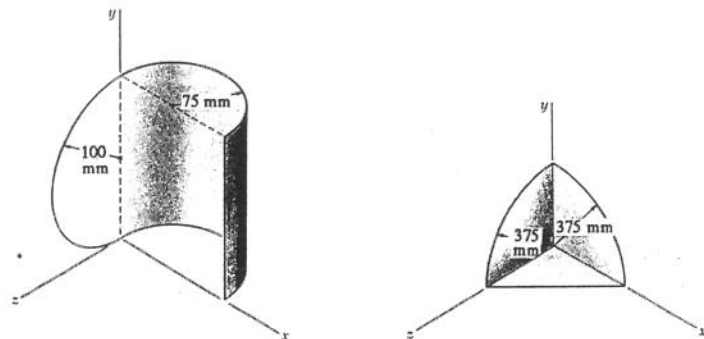
5.112 Localize o baricentro da peça da figura sabendo que ela é feita de folha de metal de espessura constante.



Figuras P5.111 e P5.112

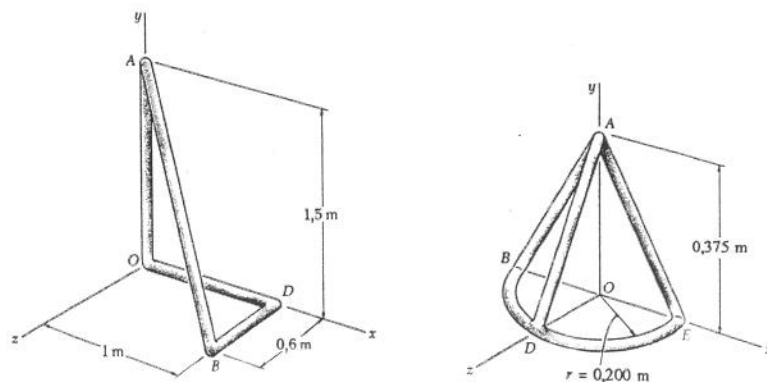
5.113 Localize o baricentro da peça da figura, formada por uma folha homogênea de metal.

5.114 Um refletor de canto, para rastreamento por radar, tem dois lados que são quartos de círculo com 375 mm de raio, e o terceiro lado tem a forma de um triângulo. Localize o baricentro do refletor sabendo que ele é feito de uma folha de metal com espessura constante.



Figuras P5.113 e P5.114

5.115 e 5.116 Localize o baricentro do objeto da figura sabendo que ele é feito de barras finas de bronze com diâmetro uniforme.



Figuras P5.115 e P5.116

5.117 Três placas de bronze são soldadas a um tubo de aço formando a base de mastro de ilustração. Sabendo que a espessura da parede do tubo é 6,25 mm e que a espessura das placas é 4,69 mm, determine a posição do baricentro da base. (Massas específicas: bronze = $8,47 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, aço = $7,86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)

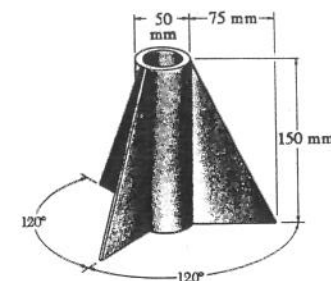


Figura P5.117

5.118 Um colar de bronze de comprimento $h = 60 \text{ mm}$ está montado em um eixo de alumínio de 100 mm de comprimento. Localize o baricentro do corpo composto. (Massas específicas: bronze = $8,47 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, alumínio = $2,80 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)

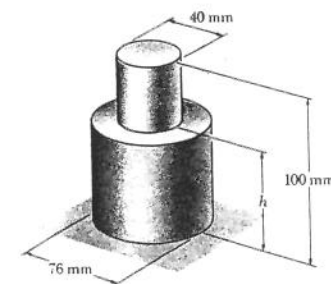
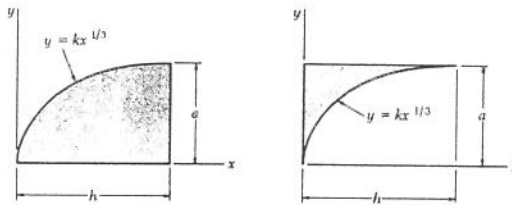


Figura P5.118

5.119 No Prob. 5.118 determine: (a) o valor de h para o qual o baricentro do corpo composto esteja o mais baixo possível e (b) a localização do baricentro correspondente.

5.120 a 5.122 Obtenha por integração a expressão dada para x na Fig. 5.21 para:

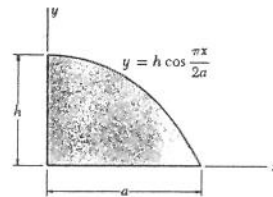
- 5.120 Um hemisfério.
- 5.121 Um semi-elipsóide de revolução.
- 5.122 Um parabolóide de revolução.
- 5.123 Localize, por integração, o centróide do tronco de cone circular reto do Prob. 5.102, expressando o resultado em termos de r_1 , r_2 e h .
- 5.124 Localize o centróide do sólido obtido pela rotação da superfície escurecida em torno do eixo x .
- 5.125 Localize o centróide do sólido obtido pela rotação da superfície escurecida em torno do eixo y .



Figuras P5.124 e P5.125

* 5.126 Localize o centróide do sólido gerado pela rotação da parte ilustrada da co-senóide em torno do eixo x .

* 5.127 Localize o centróide do sólido gerado pela rotação da parte ilustrada da co-senóide em torno do eixo y . (Sugestão: Utilize como elemento de volume uma fatia cilíndrica fina de raio r e espessura dr .)



Figuras P5.126 e P5.127

- 5.128 Localize o centróide da pirâmide irregular ilustrada.

- 5.129 Determine, por integração, a coordenada z do centróide do sólido da figura, o qual foi cortado de um prisma retangular por um plano oblíquo.

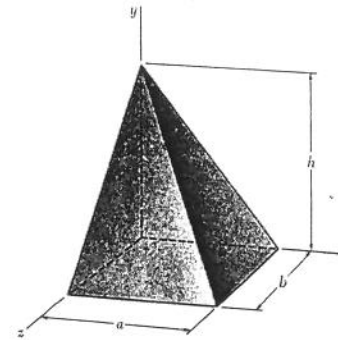


Figura P5.128

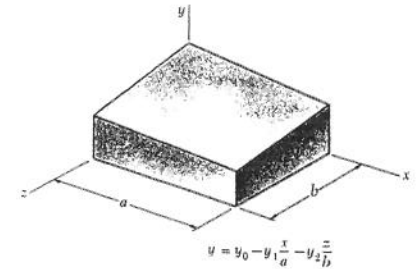


Figura P5.129

- 5.130 Resolva o Prob. 5.129 com $a = 120$ mm, $b = 90$ mm, $y_0 = 90$ mm, $y_1 = 40$ mm e $y_2 = 20$ mm.

5.131 Localize o centróide da seção ilustrada, que foi cortada de um tubo cilíndrico delgado por um plano oblíquo.

5.132 Localize o centróide da seção ilustrada, que foi cortada de um cilindro por um plano oblíquo.

5.133 Determine, por integração, a localização do centróide do sólido limitado pelo plano xz e pela porção ilustrada na superfície $y = h \sin(\pi x/a) \sin(\pi z/b)$.

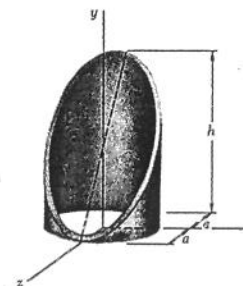


Figura P5.131

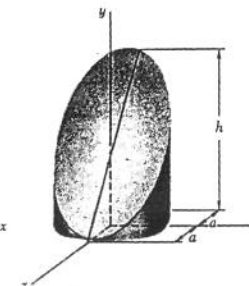


Figura P5.132

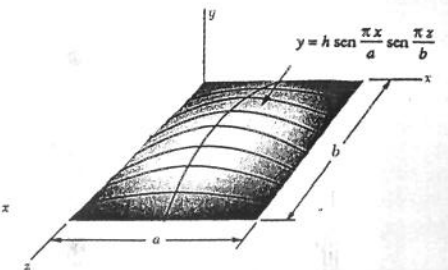


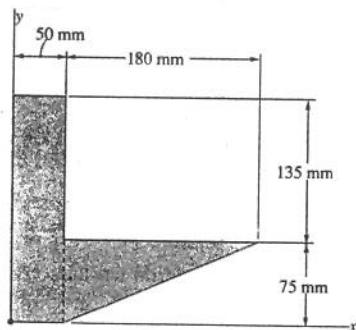
Figura P5.133

Problemas de Recapitulação

5.134 Localize o centróide da superfície plana da figura.

5.135 Determine o volume e a superfície total do sólido gerado pela rotação da figura em torno do eixo y .

5.136 O recipiente da ilustração é feito de uma folha de metal de espessura constante. Determine (a) o baricentro do recipiente com $a = 0,20$ m e $b = 0,60$ m e (b) o valor da razão a/b para o qual a coordenada do baricentro é $\bar{y} = 1/2a$.



Figuras P5.134 e P5.135

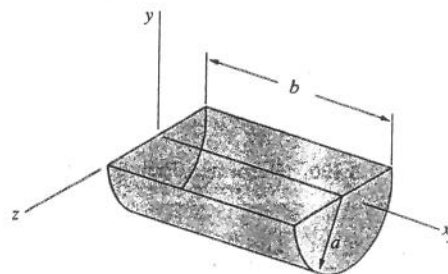


Figura P5.136

5.137 A chapa dobrada ABCD tem 1,50 m de largura e está articulada em A. Determine as reações em A e D para o nível de água da ilustração.

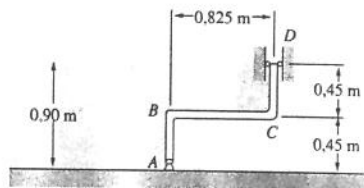
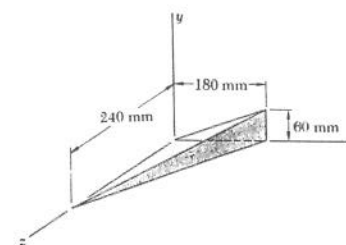
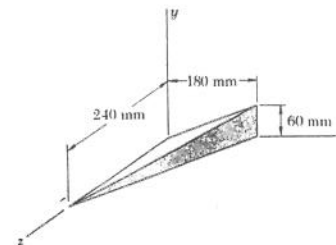


Figura P5.137

5.138 Localize o centróide da pirâmide irregular da figura. (Sugestão: Veja a Fig. 5.21.)

5.139 Localize o baricentro da peça da folha de metal ilustrada.

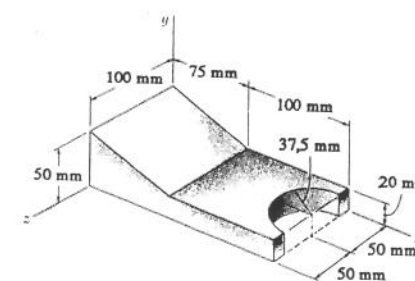
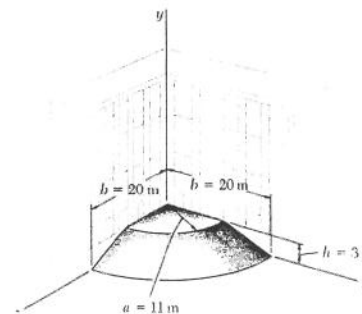


Figuras P5.138 e P5.139

5.140 A ilustração mostra o projeto original do pátio coberto na entrada de um edifício. Determine a variação do volume se as dimensões utilizadas na construção foram: (a) $a = 13$ m, $b = 22$ m e $h = 3$ m e (b) $a = 11$ m, $b = 22$ m e $h = 3$ m.

5.141 Resolva o Prob. 5.140 supondo que as dimensões finais são (a) $a = 9$ m, $b = 18$ m e $h = 3$ m e (b) $a = 9$ m, $b = 20$ m e $h = 3$ m.

5.142 Localize o baricentro da peça da figura.



Figuras P5.140 e P5.142

5.143 Determine as reações nos apoios da viga para o carregamento ilustrado.

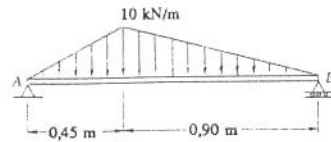


Figura P5.143

5.144 O balanceamento do copo de um velocímetro de automóvel é feito como se segue. Um copo desbalanceado é colocado sobre um eixo sem atrito em O e atinge o repouso. Um orifício é então feito em A ; o copo gira de um ângulo θ e fica novamente em repouso. O balanceamento é completado por furos adicionais em B e C . Sabendo que os três furos são iguais em tamanho e que estão à mesma distância do eixo O , determine o ângulo α requerido em função do ângulo θ .

5.145 Localize o baricentro de uma fina casca hemisférica de raio r e espessura t . (Sugestão: Considere que a casca é formada pela remoção de um hemisfério de raio r , de um hemisfério de raio $r + t$; despreze então os termos contendo r^2 e r^3 e mantenha os termos contendo t .)

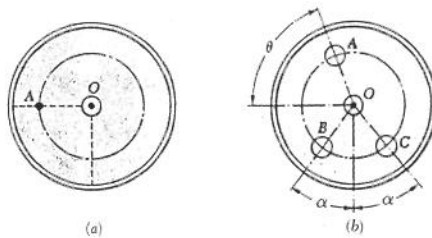


Figura P5.144

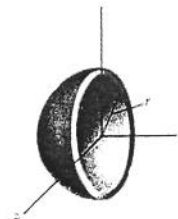


Figura P5.145

Recapitulação e Sumário

Este capítulo foi principalmente dedicado à determinação do *baricentro* de um corpo rígido, isto é, à determinação do ponto G onde uma única força P , denominada *peso* do corpo, pode ser aplicada para representar o efeito da atração da Terra sobre o corpo.

Baricentro de um corpo bidimensional

Na primeira parte do capítulo consideramos *corpos bidimensionais* como placas e fios contidos no plano xy . Somando componentes na direção vertical z e momentos em relação aos eixos horizontais y e x [Seção 5.2], deduzimos as relações

$$P = \int dP \quad \bar{x}P = \int x dP \quad \bar{y}P = \int y dP \quad (5.2)$$

que definem o peso do corpo e as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do seu baricentro.

Centróide de uma superfície ou de uma curva

No caso de uma *placa homogênea de espessura uniforme* [Seção 5.3], o baricentro G da placa coincide com o *centróide* C da superfície A da placa, cujas coordenadas são determinadas pelas equações

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

Analogamente, a determinação do baricentro de um *arame homogêneo plano de seção transversal uniforme* reduz-se à determinação do centróide C da curva L definida pela forma do arame, temos então:

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

Momentos de primeira ordem

As integrais das equações (5.3) são denominadas *momentos de primeira ordem* da superfície A em relação aos eixos y e x sendo representados por Q_y e Q_x , respectivamente [Seção 5.4]. Temos

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.6)$$

Os momentos de primeira ordem de uma curva são definidos de maneira semelhante.

Propriedades de simetria

A determinação do centróide de uma superfície ou curva é simplificada quando a superfície ou a curva tem certas *propriedades de simetria*. Se a superfície ou curva é

simétrica em relação a um eixo, seu centróide C pertence a este eixo; se for simétrica em relação a dois eixos C coincidirá com a interseção dos dois eixos, se for simétrica em relação a um centro O , C coincidirá com O .

Baricentro de barras e placas compostas

As Áreas e centróides de várias figuras comuns foram tabuladas na Figura 5.8. Quando uma placa pode ser dividida em várias destas figuras, as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do seu baricentro G podem ser determinadas a partir das coordenadas $x_1, x_2, \dots$ e $y_1, y_2, \dots$ dos baricentros $G_1, G_2, \dots$ das várias partes [Seção 5.5]. Equacionando os momentos em relação aos eixos x e y , respectivamente (Fig. 5.24), obtemos:

$$\bar{X} \Sigma P_i = \Sigma \bar{x}_i P_i \quad \bar{Y} \Sigma P_i = \Sigma \bar{y}_i P_i \quad (5.7)$$

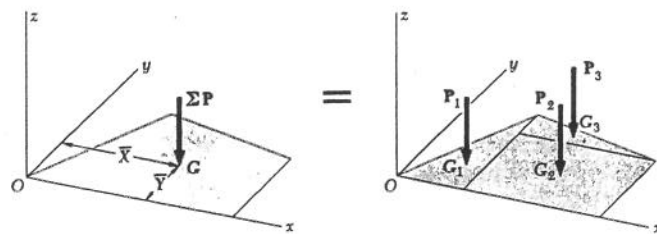


Figura 5.24

Se a placa é homogênea e de espessura constante, o baricentro coincide com o centróide C da superfície da placa e a Eq. (5.7) reduz-se a

$$Q_y = \bar{X} \Sigma A_i = \Sigma \bar{x}_i A_i \quad Q_x = \bar{Y} \Sigma A_i = \Sigma \bar{y}_i A_i \quad (5.8)$$

Estas equações determinam os momentos de primeira ordem da superfície composta ou podem ser utilizadas para determinar as coordenadas $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do seu centróide [Problema Resolvido 5.1]. A determinação do baricentro de um arame composto é feita nos mesmos moldes [Problema Resolvido 5.2].

Determinação do centróide por integração

Quando uma superfície é limitada por curvas analíticas, as coordenadas do seu centróide podem ser determinadas por integração [Seção 5.6]. Isto pode ser feito

calculando-se as integrais duplas da Eq. (5.3) ou por uma *integração simples*, utilizando um dos elementos de área da Fig. 5.12. Representadas por $\bar{x}_{el}$ e $\bar{y}_{el}$, as coordenadas do centróide do elemento de superfície de área dA , temos

$$Q_y = \bar{x} A = \int \bar{x}_{el} dA \quad Q_x = \bar{y} A = \int \bar{y}_{el} dA \quad (5.9)$$

É vantajoso usar o mesmo elemento de área para calcular os dois momentos de primeira ordem, Q_y e Q_x ; o mesmo elemento de área pode ser usado no cálculo da área A [Problema Resolvido 5.4].

Teoremas de Pappus-Guldin

Os teoremas de Pappus-Guldin, estabelecem uma relação entre os cálculos da área de uma superfície de revolução ou do volume de um sólido de revolução com a determinação do centróide da curva ou superfície geradoras [Seção 5.7]. A área A da superfície gerada pela rotação de uma curva de comprimento L em torno de um eixo fixo (Fig. 5.25 a) é

$$A = 2\pi \bar{y} L \quad (5.10)$$

onde $\bar{y}$ representa a distância do centróide C da curva ao eixo fixo. Analogamente, o volume V do corpo gerado pela rotação de uma superfície de área A em torno de um eixo fixo (Fig. 5.25 b) é

$$V = 2\pi \bar{y} A \quad (5.11)$$

onde $\bar{y}$ representa a distância do centróide C da superfície ao eixo fixo.

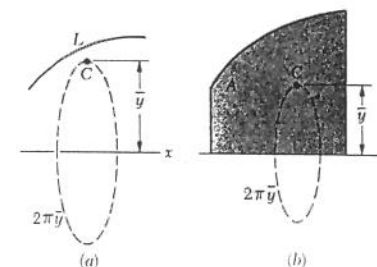


Figura 5.25

Cargas distribuídas

O conceito de centróide pode ser utilizado para resolver outros problemas não relacionados com o peso de placas planas. Por exemplo, para determinar as reações nos apoios de uma viga [Seção 5.8], podemos substituir uma *carga distribuída* w por uma carga única W de módulo igual a área sob a curva da carga (Fig. 5.26). A mesma sistemática pode ser utilizada para determinar a resultante das forças hidrostáticas exercidas sobre uma *placa retangular submersa em um líquido* [Seção 5.9].

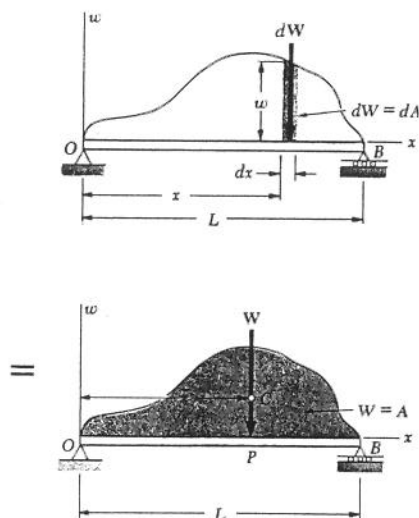


Figura 5.26

Baricentro de um corpo tridimensional

A última parte do capítulo foi dedicada à determinação do *baricentro* G de um *corpo tridimensional*. As coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ de G foram definidas pelas relações

$$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad \bar{z}W = \int z dW \quad (5.16)$$

Centróide de um sólido

No caso de um *corpo homogêneo*, o baricentro G coincide com o *centróide* C do *sólido de volume* V que representa o corpo, cujas coordenadas são determinadas pelas relações

$$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV \quad (5.18)$$

Se o sólido tem um *plano de simetria*, seu centróide jaz neste plano; se ele tiver dois planos de simetria, C estará localizado sobre a interseção dos dois planos; se ele tiver três planos de simetria, que têm apenas um ponto em comum, C coincidirá com este ponto [Seção 5.10].

Baricentro de um corpo composto

A Fig. 5.21 contém os *volumes* e os *centróides* de vários sólidos comuns, *tridimensionais*. Quando um corpo puder ser dividido em partes correspondentes a alguns destes sólidos, então as coordenadas do seu baricentro G , $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, podem ser determinadas a partir das coordenadas dos baricentros das várias partes [Seção 5.11]. Temos

$$\bar{X} \Sigma P = \Sigma \bar{x} P \quad \bar{Y} \Sigma P = \Sigma \bar{y} P \quad \bar{Z} \Sigma P = \Sigma \bar{z} P \quad (5.19)$$

Se o corpo é homogêneo, seu baricentro coincide com o centróide C do sólido que o representa e escrevemos [Problemas Resolvidos 5.11 e 5.12].

$$\bar{X} \Sigma V = \Sigma \bar{x} V \quad \bar{Y} \Sigma V = \Sigma \bar{y} V \quad \bar{Z} \Sigma V = \Sigma \bar{z} V \quad (5.20)$$

Quando um sólido é limitado por superfícies analíticas, as coordenadas do seu centróide podem ser determinadas por *integração* [Seção 5.12]. Para evitar o cálculo de integrais triplas nas Eq. (5.18), podemos utilizar os elementos de volume da Fig. 5.22. Representadas por $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$ e $\bar{z}_{el}$ as coordenadas do centróide do elemento de volume dV , escrevemos as relações

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_{el} dV \quad \bar{y}V = \int \bar{y}_{el} dV \quad \bar{z}V = \int \bar{z}_{el} dV \quad (5.22)$$

que envolvem apenas integrais duplas. Se o sólido tiver *dois planos de simetria*, seu centróide C fica localizado na interseção dos planos. Tomando o eixo x ao longo desta

interseção e dividindo o sólido em fatias finas por planos paralelos ao plano yz , determina-se C através da relação

$$\bar{x}V = \int \bar{x}_e dV \quad (5.23)$$

efetuando-se uma única integração [Problema Resolvido 5.13].

Capítulo 6

Análise de Estruturas

6.1. Introdução. Os problemas estudados nos capítulos precedentes diziam respeito ao equilíbrio de um único corpo rígido, e todas as forças consideradas eram externas ao corpo rígido. Consideraremos, agora, problemas tratando do equilíbrio de estruturas compostas de várias partes interligadas. Esses problemas tratam não apenas da determinação das forças externas que agem sobre uma estrutura, mas também da determinação das forças que mantêm unidas as várias partes da estrutura. Do ponto de vista da estrutura como um todo, essas forças são *forças internas*.

Considere-se, por exemplo, o guindaste ilustrado na Fig. 6.1a, que suporta uma carga P . O guindaste consiste em três vigas, AD , CF e BE , ligadas por pinos. Ele é articulado por um pino em A e é preso por um cabo DG . O diagrama de corpo livre do guindaste foi desenhado na Fig. 6.1b. As forças externas estão indicadas no diagrama e incluem o peso P , as duas componentes A_x e A_y da reação em A e a força T exercida pelo cabo D . As forças internas que mantêm unidas as várias partes do guindaste não aparecem no diagrama. Se, contudo, o guindaste fosse desmembrado e se fosse traçado um diagrama de corpo livre para cada uma de suas partes componentes, as forças que mantêm as três vigas unidas deveriam também ser representadas, uma vez que essas forças são forças externas sob o ponto de vista de cada parte componente (Fig. 6.1c).

Deve-se notar que a força exercida pela barra BE sobre o ponto B da barra AD foi representada como igual e oposta à força exercida no mesmo ponto da barra BE pela barra AD ; da mesma forma, a força exercida por BE sobre o ponto E de CF é igual e oposta à força exercida por CF sobre BE , e as componentes da força exercida por CF sobre o ponto C de AD são iguais e opostas às componentes da força exercida por AD sobre CF . Isto está de acordo com a terceira lei de Newton, que estabelece que forças de ação e reação entre corpos em contato possuem o mesmo módulo, a mesma linha de ação e sentidos opostos. Como mencionado no Cap. 1, essa lei é um dos seis princípios

fundamentais da Mecânica clássica e está baseada em demonstração experimental. Sua aplicação é essencial à solução de problemas envolvendo corpos interligados.

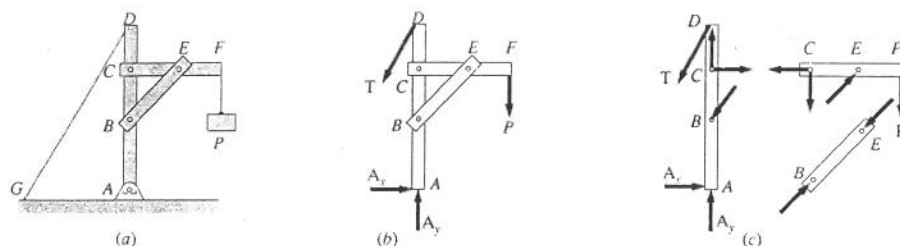


Figura 6.1

Neste capítulo serão consideradas três amplas categorias de estruturas utilizadas em trabalhos de engenharia:

1. *Treliças*, que são projetadas para suportar cargas e são, usualmente, estruturas estacionárias, totalmente vinculadas. Treliças são formadas unicamente por elementos retilíneos conectados em juntas localizadas nas extremidades de cada elemento. Dessa forma, nos membros de uma treliça atuam duas forças de mesmo módulo e direção, porém de sentidos opostos.
2. *Estruturas*, que também são projetadas para suportar cargas e que também são, em geral, estacionárias, isto é, totalmente vinculadas. As estruturas, entretanto, têm, à semelhança do guindaste da Fig. 6.1, pelo menos um elemento no qual estão aplicadas três ou mais forças que, em geral, não têm a direção do elemento.
3. *Máquinas*, que são projetadas para transmitir e modificar forças e que, em geral, contêm partes móveis. A semelhança das estruturas, as máquinas sempre contêm pelo menos um elemento sujeito a três ou mais forças.

Treliças

6.2. Definição de Treliça. A treliça é um dos principais tipos de estruturas da engenharia. Ela oferece, ao mesmo tempo, uma solução prática e econômica a muitas situações de engenharia, especialmente no projeto de pontes e edifícios. Uma treliça

consiste em barras retas articuladas nas juntas ou nós; uma treliça típica é ilustrada na Fig. 6.2a. As barras da treliça são interligadas apenas em suas extremidades; assim, nenhuma barra é contínua através de uma junta. Na Fig. 6.2a; por exemplo, não existe a barra AB; em vez disso existem duas barras distintas AD e DB. Estruturas reais são feitas de várias treliças unidas para formar uma estrutura espacial. Cada treliça é projetada para suportar as cargas que atuam em seu plano e, assim, pode ser tratada como uma estrutura bidimensional.

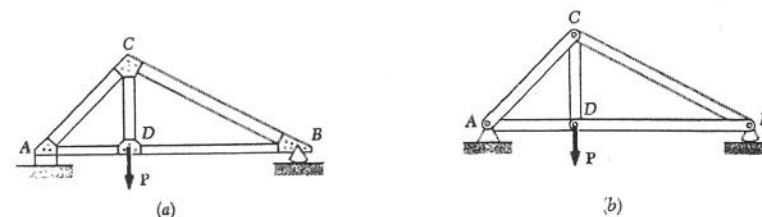


Figura 6.2

Em geral, as barras de uma treliça são delgadas e podem suportar pequena carga lateral; todas as cargas, portanto, devem ser aplicadas às várias juntas e não às barras em si. Quando uma carga concentrada é aplicada entre duas juntas, ou quando uma carga distribuída é suportada pela treliça, como no caso de uma treliça de ponte, um sistema de piso deve ser previsto, o qual, através do uso de vigas longitudinais (longarinas) e de vigas transversais (transversinas), transmite a carga às juntas (Fig. 6.3).

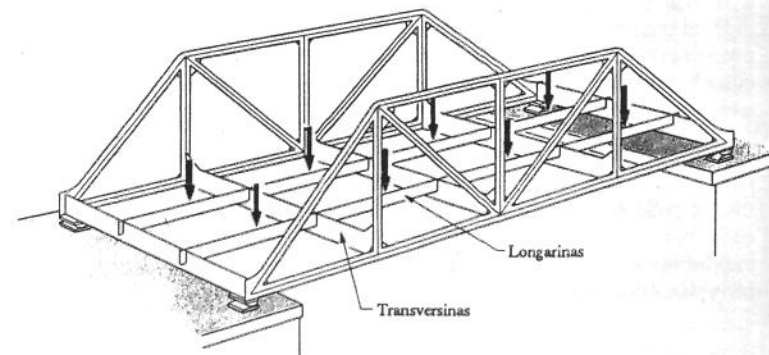


Figura 6.3

Os pesos das barras da treliça são considerados como aplicados a juntas, sendo metade do peso de cada barra aplicado a cada uma das duas juntas que a barra interliga. Embora as barras sejam, na realidade, unidas por meio de conexões rebitadas ou soldadas, costuma-se considerar que as barras são unidas por meio de pinos; portanto as forças que atuam em cada extremidade de uma barra reduzem-se a uma única força sem nenhum momento. Assim, as forças consideradas, aplicadas a uma barra de treliça, reduzem-se a uma única força em cada extremidade da barra. Cada barra pode, então, ser tratada como uma barra sob a ação de duas forças, e a treliça toda pode ser considerada como um grupo de pinos e barras com duas forças (Fig. 6.2b). A ação das forças, sobre uma barra individual, pode ocorrer do modo indicado em cada um dos croquis da Fig. 6.4. No primeiro, as forças tendem a tracionar a barra, e a barra está sob tração, enquanto no segundo croqui as forças tendem a comprimir a barra, e a mesma está sob compressão. Várias treliças típicas são ilustradas na Fig. 6.5.

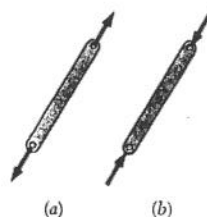


Figura 6.4

6.3. Treliças Simples. Considere-se a treliça da Fig. 6.6a, constituída de quatro barras ligadas por pinos em A , B , C e D . Se uma carga for aplicada em B , a treliça sofrerá grande deformação e perderá completamente sua forma original. Por outro lado, a treliça da Fig. 6.6b, constituída de três barras ligadas por pinos em A , B e C , deformar-se-á apenas levemente sob uma carga aplicada em B . A única deformação possível para essa treliça é aquela que envolve pequenas alterações no comprimento de suas barras.* A treliça da Fig. 6.6b é chamada de *treliça rígida*, sendo o termo rígido usado para indicar que a treliça não entrará em colapso.

Como é indicado na Fig. 6.6c, uma treliça rígida maior pode ser obtida pela adição de duas barras BD e CD à treliça triangular básica da Fig. 6.6b. Esse procedimento pode ser repetido quantas vezes se desejar, e a treliça resultante será rígida se, cada vez que adicionarmos duas novas barras, estas forem ligadas a diferentes nós existentes e interligadas em um novo nó.** Uma treliça que pode ser construída dessa maneira é chamada *treliça simples*.

* É claro que se supõe um certo limite no valor da carga aplicada. Se a tração ou compressão ultrapassar os limites admissíveis, as barras podem até romper-se (N. do R. T.)

** Os três nós não devem estar em linha reta.

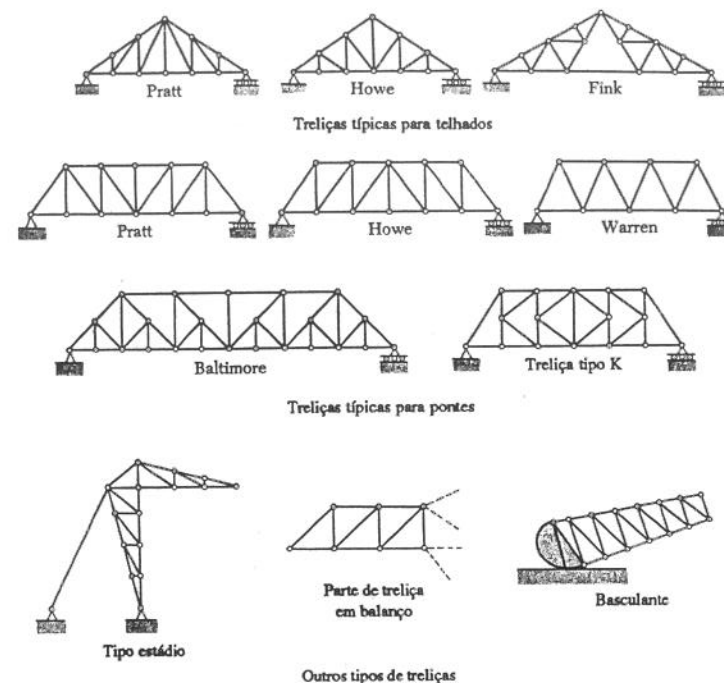


Figura 6.5

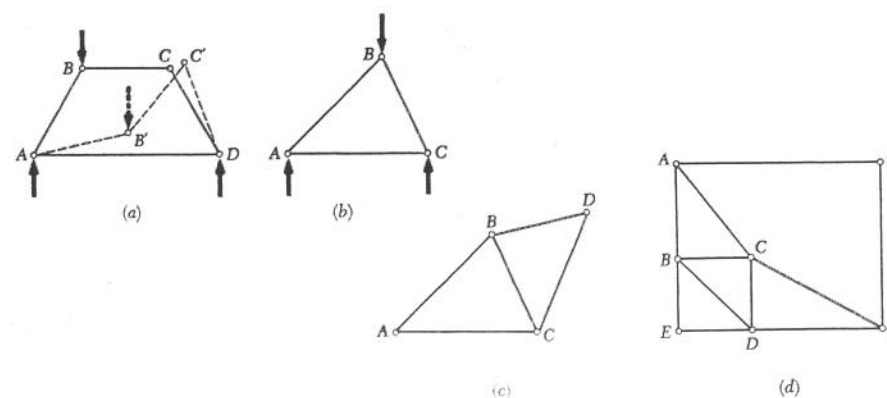


Figura 6.6

Deve-se notar que uma treliça simples não é necessariamente composta apenas de triângulos. A treliça da Fig. 6.6d, por exemplo, é uma treliça simples que foi construída a partir do triângulo ABC , adicionando-se sucessivamente as juntas (nós) D , E , F e G . Por outro lado, treliças rígidas nem sempre são treliças simples, mesmo quando parecem feitas de triângulos. As treliças tipo Fink e Baltimore, ilustradas na Fig. 6.5, por exemplo, não são treliças simples, uma vez que não podem ser construídas a partir de um único triângulo da maneira descrita acima. Todas as outras treliças ilustradas na Fig. 6.5 são treliças simples, como pode ser facilmente verificado. (Para a treliça tipo K , começa-se por um dos triângulos centrais.)

Retornando à treliça triangular básica da Fig. 6.6b, nota-se que essa treliça possui três barras e três nós. A treliça da Fig. 6.6c possui duas barras adicionais e um nó adicional, isto é, ao todo, cinco barras e quatro nós. Observando que, cada vez que duas novas barras são acrescentadas, o número de nós aumenta de um, deduz-se que, em uma treliça simples, o número total de barras é $b = 2n - 3$, onde n é o número total de nós.

6.4. Análise das Treliças pelo Método dos Nós. Foi visto na Seção 6.2 que uma treliça pode ser considerada como um grupo de pinos e barras com duas forças. A treliça da Fig. 6.2, cujo diagrama de corpo livre é ilustrado na Fig. 6.7a, pode então ser desmembrada e um diagrama de corpo livre desenhado para cada pino e cada barra (Fig. 6.7b). Cada barra está submetida a duas forças, uma em cada extremidade; essas forças possuem o mesmo módulo, a mesma linha de ação e sentidos opostos (Seção 4.6). Além disso, a terceira lei de Newton indica que as forças de ação e reação entre uma barra e um pino são iguais e opostas. Portanto as forças exercidas por uma barra sobre os dois pinos que interliga devem ser dirigidas ao longo dessa barra e ser iguais e opostas. A intensidade comum das forças exercidas por uma barra sobre os dois pinos que interliga é comumente referida como a *força na barra* considerada, muito embora essa quantidade seja na realidade um escalar. Uma vez que as linhas de ação de todas as forças internas de uma treliça são conhecidas, a análise de uma treliça se reduz ao cálculo das forças em suas várias barras e à determinação da situação em cada barra, isto é, se a mesma está sujeita a tração ou compressão.

Uma vez que a treliça está em equilíbrio, cada pino deve estar em equilíbrio. O fato de um pino estar em equilíbrio pode ser expresso pelo desenho de seu diagrama de corpo livre e por duas equações de equilíbrio (Seção 2.9). Se a treliça contém n pinos, existirão, portanto, $2n$ equações disponíveis, que podem ser resolvidas para $2n$ incógnitas. No caso de uma treliça simples tem-se $b = 2n - 3$, isto é, $2n = b + 3$, e o número de incógnitas que pode ser determinado a partir dos diagramas de corpo livre dos pinos é, assim $b + 3$. Isto significa que as forças em todas as barras, bem como as duas componentes da reação R_A e da reação R_B , podem ser determinadas considerando-se os diagramas de corpo livre dos pinos.

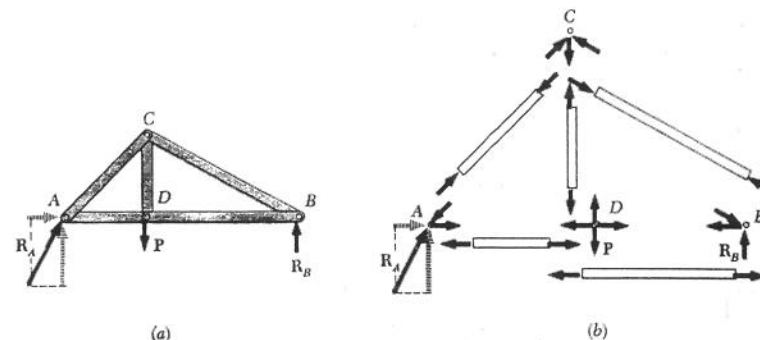


Figura 6.7

O fato de a treliça inteira ser um corpo rígido, em equilíbrio, pode ser usado para escrever três equações adicionais envolvendo as forças indicadas no diagrama de corpo livre da Fig. 6.7a. Uma vez que não contém nenhuma informação extra, essas equações não são independentes das equações associadas com os diagramas de corpo livre dos pinos. Não obstante, podem ser usadas para determinar imediatamente as componentes das reações nos apoios. A disposição de pinos e barras numa treliça simples é tal que será, então, sempre possível encontrar um nó envolvendo apenas duas forças incógnitas. Essas forças podem ser determinadas pelos métodos da Seção 2.11, e seus valores transferidos para os nós adjacentes e tratados como quantidades conhecidas nesses nós. Esse procedimento pode ser repetido até que todas as forças incógnitas tenham sido determinadas.

Como exemplo analisaremos a treliça da Fig. 6.7, considerando sucessivamente o equilíbrio de cada pino, começando por um nó no qual somente duas forças sejam desconhecidas. Na treliça considerada, todos os pinos estão submetidos a pelo menos três forças desconhecidas. Portanto as reações nos suportes devem primeiramente ser determinadas considerando-se a treliça toda como sendo um corpo livre e usando-se as equações de equilíbrio de um corpo rígido. Dessa maneira, verificamos que R_A é vertical e determinamos os módulos de R_A e R_B .

O número de forças incógnitas no nó A é então reduzido para dois, e essas forças podem ser determinadas considerando-se o equilíbrio do pino A . A reação R_A e as forças F_{AC} e F_{AD} exercidas sobre o pino A pelas barras AC e AD , respectivamente, devem formar um triângulo. Primeiro traçamos R_A (Fig. 6.8); observando que F_{AC} e F_{AD} são dirigidas segundo AC e AD , respectivamente, completamos o triângulo e determinamos o módulo e o sentido de F_{AC} e F_{AD} . Os módulos F_{AC} e F_{AD} representam as forças nas barras AC e AD . Como F_{AC} está dirigida para baixo e para a esquerda, isto é, para o pino A , a barra AC comprime o pino A e está em compressão. Por outro lado, como F_{AD} está dirigida para fora do nó, a barra AD traciona o nó A e está sob tração.

Podemos agora analisar o nó D , onde somente duas forças, F_{DC} e F_{DB} , são ainda desconhecidas. As outras forças são a carga P , que é dada, e a força F_{DA} , exercida sobre o pino pela barra AD . Como indicamos acima, essa força é igual e oposta à força F_{AD} exercida pela mesma barra sobre o pino A . Podemos traçar o polígono de forças correspondentes ao nó D , como ilustrado na Fig. 6.8, e determinar as forças F_{DC} e F_{DB} por meio desse polígono. Entretanto, quando mais de três forças estão envolvidas, é mais conveniente escrever as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, e resolvê-las para as duas forças incógnitas. Como essas forças, já encontradas, são dirigidas para fora do ponto D , as barras DC e DB puxam o pino e estão sob tração.

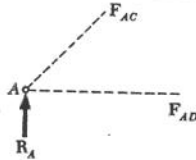
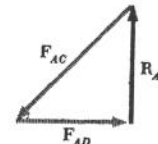
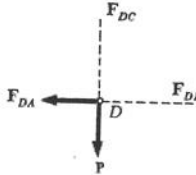
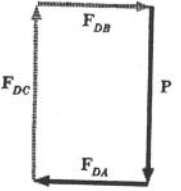
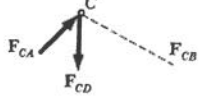
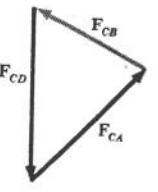
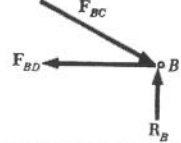
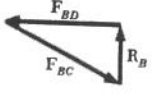
	Diagrama de corpo livre	Polígono de forças
Nó A		
Nó D		
Nó C		
Nó B		

Figura 6.8

A seguir, o nó C é considerado; seu diagrama de corpo livre está na Fig. 6.8. Observe-se que F_{CD} e F_{CA} são conhecidas da análise de nós precedentes e que somente F_{CB} é incógnita. Como o equilíbrio de cada pino possibilita informação suficiente para determinar duas incógnitas, uma verificação de nossa análise é obtida nesse nó. O triângulo de forças é traçado, e o módulo e o sentido de F_{CB} são determinados. Como F_{CB} está dirigida para o nó C , a barra CB empurra o pino C e está em compressão. O teste é obtido verificando que a força F_{CB} e a barra CB são paralelas.

No nó B todas as forças são conhecidas. Como o pino correspondente está em equilíbrio, o triângulo de forças deve fechar, e um teste adicional da análise é obtido.

Deve-se observar que os polígonos de forças mostrados na Fig. 6.8 não são únicos. Cada um deles pode ser substituído por uma configuração alternativa. Por exemplo, o triângulo de forças correspondente ao nó A pode ser traçado como mostra a Fig. 6.9. O triângulo ilustrado na Fig. 6.8 foi obtido traçando-se as três forças R_A , F_{AC} e F_{AD} , cada uma em prosseguimento à outra, de tal forma que suas linhas de ação eram encontradas movendo-se no sentido horário em torno do nó A . Os outros polígonos de força, na Fig. 6.8, tendo sido traçados do mesmo modo, podem ser ajustados num diagrama único, como mostra a Fig. 6.10.

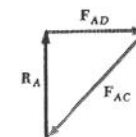


Figura 6.9

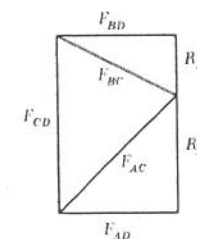


Figura 6.10

Tal diagrama, conhecido como *Diagrama de Maxwell*, facilita bastante a análise gráfica dos problemas de treliças.*

* 6.5. Nós sob Condições Especiais de Carregamento. Consideremos o nó ilustrado na Fig. 6.11a, o qual interliga quatro barras situadas em duas retas que se interceptam. O diagrama de corpo livre da Fig. 6.11b mostra que o pino A está submetido

* Para uma discussão completa dos diagramas de Maxwell, ver F. P. Beer e E. R. Johnston. *Mechanics for Engineers*. Nova York, McGraw-Hill, 1976. Seção 6.7

a dois pares de forças diretamente opostas. O correspondente polígono de forças, portanto, deve ser um paralelogramo (Fig. 6.11c), e as forças nas barras opostas devem ser iguais.

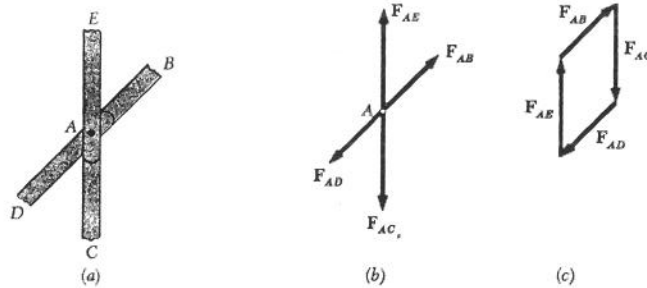


Figura 6.11

Consideremos agora o nó da Fig. 6.12a, que interliga três barras e suporta uma carga P . Duas das barras se situam sobre a mesma linha reta, e a carga P atua ao longo da terceira barra. O diagrama de corpo livre do pino A e o correspondente polígono de forças serão novamente como os indicados na Fig. 6.11b e c, com F_{AE} substituída pela carga P . Assim, as forças nas duas barras opostas devem ser iguais, e a força na outra barra deve ser igual a P . Um caso particular de especial interesse é ilustrado na Fig. 6.12b. Uma vez que, nesse caso, nenhuma carga externa é aplicada ao nó, tem-se $P = 0$, e a força na barra AC é zero. Diz-se que a barra AC é uma barra de força zero.

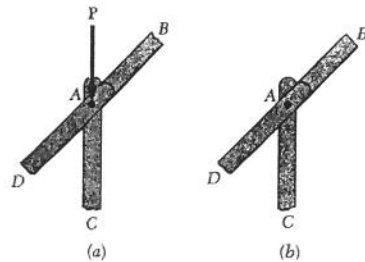


Figura 6.12

Considere-se agora um só nó ligando apenas duas barras. Sabe-se da Seção 2.9 que um ponto material submetido a duas forças estará em equilíbrio se essas forças possuírem o mesmo módulo, a mesma linha de ação e sentidos opostos. No caso do nó

da Fig. 6.13a, que liga duas barras AB e AD , situadas ao longo de uma mesma linha reta, o equilíbrio do pino A requer, portanto, que as forças nas duas barras sejam iguais. No caso do nó da Fig. 6.13b, o equilíbrio do pino A é impossível, a não ser que as forças em ambas as barras sejam nulas. Barras ligadas como está indicado na Fig. 6.13b, portanto, devem ser barras de força zero.

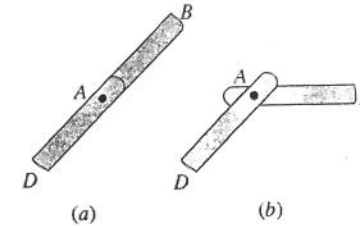


Figura 6.13

A determinação dos nós que se encontram sob condições especiais de carregamento, mencionadas acima, facilitará a análise de uma treliça. Considere-se, por exemplo, uma treliça tipo Howe carregada, como mostra a Fig. 6.14. Todas as barras representadas por linhas tracejadas serão reconhecidas como barras de força zero. O nó C interliga três barras, duas das quais se situam ao longo de uma mesma linha, e não se encontra sujeito a nenhuma carga externa; a barra BC é então uma barra de força zero. Aplicando o mesmo raciocínio ao nó K , verificamos que a barra JK é também uma barra de força zero. Então o nó J está agora na mesma situação que os nós C e K , e a barra IJ deve ser uma barra de força zero. O exame dos nós C , J e K mostra também que as forças nas barras AC e CE são iguais, que as forças nas barras HJ e JL são iguais, e que as forças nas barras IK e KL são iguais. Além disso, voltando agora nossa atenção para o nó I , onde uma carga de 20 kN e a barra HI são colineares, notamos que a força na barra HI é 20 kN (tração) e que as forças nas barras GI e IK são iguais. Dessa forma, as forças nas barras GI , IK e KL são iguais.

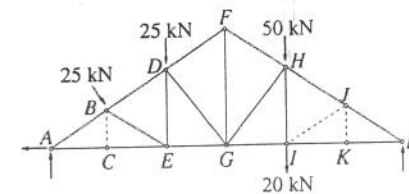


Figura 6.14

Os estudantes, contudo, devem ser advertidos contra o uso indevido das regras estabelecidas nesta seção. Por exemplo, seria errado supor que a força na barra DE é 25 kN ou que as forças nas barras AB e BD sejam iguais. As condições discutidas acima não se aplicam aos nós B e D . As forças nessas barras e em todas as restantes devem ser encontradas por meio da análise dos nós A, B, D, E, F, G, H e L da maneira usual. Até que os estudantes estejam inteiramente familiarizados com as condições de aplicação das regras estabelecidas nesta seção, seria muito aconselhável que desenhasssem os diagramas de corpo livre de todos os pinos e escrevessem as correspondentes equações de equilíbrio (ou desenhasssem os correspondentes polígonos de força), caíam ou não os nós considerados dentro das categorias acima relacionadas.

Uma última observação concernente às barras de força zero: essas barras não são inúteis. Conquanto não suportem nenhuma carga sob as condições particulares de carregamento consideradas, as barras de força zero da Fig. 6.14 provavelmente suportarão cargas se as condições de carregamento forem alteradas. Além disso, mesmo no caso considerado, essas barras são necessárias para suportar o peso da treliça e para manter a treliça na forma desejada.

***6.6. Treliças Espaciais.** Quando várias barras retas são unidas por suas extremidades para formar uma configuração tridimensional, a estrutura obtida é chamada de treliça espacial.

Recordemos da Seção 6.3 que a treliça rígida bidimensional mais elementar consiste em três barras unidas por suas extremidades para formar os lados de um triângulo; pela adição de duas barras de cada vez a essa configuração básica, e ligando-as em um novo nó, é possível obter uma estrutura rígida maior, que é chamada de treliça simples. Da mesma forma, a treliça rígida espacial mais elementar consiste em seis barras ligadas por suas extremidades, para formar as arestas de um tetraedro $ABDC$ (Fig. 6.15a). Pela adição de três barras de cada vez a essa configuração básica, tais como AE , BE e CE , fixando-as a nós existentes distintos e unindo-as em um novo nó, podemos obter uma estrutura rígida maior, que é definida como uma *treliça espacial simples* (Fig. 6.15b). Observando que o tetraedro básico possui seis barras e quatro nós e que, cada vez que três barras são adicionadas, o número de nós é acrescido de um, concluímos que em uma treliça espacial simples o número total de barras é $b = 3n - 6$, onde n é o número total de nós.

Para que uma treliça espacial seja completamente vinculada e para que as reações em seus vínculos externos sejam estaticamente determinadas, estes devem consistir em uma combinação de esferas, roletes e rótulas, fornecendo seis reações incógnitas (ver Seção 4.8). Essas reações incógnitas podem ser rapidamente determinadas resolvendo-se as seis equações que exprimem o equilíbrio da treliça tridimensional.

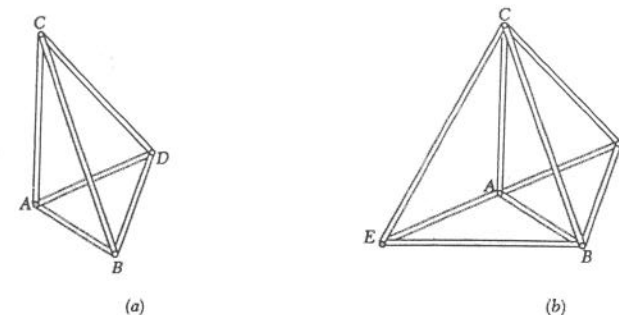


Figura 6.15

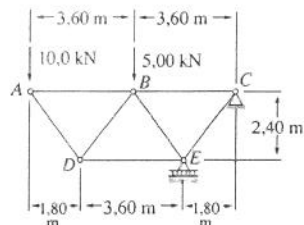
Embora as barras de uma treliça espacial sejam na realidade unidas através de conexões soldadas ou rebitadas, supõe-se que cada nó consiste em uma conexão em junta esférica.* Dessa forma, nenhum binário será aplicado às barras da treliça, e cada barra pode ser tratada como uma peça submetida a duas forças. As condições de equilíbrio para cada nó serão expressas pelas três equações $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma F_z = 0$. No caso de uma treliça espacial simples contendo n nós, as condições de equilíbrio para cada nó conduzirão, portanto, a $3n$ equações. Uma vez que $b = 3n - 6$, essas equações são suficientes para determinar todas as forças incógnitas (forças nas b barras e seis reações nos apoios). Contudo, para evitar resolução de muitas equações simultâneas, deve-se cuidar de selecionar os nós em uma ordem tal que nenhum nó selecionado envolva mais que três incógnitas.

Problema Resolvido 6.1

Empregando o método dos nós, determinar a força em cada barra da treliça ilustrada.

Solução. Um diagrama de corpo livre da treliça inteira é traçado; as forças externas que atuam nesse corpo livre consistem nas cargas aplicadas e nas reações em C e E .

* Uma junta esférica também é chamada de articulação esférica (N. do R. T.)



Equilíbrio da Trelça Inteira

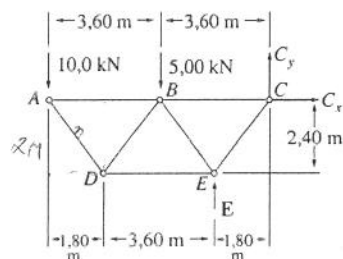
$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: (10,0 \text{ kN})(7,20 \text{ m}) + (5,00 \text{ kN})(3,60 \text{ m}) - E(1,80 \text{ m}) = 0$$

$$E = + 50,0 \text{ kN} \quad E = 50,0 \text{ kN} \uparrow$$

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad C_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -10,0 \text{ kN} - 5,00 \text{ kN} + 50,0 \text{ kN} + C_y = 0$$

$$C_y = -35,0 \text{ kN} \quad C_y = 35,0 \text{ kN} \downarrow$$

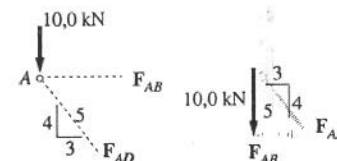


Nó A. Esse nó está submetido a somente duas forças incógnitas, que são as forças exercidas pelas barras AB e AD. Um triângulo de forças é usado para determinar F_{AB} e F_{AD} . Observe-se que a barra AB puxa esse nó e, portanto, está tracionada e que a barra AD empurra o nó, estando, portanto, sob compressão. Os módulos das duas forças são obtidos por proporção:

$$\frac{10,0 \text{ kN}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$$F_{AB} = 7,50 \text{ kN T} \Leftarrow$$

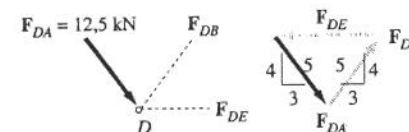
$$F_{AD} = 12,5 \text{ kN C} \Leftarrow$$



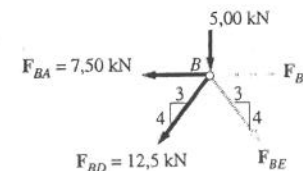
Nó D. Uma vez que a força exercida pela barra AD foi determinada, somente duas forças incógnitas estão agora envolvidas nesse nó. Outra vez, um triângulo de forças é usado para determinar as forças incógnitas nas barras DB e DE:

$$F_{DB} = F_{DA} \quad F_{DB} = 12,5 \text{ kN T} \Leftarrow$$

$$F_{DE} = 2 \left(\frac{3}{5} \right) F_{DA} \quad F_{DE} = 15,0 \text{ kN C} \Leftarrow$$



Nó B. Como mais de três forças agem nesse nó, determinamos as duas incógnitas F_{BC} e F_{BE} resolvendo as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$. Arbitrariamente supomos que ambas as forças incógnitas agem para fora do nó, isto é, que as barras estão sob tração. O valor positivo obtido para F_{BC} indica que nossa consideração estava correta, a barra BC está tracionada. O valor negativo de F_{BE} indica que nossa suposição estava errada; a barra BE está sob compressão.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -5,00 - \frac{4}{5}(12,5) - \frac{4}{5}F_{BE} = 0$$

$$F_{BE} = -18,7 \text{ kN} \quad F_{BE} = 18,7 \text{ kN C} \leftarrow$$

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad F_{BC} - 7,50 - \frac{3}{5}(12,5) - \frac{3}{5}(18,7) = 0$$

$$F_{BC} = +26,2 \text{ kN} \quad F_{BC} = 26,2 \text{ kN T} \leftarrow$$

Nó E. Supomos que a força incógnita F_{EC} atue para fora do nó. Somando as componentes em x , escrevemos

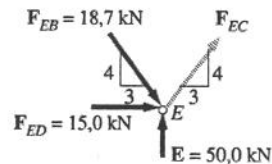
$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad \frac{3}{5}F_{EC} + 15,0 + \frac{3}{5}(18,7) = 0$$

$$F_{EC} = -43,7 \text{ kN} \quad F_{EC} = 43,7 \text{ kN C} \leftarrow$$

Somando as componentes em y , fazemos uma verificação de nossos cálculos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 50,0 - \frac{4}{5}(18,7) - \frac{4}{5}(43,7)$$

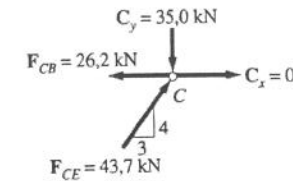
$$= 50,0 - 15,0 - 35,0 = 0 \quad (\text{confere})$$



Nó C. Usando os valores calculados em F_{CB} e F_{CE} , podemos determinar as reações C_x e C_y considerando o equilíbrio desse nó. Uma vez que essas reações já foram determinadas a partir do equilíbrio da treliça toda, obteremos duas comprovações de nossos cálculos. Podemos também, simplesmente, usar os valores já calculados de todas as forças agindo nesse nó (forças nas barras e reações) e comprovar que o nó está em equilíbrio:

$$\pm \rightarrow \Sigma F_x = -26,2 + \frac{3}{5}(43,7) = -26,2 + 26,2 = 0 \quad (\text{confere})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = -35,0 + \frac{4}{5}(43,7) = -35,0 + 35,0 = 0 \quad (\text{confere})$$



Problemas

6.1 a 6.12 Usando o método dos nós, determine a força em cada barra da treliça ilustrada. Indique se cada barra está tracionada ou comprimida.

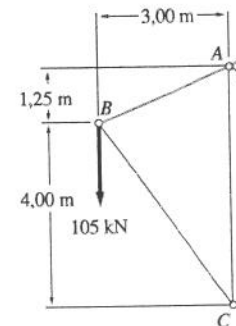


Figura P6.1

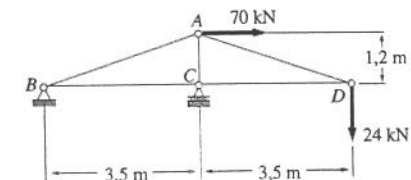


Figura P6.2

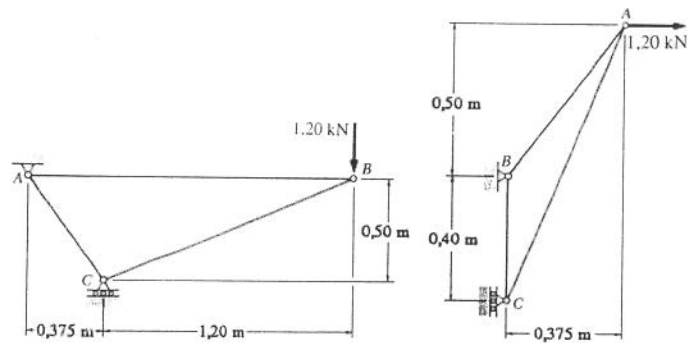


Figura P6.3

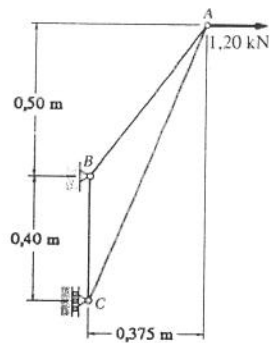


Figura P6.4

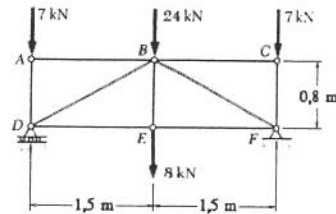


Figura P6.5

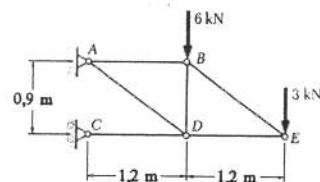


Figura P6.6

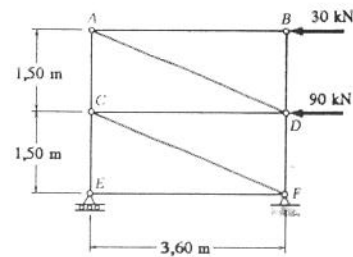


Figura P6.7

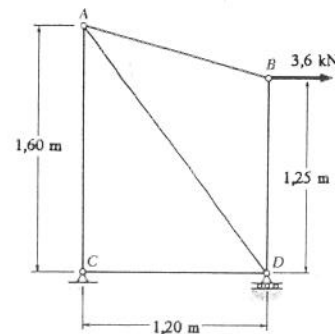


Figura P6.8

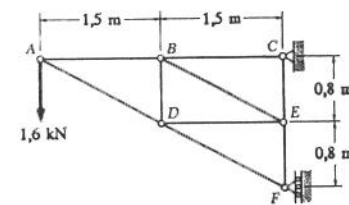


Figura P6.9

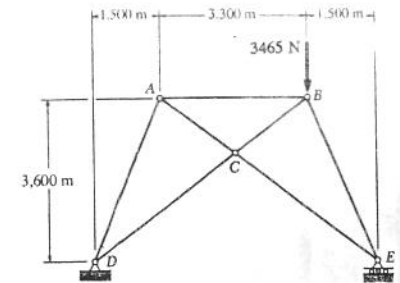


Figura P6.10

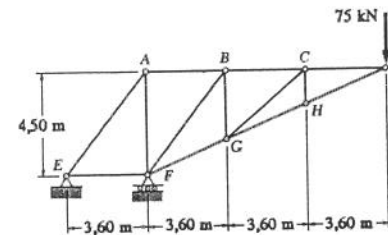


Figura P6.11

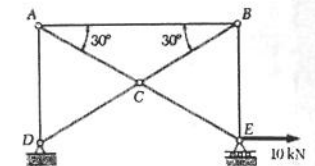


Figura P6.12

6.13 Verifique se são simples as treliças dadas no Probs. 6.10, 6.14, 6.15 e 6.16.

6.14 a 6.16 Determine as barras de força zero na treliça ilustrada, para o carregamento dado.

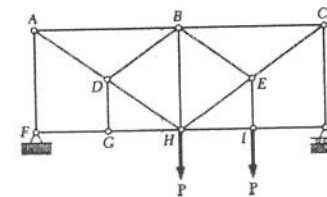


Figura P6.14

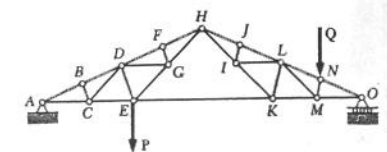


Figura P6.15

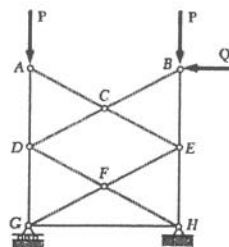


Figura P6.16

*6.17 Seis barras, todas de comprimento L , são unidas formando um tetraedro que está apoiado em uma superfície horizontal, sem atrito. Determine a força em cada barra quando uma força vertical P é aplicada em A .

*6.18 A treliça tridimensional é vinculada pelas seis reações ilustradas. Se uma carga vertical de 850 N é aplicada em E , determine: (a) as reações e (b) a força em cada barra.

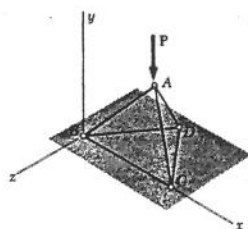


Figura P6.17

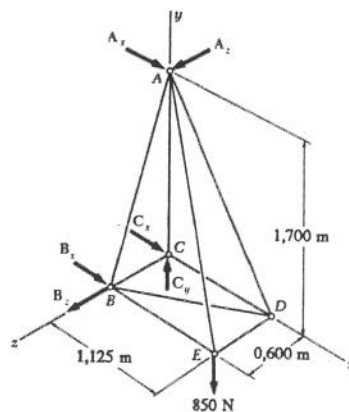


Figura P6.18

*6.19 A treliça tridimensional está apoiada nas seis reações da figura. Se uma carga vertical de 2,70 kN é aplicada em A , determine: (a) as reações e (b) a força em cada barra.

*6.20 Resolva o problema anterior supondo que a força de 2,70 kN é substituída por uma carga $Q = (2,70 \text{ kN})\mathbf{k}$ aplicada no ponto A .

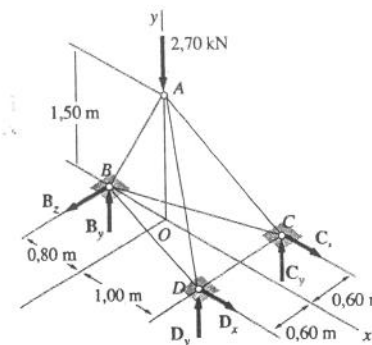


Figura P6.19

6.7. Análise de Treliças pelo Método das Seções. O método dos nós é mais eficaz quando é necessário determinar as forças em todas as barras da treliça. Se, entretanto, a força em somente uma barra ou a força em apenas poucas barras forem desejadas, um outro método, chamado das seções, será mais eficiente.

Suponha, por exemplo, que desejamos determinar a força na barra BD da treliça ilustrada na Fig. 6.16a. Para tanto é necessário determinar a força com que a barra BD atua sobre os nós B e D . Se utilizássemos o método dos nós, escolheríamos o nó B ou D como corpo livre. Entretanto, podemos escolher como corpo livre uma parte maior da treliça, composta por vários nós e barras, desde que a força desejada seja uma das forças externas que agem nessa parte. Se, além disso, escolhermos a parte da treliça de tal forma que exista um total de somente três forças incógnitas agindo sobre ela, a força desejada poderá ser obtida resolvendo-se as equações de equilíbrio para essa parte da treliça. Na prática, a parte da treliça a ser utilizada é obtida seccionando-se três barras da treliça, uma das quais é a barra desejada, isto é, traçando uma linha que divida a treliça em duas partes completamente separadas, mas que não intercepte mais de três barras. Após remover as barras cortadas, pode-se utilizar como corpo livre qualquer uma das duas partes da treliça.*

* Na análise de certas estruturas, há seções que interceptam mais de três barras; as forças em uma ou talvez duas barras cortadas poderão ser encontradas, se for possível obter equações de equilíbrio que envolvam, cada uma, apenas uma incógnita (ver Probs. 6.34 a 6.36).

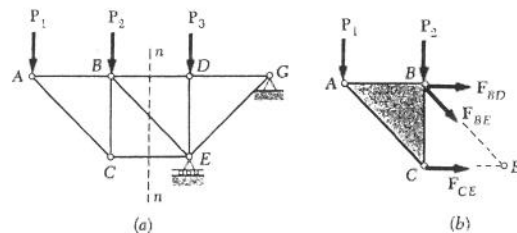


Figura 6.16

Na Fig. 6.16a a seção nn intercepta as barras BD , BE e CE , e a parte ABC da treliça é escolhida como corpo livre (Fig. 6.16b). As forças que atuam no corpo livre são as cargas P_1 e P_2 nos pontos A e B e as três forças incógnitas, F_{BD} , F_{BE} e F_{CE} . Como não sabíamos se as barras removidas estavam comprimidas ou tracionadas, as três forças foram arbitrariamente desenhadas saindo do corpo livre, como se as barras estivessem tracionadas.

O fato de o corpo rígido ABC estar em equilíbrio pode ser expresso por três equações, formando um sistema que, resolvido, dará as três forças incógnitas. Se somente a força F_{BD} for desejada, será necessário escrever apenas uma equação, desde que essa equação não contenha as outras incógnitas. Assim, a equação $\sum M_E = 0$ fornece o módulo F_{BD} da força F_{BD} . Um sinal positivo na resposta indicará que nossa suposição original com respeito ao sentido de F_{BD} estava correta e que a barra BD está tracionada; um sinal negativo indicará que nossa suposição estava errada e que BD está sob compressão.

Por outro lado, se somente a força F_{CE} for desejada, deve-se escrever uma equação que não envolva F_{BD} ou F_{BE} ; a equação apropriada é $\sum M_B = 0$. Novamente, um sinal positivo para o módulo F_{CE} da força procurada indica uma hipótese correta, existe tração; e um sinal negativo indica uma suposição incorreta, existindo compressão.

Se somente a força F_{BE} for desejada, a equação apropriada é $\sum F_y = 0$. Novamente, um sinal da resposta dirá se a barra está tracionada ou comprimida.

Quando se determina a força em apenas uma barra, não é possível nenhuma comprovação independente dos cálculos realizados. No entanto, quando se determinam todas as forças incógnitas que atuam no corpo livre, os cálculos podem ser verificados escrevendo-se uma equação adicional. Por exemplo, se F_{BD} , F_{BE} e F_{CE} forem determinadas conforme indicado acima, os cálculos poderão ser comprovados verificando-se que $\sum F_x = 0$.

*** 6.8. Treliças Compostas.** Consideremos duas treliças simples ABC e DEF . Se elas estiverem unidas por três barras BD , BE e CE , conforme representado na Fig. 6.17a, formarão juntas uma treliça rígida $ABDF$. Também seria possível combinar as treliças ABC e DEF em uma só treliça rígida, unindo os nós B e D em um único nó B e ligando os nós C e E por uma barra CE (Fig. 6.17b). A treliça assim obtida é conhecida como treliça tipo Fink. Note-se que as treliças representadas na Figs. 6.17a e b não são treliças simples; elas não podem ser obtidas a partir de uma treliça triangular pela adição de pares sucessivos de barras, conforme explicado na Seção 6.3. Entretanto, são treliças rígidas, como se pode comprovar comparando os sistemas de ligação usados para manter unidas as treliças simples ABC e DEF (três barras na Fig. 6.17a, um pino e uma barra na Fig. 6.17b) com os sistemas de vínculos estudados na Seções 4.4 e 4.5. Treliças formadas por várias treliças simples rigidamente interligadas são conhecidas como *treliças compostas*.

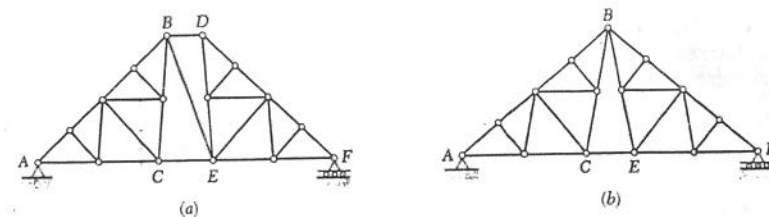


Figura 6.17

Pode-se comprovar que, em uma treliça composta, o número de barras b e o número de nós n estão ainda relacionados pela fórmula $b = 2n - 3$. Se uma treliça composta está vinculada por uma articulação sem atrito e roletes (envolvendo três reações incógnitas), o número total de incógnitas é $b + 3$, número igual ao das $2n$ equações obtidas exprimindo-se que os n pinos estão em equilíbrio. Treliças compostas vinculadas por uma articulação e roletes, ou por um sistema equivalente de vínculos, são *estaticamente determinadas, rígidas e completamente vinculadas*. Isto significa que todas as reações incógnitas e forças nas barras podem ser determinadas pelos métodos da estática e que, satisfeitas todas as equações de equilíbrio, a treliça não desmoronará nem se moverá. No entanto, as forças nas barras não podem ser todas determinadas pelo método dos nós, a não ser resolvendo-se grande número de equações simultâneas. No caso da treliça composta da Fig. 6.17a, por exemplo, será mais fácil seccionar as barras BD , BE e CE para determinar suas forças.

Suponhamos agora que as treliças simples ABC e DEF estejam ligadas por quatro barras BD , BE , CD e CE (Fig. 6.18). O número de barras b é agora maior que $2n - 3$; a treliça obtida é indeformável, porém hiperestática, e uma das quatro barras

BD , BE , CD ou CE é redundante. Se a treliça for vinculada por uma articulação em A e um rolete em F , o número total de incógnitas será $b + 3$. Esse número é agora maior que o número $2n$ das equações independentes disponíveis; a treliça é *estaticamente indeterminada*.

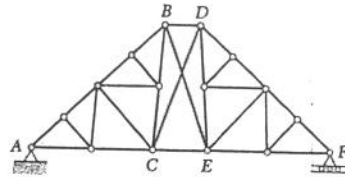


Figura 6.18

Finalmente, consideremos o caso em que as duas treliças simples ABC e BEF estejam unidas por uma articulação, conforme representado na Fig. 6.19a. O número de barras b é menor que $2n - 3$. Se a treliça for vinculada por uma articulação em A e um rolete em F , o número total de incógnitas será $b + 3$. Esse número é agora menor que o número $2n$ de equações de equilíbrio que deveriam ser satisfeitas; a treliça é *deformável* e desmoronará sob seu próprio peso. Entretanto, se duas articulações forem utilizadas nos vínculos externos, a treliça ficará *rígida* e não desmoronará (Fig. 6.19b). Note-se que o número total de incógnitas é agora $b + 4$, sendo, portanto, igual ao número de equações. Conquanto necessária, essa condição não é suficiente para o equilíbrio de uma estrutura que deixa de ser rígida quando separada de seus vínculos externos (ver Seção 6.11).

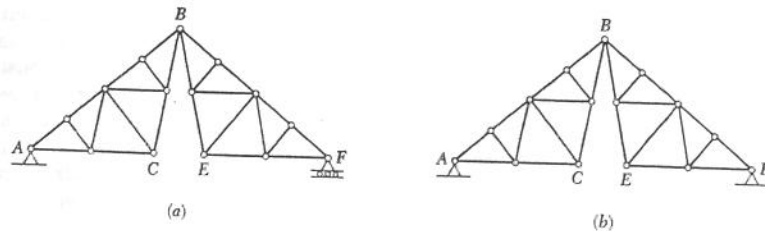
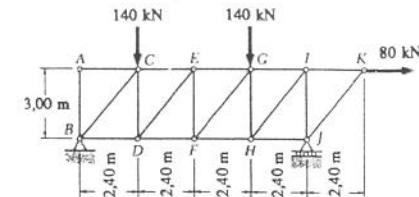


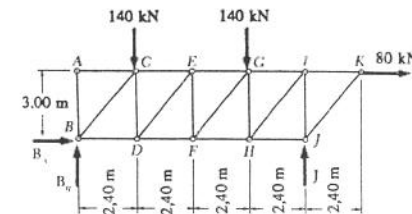
Figura 6.19

Problema Resolvido 6.2

Determine as forças nas barras EF e GI da treliça ilustrada.



Solução. Desenha-se um diagrama de corpo livre para a treliça toda. As forças externas aplicadas nesse corpo livre são as cargas e as reações em B e J .



Equilíbrio da Treliça Toda

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0:$$

$$-(140 \text{ kN})(2,40 \text{ m}) - (140 \text{ kN})(7,20 \text{ m}) - (80 \text{ kN})(3,00 \text{ m}) + J(9,60 \text{ m}) = 0$$

$$J = 165 \text{ kN} \quad J = 165 \text{ kN} \uparrow$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

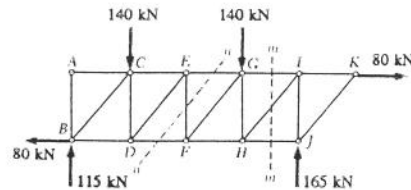
$$B_x + 80 \text{ kN} = 0$$

$$B_x = -80 \text{ kN} \quad B_x = 80 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+ \curvearrowright \Sigma M_J = 0:$$

$$(140 \text{ kN})(7,20 \text{ m}) + (140 \text{ kN})(2,40 \text{ m}) - (80 \text{ kN})(3,00 \text{ m}) - B_y(9,60 \text{ m}) = 0$$

$$B_y = +115 \text{ kN} \quad B_y = 115 \text{ kN} \uparrow$$



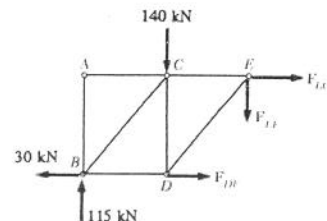
Força na Barra EF. A seção nn intercepta a barra EF e duas barras mais. Depois de remover as barras interceptadas, escolhe-se a parte esquerda da treliça como corpo livre. Há três incógnitas envolvidas. Para eliminar as duas forças horizontais, escrevemos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad +115 \text{ kN} - 140 \text{ kN} - F_{EF} = 0$$

$$F_{EF} = -25 \text{ kN}$$

O sentido F_{EF} foi escolhido supondo que a barra está tracionada, o sinal negativo do valor obtido indica que a barra está comprimida.

$$F_{EF} = 25 \text{ kN C} \leftarrow$$

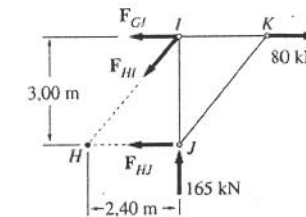


Força na Barra GI. A seção mm intercepta a barra GI e apenas mais duas barras. Após a remoção das barras interceptadas, escolhemos a parte da direita da treliça como corpo livre. Há, novamente, três incógnitas. Para eliminar as duas forças que passam pelo ponto H, escrevemos:

$$+ \curvearrowright \Sigma M_H = 0: \quad (165 \text{ kN})(2,40 \text{ m}) - (80 \text{ kN})(3,00 \text{ m}) + F_{GI}(3,00 \text{ m}) = 0$$

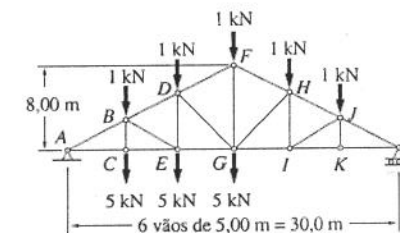
$$F_{GI} = -52 \text{ kN}$$

$$F_{GI} = 52 \text{ kN C} \leftarrow$$

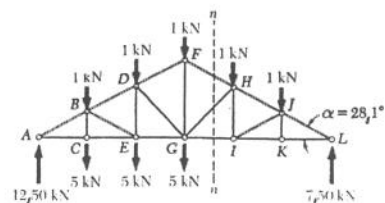


Problema Resolvido 6.3

Determinar as forças nas barras FH, GH e GI da treliça de telhado ilustrada.



Solução. A seção nn intercepta a treliça como indicado. A parte da direita da treliça será tomada como corpo livre. Como a reação em L atua nesse corpo livre, o valor de L deverá ser calculado separadamente, usando a treliça toda como um corpo livre; a equação $\Sigma M_A = 0$ fornece $L = 7,50 \text{ kN} \uparrow$.



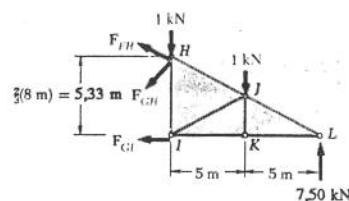
Força na Barra GI. Usando a parte HLI da treliça como corpo livre, o valor F_{GI} é obtido escrevendo-se

$$+\circlearrowleft \Sigma M_H = 0:$$

$$(7,5 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) - F_{GI}(5,33 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13,1 \text{ kN}$$

$$F_{GI} = 13,1 \text{ kN T} \leftarrow$$



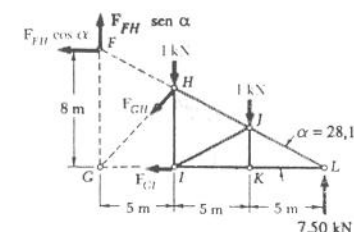
Força na Barra FH. O valor de F_{FH} é obtido da equação $\Sigma M_G = 0$. Desloca-se F_{FH} ao longo de sua linha de ação até que venha agir no ponto F, onde é decomposta nas componentes x e y . O momento de F_{FH} em relação ao ponto G é agora igual a $(F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m})$.

$$+\uparrow \Sigma M_G = 0:$$

$$(7,50 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m}) = 0$$

$$F_{FH} = -13,8 \text{ kN}$$

$$F_{FH} = 13,8 \text{ kN C} \leftarrow$$



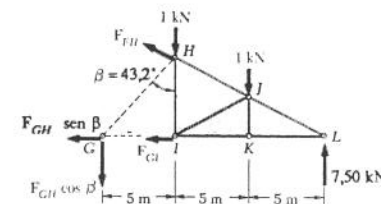
Força na Barra GH. O valor de F_{GH} é determinado primeiro decompondo-se a força F_{GH} nas componentes x e y no ponto G e então resolvendo-se a equação $\Sigma M_L = 0$:

$$+\uparrow \Sigma M_L = 0:$$

$$(1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{GH} \cos \beta)(15 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GH} = -1,37 \text{ kN}$$

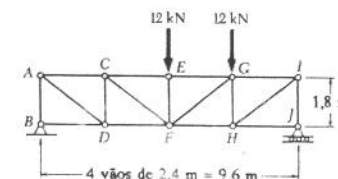
$$F_{GH} = 1,37 \text{ kN C} \leftarrow$$



Problemas

6.21 Determine as forças nas barras CE e CF da treliça da figura.

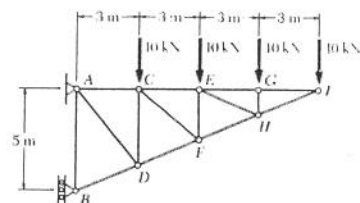
6.22 Determine as forças nas barras FG e FH da treliça da figura.



Figuras P6.21 e P6.22

6.23 Determine as forças nas barras CD e DF da treliça da figura.

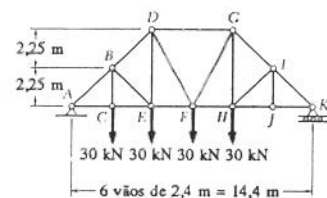
6.24 Determine as forças nas barras CE e EF da treliça da figura.



Figuras P6.23 e P6.24

6.25 Determine as forças nas barras DE e EF da treliça da figura.

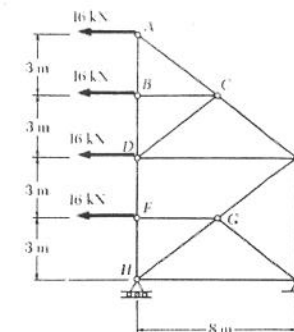
6.26 Determine as forças nas barras FG e FH da treliça da figura.



Figuras P6.25 e P6.26

6.27 Determine as forças nas barras CE e DE da treliça da figura.

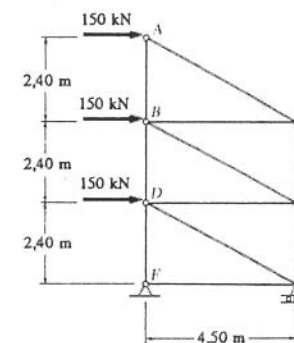
6.28 Determine as forças nas barras EI e EG da treliça da figura.



Figuras P6.27 e P6.28

6.29 Determine as forças nas barras BD e DE da treliça da figura.

6.30 Determine as forças nas barras DG e EG da treliça da figura.



Figuras P6.29 e P6.30

6.31 Determine a força na barra CD da treliça Fink de telhado, da ilustração, quando $P = 15$ kN.

6.32 Determine as forças nas barras BD , BE e CE da treliça da figura.

6.33 Determine as forças nas barras DF , DG e EG da treliça da figura.

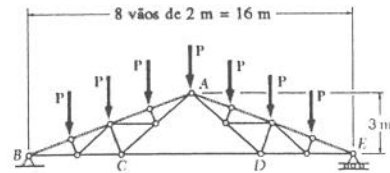
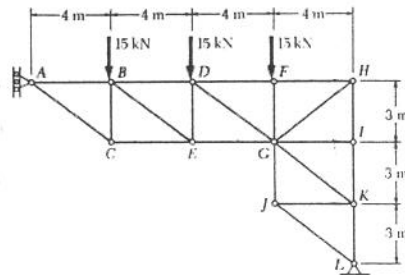


Figura P6.31

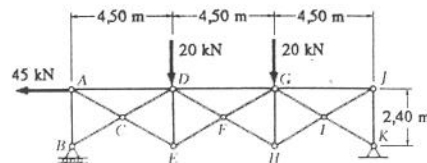
6.34 Determine as forças nas barras GJ , GK e IK da treliça da figura.



Figuras P6.32, P6.33 e P6.34

6.35 Determine as forças nas barras AD , CD , e CE da treliça da figura.

6.36 Determine as forças nas barras DG , FG e FH da treliça da figura.



Figuras P6.35 e P6.36

6.37 Determine as forças nas barras FK e JO da treliça da figura (Sugestão: Utilize a seção $a-a$.)

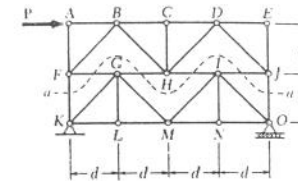
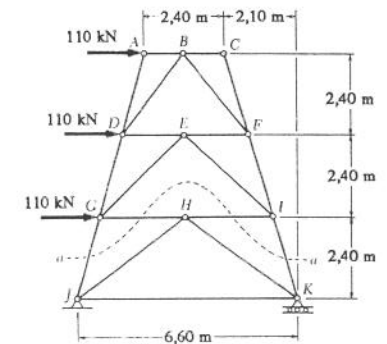
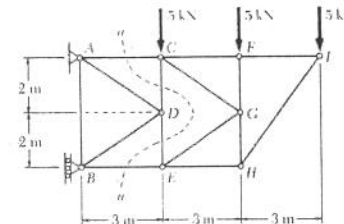


Figura P6.37

6.38 Determine as forças nas barras AC e BE da treliça da figura. (Sugestão: Utilize a seção $a-a$.)

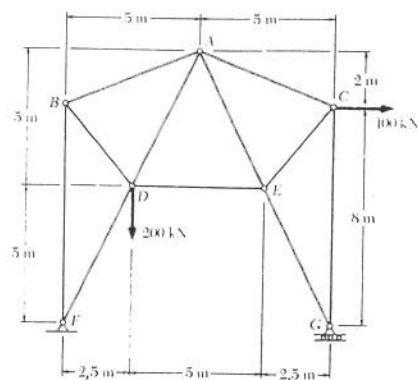
6.39 Determine a força na barra GJ da treliça da figura. (Sugestão: Utilize a seção $a-a$.)



Figuras P6.38 e P6.39

6.40 Determine as forças nas barras DE e AE da treliça da figura.

6.41 Determine as forças nas barras AB e AD da treliça da figura.



Figuras P6.40 e P6.41

6.42 Os elementos em diagonal no painel central da treliça da figura são muito delgados e somente podem ser sujeitos a trações. Esses elementos são denominados *tirantes*. Determine as forças na barra *DE* e nos tirantes, com o carregamento da figura.

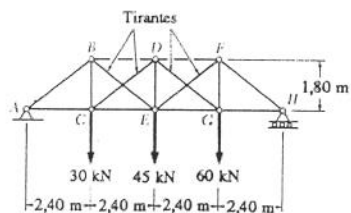


Figura 6.42

6.43 Resolva o Prob. 6.42 supondo que a carga de 30 kN foi removida.

6.44 Resolva o Prob. 6.42 supondo que a carga de 45 kN foi removida.

6.45 a 6.48 Classifique cada uma das estruturas dadas como completa parcial ou ineficazmente vinculada. Se completamente vinculada, classifique ainda como determinada ou indeterminada. (Todas as barras podem estar submetidas a tração ou a compressão.)

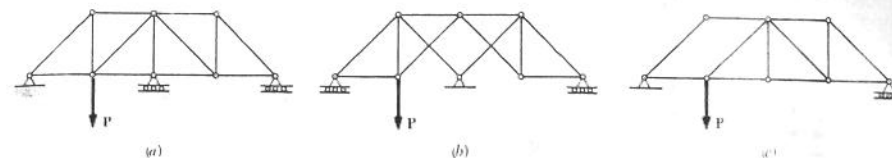


Figura P6.45

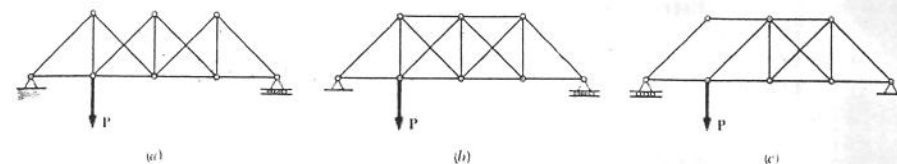


Figura P6.46

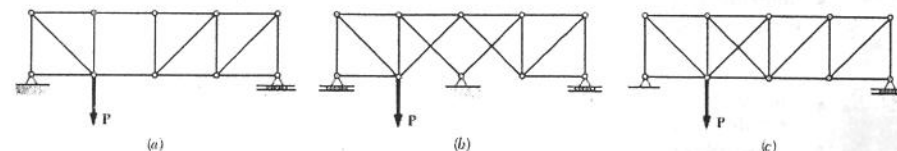


Figura P6.47

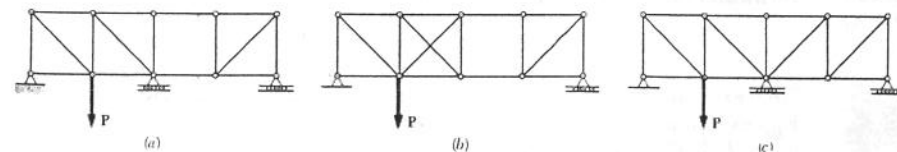


Figura P6.48

Estruturas e Máquinas

6.9. Estruturas Contendo Elementos Submetidos a Várias Forças. Ao tratar de treliças, consideramos estruturas que consistiam exclusivamente em articulações e barras retas submetidas a apenas duas forças. As forças que atuam sobre as barras submetidas a duas forças agem diretamente ao longo das próprias barras. Consideraremos agora estruturas que possuem pelo menos uma barra submetida a três ou mais forças. Essas forças, geralmente, não atuarão ao longo das barras; sua direção é desconhecida e serão representadas por duas componentes incógnitas.

Estruturas e máquinas são sistemas compostos por elementos submetidos a várias forças. As estruturas projetadas para suportar cargas são geralmente estacionárias e completamente vinculadas. As máquinas são projetadas para transmitir e modificar forças; podem ser ou não estacionárias, mas sempre terão partes móveis.

6.10. Análise de uma Estrutura. Como primeiro exemplo da análise de uma estrutura, consideraremos novamente o guindaste descrito na Seção 6.1, que suporta uma dada carga P (Fig. 6.20a). O diagrama de corpo livre da estrutura inteira está ilustrado na Fig. 6.20b. Esse diagrama pode ser usado para determinar as forças externas que agem sobre a estrutura. Somando os momentos em relação a A , primeiro determinamos a força T exercida pelo cabo; somando as componentes x e y , determinamos, então, as componentes A_x e A_y da reação da articulação A .

Para determinar as forças internas que mantêm unidas as várias partes de uma estrutura, devemos desmembrá-la e desenhar o diagrama de corpo livre para cada uma de suas partes componentes (Fig. 6.20c). Em primeiro lugar, devemos considerar as peças submetidas a apenas duas forças. Nessa estrutura, a barra BE é a única peça desse tipo. As forças que agem em cada extremidade dessa barra devem ter a mesma intensidade, a mesma linha de ação e sentidos opostos (Seção 4.6). Elas estarão, portanto, dirigidas ao longo de BE e serão denominadas, respectivamente, F_{BE} e $-F_{BE}$. Seus sentidos serão tomados como mostra a Fig. 6.20c, e a correção dessa hipótese será verificada mais tarde pelo sinal obtido para o valor comum F_{BE} das duas forças.

Em seguida, consideremos as peças submetidas a várias forças, isto é, aquelas que estão sob a ação de três ou mais forças. De acordo com a terceira lei de Newton, a força exercida pela barra BE sobre o ponto B da barra AD deve ser igual e oposta à força F_{BE} exercida por AD sobre BE . Analogamente, a força exercida pela barra BE sobre o ponto E de CF deve ser igual e oposta à força $-F_{BE}$ exercida por CF em BE . As forças que a barra BE , submetida a duas forças, exerce sobre AD e CF são, portanto, respectivamente iguais a $-F_{BE}$ e F_{BE} ; elas têm o mesmo módulo F_{BE} e sentidos opostos, devendo estar orientadas conforme indicado na Fig. 6.20c.

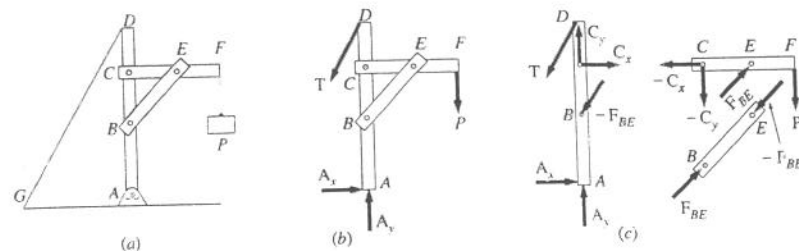


Figura 6.20

Em C estão unidas duas barras submetidas a várias forças. Posto que não se conhece nem a direção nem o módulo dessas forças que agem em C , elas serão representadas por suas componentes x e y . As componentes C_x e C_y da força que age na barra AD serão arbitrariamente dirigidas para a direita e para cima. Uma vez que, de acordo com a terceira lei de Newton, as forças exercidas pela barra CF sobre AD e pela barra AD sobre CF são iguais e opostas, as componentes da força que age sobre a barra CF devem estar dirigidas para a esquerda e para baixo; elas serão designadas, respectivamente, $-C_x$ e $-C_y$. Se a força C_x é realmente dirigida para a direita e a força $-C_x$ é realmente dirigida para a esquerda, se determinará mais tarde, por meio do sinal obtido para C_x , um sinal positivo indicando que a hipótese estava correta, um sinal negativo indicando que estava errada. Os diagramas de corpo livre das barras submetidas a várias forças são completados representando-se as forças externas agindo em A , D e F .*

As forças internas podem agora ser determinadas considerando-se o diagrama de corpo livre de qualquer uma das duas barras submetidas às várias forças. Escolhendo o diagrama de corpo livre de CF , por exemplo, teremos as equações $\sum M_C = 0$, $\sum M_E = 0$ e $\sum F_x = 0$, que fornecem os valores F_{BE} , C_y e C_x , respectivamente. Esses valores podem ser comprovados verificando-se que a barra AD está também em equilíbrio.

Deve-se notar que os diagramas de corpo livre das articulações não foram representados na Fig. 6.20c. Isto porque os pinos das articulações foram considerados como partes integrantes de uma das barras por eles ligada. Essa hipótese sempre pode ser feita para simplificar a análise de estruturas e máquinas. Entretanto, quando uma articulação une três ou mais barras, ou liga um vínculo externo e duas ou mais barras,

* Não é absolutamente necessário usar um sinal negativo para distinguir a força que uma barra exerce sobre outra de força igual e contrária exercida pela segunda barra sobre a primeira, uma vez que as duas forças pertencem a diferentes diagramas de corpos livres e, portanto, não se podem confundir facilmente. Nos Problemas Resolvidos, representaremos pelo mesmo símbolo forças iguais e opostas que forem aplicadas a corpos livres diferentes. O sinal obtido para uma componente de uma força não tem relação com a orientação dos eixos coordenados. De fato, um sinal positivo indica que a orientação tomada para essa componente no diagrama de corpo livre é correta, e um sinal negativo que a orientação é oposta.

ou quando uma carga está aplicada a uma articulação, deve-se decidir cuidadosamente a qual dos elementos se supõe pertencer a articulação. (Se estiverem envolvidas barras submetidas a várias forças, a articulação deve pertencer a uma delas.) As várias forças exercidas sobre a articulação devem, então, ser claramente identificadas. Isto é ilustrado no Problema Resolvido 6.6.

6.11. Estruturas que Deixam de Ser Rígidas Quando Separadas de seus Vínculos Externos. O guindaste analisado na Seção 6.10 foi construído de maneira tal que mantém sua forma mesmo sem a ajuda de seus vínculos externos; é, portanto, considerado um corpo rígido. Muitas estruturas, no entanto, deformar-se-ão quando separadas de seus vínculos externos; tais estruturas não podem ser consideradas como corpos rígidos. Considere-se, por exemplo, a estrutura representada na Fig. 6.21a, que consiste em duas barras AC e CB que suportam cargas P e Q em seus pontos médios; as barras, por sua vez, são vinculadas ao solo por articulações em A e B e estão articuladas em C. Se for separada de seus vínculos externos, essa estrutura não manterá sua forma; portanto deverá ser considerada como composta por duas partes rígidas distintas AC e CB.

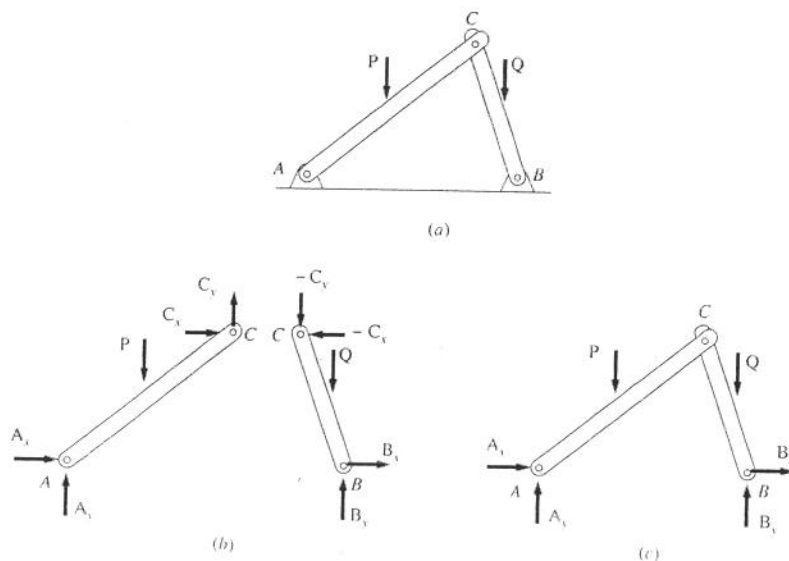


Figura 6.21

As equações $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M = 0$ (em relação a qualquer ponto dado) expressam as condições de equilíbrio de um corpo rígido (Cap. 4); devemos aplicá-las,

portanto, aos diagramas de corpo livre das barras AC e CB (Fig. 6.21b). Uma vez que essas barras estão submetidas a várias forças e como são usadas articulações tanto nos vínculos externos quanto na junta, as reações em A e B e as forças em C serão, cada uma, representadas por duas componentes. De acordo com a terceira lei de Newton, as componentes da força exercida por CB sobre AC e as componentes da força exercida por AC sobre CB serão representadas por vetores de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos; assim, se o primeiro par de componentes é denominado C_x e C_y , o segundo será designado $-C_x$ e $-C_y$. Observamos que quatro forças incógnitas atuam no corpo livre AC, enquanto somente três equações podem ser utilizadas para expressar que o corpo está em equilíbrio; analogamente, quatro incógnitas e somente três equações estão associadas a CB. Entretanto, somente seis diferentes incógnitas estão envolvidas na análise das duas barras e seis equações em conjunto estão disponíveis para expressar o equilíbrio das barras. Escrevendo $\Sigma M_A = 0$ para o corpo livre AC e $\Sigma M_B = 0$ para CB, obtemos duas equações acopladas das quais se pode obter o valor do módulo C_x das componentes C_x , $-C_x$ e o valor do módulo C_y das componentes C_y e $-C_y$. Escrevendo, então, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$ para cada um dos dois corpos livres, obtemos sucessivamente as componentes A_x , A_y , B_x e B_y .

Observemos agora que, como as equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma M = 0$ (em relação a qualquer ponto dado) são satisfeitas por forças que agem no corpo livre AC e como também são satisfeitas para forças que agem sobre o corpo livre CB, devem da mesma forma ser satisfeitas quando as forças que atuam nos dois corpos livres forem consideradas simultaneamente. Uma vez que as forças internas em C se anulam mutuamente, verificamos que as equações de equilíbrio devem ser satisfeitas pelas forças externas representadas no diagrama de corpo livre da própria estrutura ACB (Fig. 6.21c), ainda que esta não seja um corpo rígido. Essas equações podem ser utilizadas para determinar algumas das componentes das reações em A e B. Entretanto, devemos observar que as reações não podem ser completamente determinadas a partir do diagrama de corpo livre da estrutura toda. É, pois, necessário desmembrar a estrutura e considerar os diagramas de corpo livre das partes que a compõem (Fig. 6.21b), mesmo quando estivermos interessados em encontrar apenas as reações externas. Isto pode ser explicado pelo fato de que as equações de equilíbrio obtidas para o corpo livre ACB são condições necessárias para o equilíbrio de uma estrutura deformável, porém não são condições suficientes.

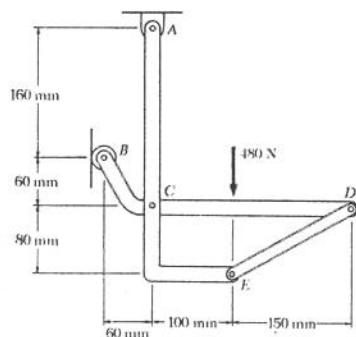
O método de resolução delineado no segundo parágrafo desta seção envolve equações simultâneas. Discutiremos agora um método mais prático, que utiliza tanto o corpo livre ACB quanto os corpos livres AC e CB. Escrevendo $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$ para o corpo livre ACB, obtemos B_y e A_y . Escrevendo $\Sigma M_C = 0$, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$ para o corpo livre AC, obtemos sucessivamente A_x , C_x e C_y . Finalmente, escrevendo $\Sigma F_x = 0$ para ACB, obtemos B_x .

Observamos, acima, que a análise da estrutura da Fig. 6.21 envolve seis componentes incógnitas de força e seis equações independentes de equilíbrio (as equações de equilíbrio para a estrutura total foram obtidas das seis equações originais e, portanto,

não são independentes). Além disso, comprovamos que realmente todas as incógnitas poderiam ser determinadas e todas as equações poderiam ser satisfeitas. A estrutura considerada é *estaticamente determinada e indeformável*. * Em geral, para determinar se uma estrutura é estaticamente determinada e indeformável, é necessário traçar um diagrama de corpo livre para cada uma das partes que a compõem e contar as reações e forças internas envolvidas. Devemos, também, determinar o número de equações independentes de equilíbrio (excluindo equações que exprimem o equilíbrio da estrutura toda ou de grupos de partes componentes já analisados). Se existem mais incógnitas que equações, a estrutura é *estaticamente indeterminada*. Se existem menos incógnitas que equações, a estrutura é *deformável*. ** Se existem tantas incógnitas quantas equações, e se todas as incógnitas podem ser determinadas e todas as equações satisfeitas sob condições gerais de carregamento, a estrutura é *estaticamente determinada e indeformável*; se, no entanto, por causa de uma *disposição imprópria* das barras e apoios, não for possível determinar todas as incógnitas e tampouco satisfazer todas as equações, a estrutura será *estaticamente indeterminada e deformável*.

Problema Resolvido 6.4

Na estrutura da figura, as barras ACE e BCD estão articuladas por um pino em C e pela barra DE. Determine a força na barra DE e as componentes da força exercida em C pela barra BCD.



* A palavra *indeformável* é utilizada aqui para indicar que a estrutura manterá sua forma enquanto permanecer ligada a seus apoios.

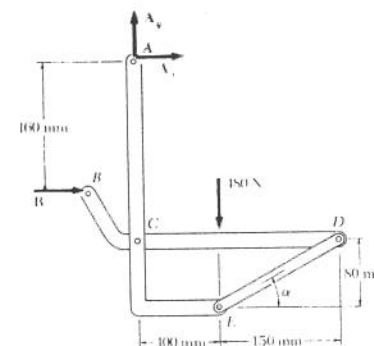
** Há casos em que, no lugar de deformável, a estrutura pode se mover quando sujeita a certos tipos de carregamento. O termo *deformável* deve, pois, ser entendido como: deformável ou móvel. Da mesma forma, o termo *indeformável* deve ser entendido como: indeformável ou imóvel. (N. do R. T.)

Estrutura Inteira. Como as reações externas envolvem apenas três incógnitas, determinaremos as reações considerando o diagrama de corpo livre da estrutura toda:

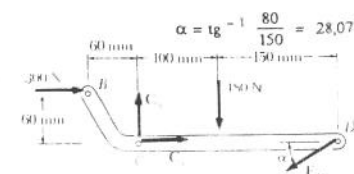
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad A_y - 480 \text{ N} = 0 \quad A_y = +480 \text{ N} \quad A_y = 480 \text{ N} \uparrow$$

$$+ \curvearrowright \Sigma M_A = 0: \quad -(480 \text{ N})(100 \text{ mm}) + B(160 \text{ mm}) = 0 \quad B = +300 \text{ N} \quad B = 300 \text{ N} \rightarrow$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad B + A_x = 0 \quad 300 \text{ N} + A_x = 0 \quad A_x = -300 \text{ N} \quad A_x = 300 \text{ N} \leftarrow$$



Barras. Agora desmembramos a estrutura. Como apenas duas barras estão articuladas em C, as componentes das forças desconhecidas que agem em ACE e BCD são iguais, porém de sentidos opostos e supostas orientadas como na ilustração. Supomos que a barra DE esteja tracionada e que aplique em D e E forças iguais de sentidos opostos, como se vê na figura.



Barra BCD. Utilizando o corpo livre BCD, escrevemos:

$$+ \curvearrowright \Sigma M_C = 0:$$

$$(F_{DE} \sin \alpha)(250 \text{ mm}) + (300 \text{ N})(60 \text{ mm}) + (480 \text{ N})(100 \text{ mm}) = 0$$

$$F_{DE} = -561 \text{ N}$$

$$F_{DE} = 561 \text{ N } \leftarrow$$

$$+ \rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N} = 0$$

$$C_x - (-561 \text{ N}) \cos 28,0^\circ + 300 \text{ N} = 0 \quad C_x = -795 \text{ N}$$

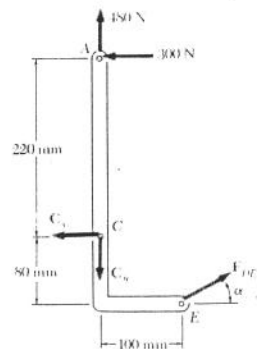
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$C_y - F_{DE} \sin \alpha - 480 \text{ N} = 0$$

$$C_y - (-561 \text{ N}) \sin 28,0^\circ - 480 \text{ N} = 0 \quad C_y = +216 \text{ N}$$

Os sinais obtidos para C_x e C_y indicam que as componentes C_x e C_y da força aplicada na barra BCD são orientadas, respectivamente, para a esquerda e para cima. Temos:

$$C_x = 795 \text{ N } \leftarrow, \quad C_y = 216 \text{ N } \uparrow \leftarrow$$



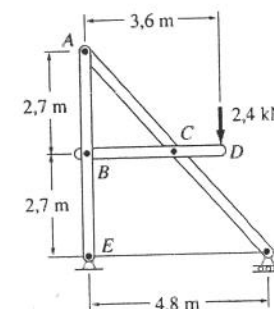
Barra ACE (Verificação). Os cálculos são verificados considerando-se o corpo livre ACE. Por exemplo:

$$+ \curvearrowright \Sigma M_A = (F_{DE} \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (F_{DE} \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - C_x(220 \text{ mm}) =$$

$$= (561 \cos \alpha)(300) + (561 \sin \alpha)(100) - (795)(220) = 0$$

Problema Resolvido 6.5

Determinar as componentes das forças que agem em cada barra da estrutura representada.



Estrutura Inteira. Uma vez que as reações externas envolvem somente três incógnitas, podemos calcular as reações considerando o diagrama de corpo livre da estrutura inteira:

$$+ \curvearrowright \Sigma M_E = 0:$$

$$-(2,4 \text{ kN})(3,6 \text{ m}) + F(4,8 \text{ m}) = 0$$

$$F = +1,8 \text{ kN}$$

$$F = 1,8 \text{ kN } \uparrow \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

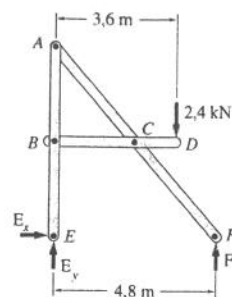
$$-2,4 \text{ kN} + 1,8 \text{ kN} + E_y = 0$$

$$E_y = +0,6 \text{ kN}$$

$$E_y = 0,6 \text{ kN } \uparrow \leftarrow$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$E_x = 0 \leftarrow$$



Como apenas duas barras estão acopladas em cada nó, a estrutura é agora desmembrada, e componente iguais e contrárias são representadas sobre cada barra em cada nó.

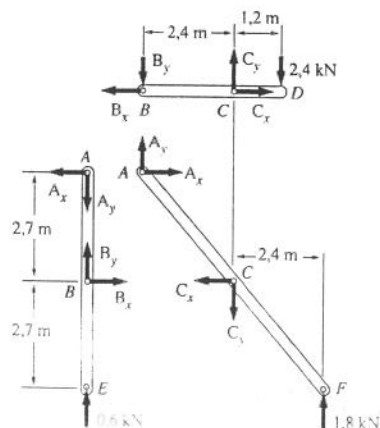
Barra BCD

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad -(2,4 \text{ kN})(3,6 \text{ m}) + C_y(2,4 \text{ m}) = 0 \quad C_y = +3,6 \text{ kN} \Leftarrow$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0: \quad -(2,4 \text{ kN})(1,2 \text{ m}) + B_y(2,4 \text{ m}) = 0 \quad B_y = +1,2 \text{ kN} \Leftarrow$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0$$

Notamos que B_x e C_x não podem ser obtidos considerando-se somente a barra BCD. Os valores positivos obtidos para B_y e C_y indicam que as componentes B_y e C_y da força estão dirigidas como se supôs.



Barra ABE

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: \quad B_x(2,7 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0 \Leftarrow$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad +B_x - A_x = 0 \quad A_x = 0 \Leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -A_y + B_y + 0,6 \text{ kN} = 0 \\ -A_y + 1,2 \text{ kN} + 0,6 \text{ kN} = 0 \quad A_y = +1,8 \text{ kN} \Leftarrow$$

Barra BCD. Retornando agora à barra BCD, escrevemos

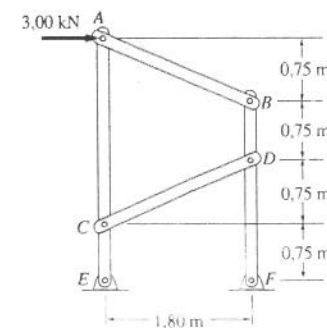
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0 \quad 0 + C_x = 0 \quad C_x = 0 \Leftarrow$$

Barra ACF (Verificação). Todas as componentes incógnitas já foram encontradas; para comprovar os resultados basta verificar que a barra ACF está em equilíbrio:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = (1,8 \text{ kN})(2,4 \text{ m}) - A_y(2,4 \text{ m}) - A_x(2,7 \text{ m}) = \\ = (1,8 \text{ kN})(2,4 \text{ m}) - (1,8 \text{ kN})(2,4 \text{ m}) - 0 = 0 \quad (\text{confere})$$

Problema Resolvido 6.6

Uma força horizontal de 3 000 N está aplicada ao pino A da estrutura ilustrada. Determinar as forças que atuam nas duas barras verticais da estrutura.



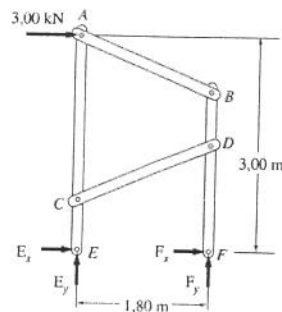
Estrutura Inteira. A estrutura inteira é escolhida como um corpo livre; ainda que as reações envolvam quatro incógnitas, E_x e F_y podem ser determinadas escrevendo-se

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(3,00 \text{ kN})(3,00 \text{ m}) + F_y(1,80 \text{ m}) = 0$$

$$F_y = +5,00 \text{ kN} \quad F_y = 5,00 \text{ kN} \uparrow \Leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E_y + F_y = 0$$

$$E_y = -5,00 \text{ kN} \quad E_y = 5,00 \text{ kN} \downarrow \Leftarrow$$



As equações de equilíbrio da estrutura inteira não são suficientes para determinar E_x e F_x . Para obter a solução, devemos agora considerar o equilíbrio das várias barras. Ao desmembrar a estrutura, suporemos que o pino A está ligado à barra ACE, submetida às várias forças, e, assim, que a força de 3,00 kN está aplicada a ela. Observamos, também, que as barras AB e CD são peças submetidas a duas forças.

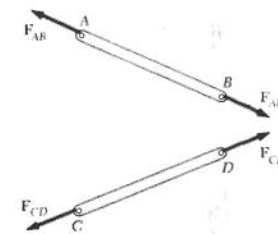
Barra ACE

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -\frac{5}{13} F_{AB} + \frac{5}{13} F_{CD} - 5,00 \text{ kN} = 0$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad -(3,00 \text{ kN})(3,00 \text{ m}) - \left(\frac{12}{13} F_{AB}\right)(3,00 \text{ m}) - \left(\frac{12}{13} F_{CD}\right)(0,75 \text{ m}) = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações, encontramos

$$F_{AB} = -5,20 \text{ kN} \quad F_{CD} = +7,80 \text{ kN} \Leftarrow$$



Os sinais obtidos indicam que o sentido considerado para F_{CD} estava correto e o sentido para F_{AB} , incorreto. Somando agora as componentes em x:

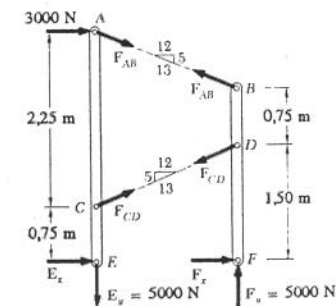
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 3,00 \text{ kN} + \frac{12}{13} (-5,20 \text{ kN}) + \frac{12}{13} (7,80 \text{ kN}) + E_x = 0$$

$$E_x = -5,40 \text{ kN} \quad E_x = 5,40 \text{ kN} \Leftarrow$$

Estrutura Inteira. Como E_x já foi determinada, podemos retornar ao diagrama de corpo livre da estrutura inteira e escrever

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad 3,00 \text{ kN} - 5,40 \text{ kN} + F_x = 0$$

$$F_x = 2,40 \text{ kN} \quad F_x = 2,40 \text{ kN} \rightarrow \Leftarrow$$

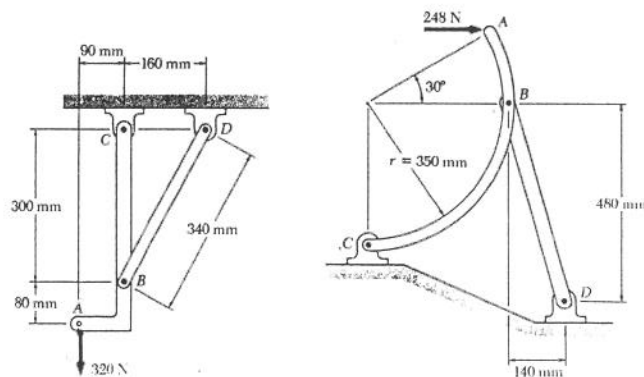


Barra BDF (Verificação). Podemos testar nossos cálculos verificando que a equação $\Sigma M_B = 0$ é satisfeita pelas forças que agem na barra BDF:

$$\begin{aligned}
 +) \Sigma M_B &= -\left(\frac{12}{13} F_{CD}\right)(0,75 \text{ m}) + F_x(2,25 \text{ m}) = \\
 &= -\frac{12}{13}(7,80 \text{ kN})(0,75 \text{ m}) + (2,40 \text{ kN})(2,25 \text{ m}) = \\
 &= -5,40 \text{ kN} \cdot \text{m} + 5,40 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0 \quad (\text{confere})
 \end{aligned}$$

Problemas

6.49 a 6.51 Determine a força na barra BD e as componentes da reação em C .



Figuras P6.49 e P6.50

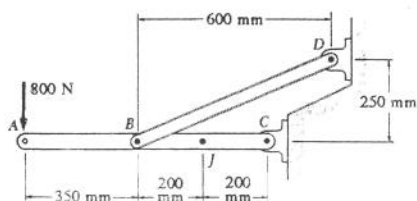


Figura P6.51

6.52 Determine as componentes de todas as forças que atuam na barra ABD da estrutura da figura.

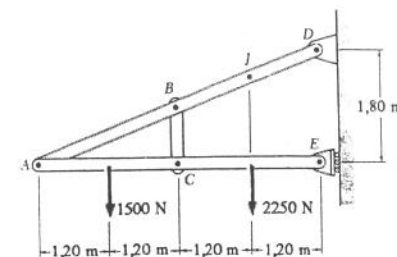


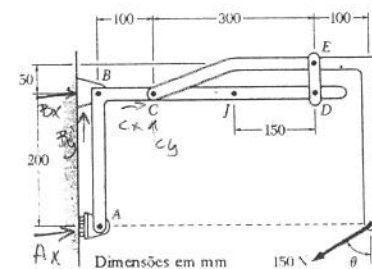
Figura P6.52

6.53 Determine as componentes de todas as forças aplicadas na barra $ABCD$ quando

$$\theta = 0.$$

6.54 Determine as componentes de todas as forças aplicadas na barra $ABCD$ quando

$$\theta = 90^\circ.$$



Figuras P6.53 e P6.54

6.55 A barra de reboque de uma aeronave é posicionada por meio de um cilindro hidráulico CD conectado a duas unidades idênticas braço-roda DEF . A barra de reboque completa tem massa de 180 kg e seu baricentro fica em G . Para a posição da figura, determine: (a) força exercida pelo cilindro no suporte C e (b) a e força exercida em cada braço pelo pino em E .

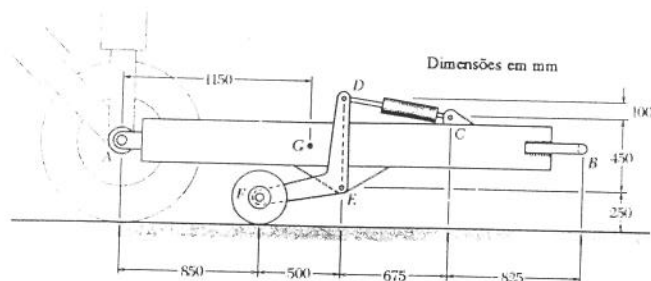
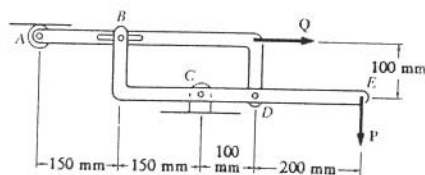


Figura P6.55

6.56 Resolva o Prob. 6.55 supondo que um mecânico de 75 kg está em pé sobre a barra de reboque no ponto B.

6.57 Sabendo que $P = 375 \text{ N}$ e $Q = 225 \text{ N}$, determine as componentes de todas as forças que agem na barra BCDE da montagem da figura.

6.58 Sabendo que $P = 225 \text{ N}$ e $Q = 375 \text{ N}$, determine as componentes de todas as forças que agem na barra BCDE da montagem da figura.



Figuras P6.57 e P6.58

6.59 O trailer da figura foi projetado para que sua parte traseira possa ser abaixada até o nível do chão a fim de facilitar seu carregamento. Um veículo de 1 250 kg foi puxado por um sarilho até a posição ilustrada. O trailer é então colocado em posição de viagem, com $\alpha = 0$, sendo AB e BE horizontais. Considerando apenas o peso do veículo, determine a força que deve ser exercida pelo cilindro hidráulico para manter a posição com $\alpha = 0$.

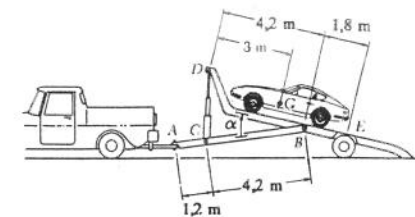


Figura P6.59

6.60 Para o guindaste marítimo da figura, utilizado em operações de perfuração de poços no mar, determine: (a) a força na haste CD, (b) a força do braço AC e (c) a força exercida em A pela lança AB.

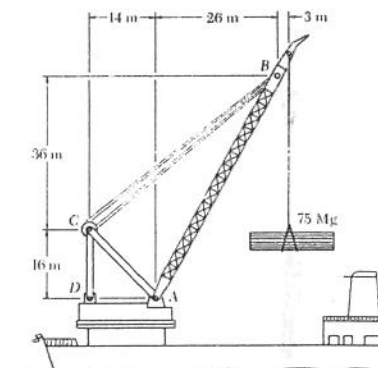
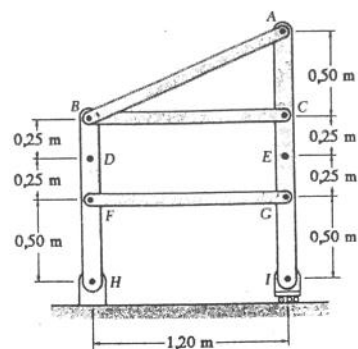


Figura P6.60

6.61 Determine todas as forças que agem na barra AI se à estrutura de figura é aplicado um binário horário de momento $150 \text{ N} \cdot \text{m}$ no ponto: (a) D e (b) E.

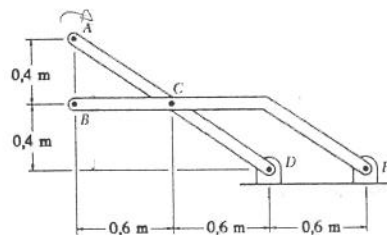
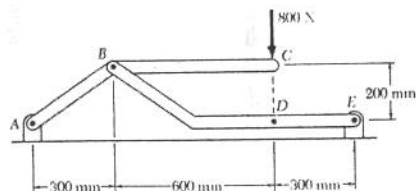
6.62 Determine todas as forças que agem na barra AI se à estrutura da figura é aplicada uma força horizontal de 200 N, orientada para a direita no ponto: (a) D e (b) E.



Figuras P6.61 e P6.62

6.63 Determine as componentes das reações em A e E se a carga de 800 N é aplicada: (a) como na figura e (b) em D, verticalmente para baixo.

6.64 Determine as componentes das reações em D e E se a estrutura da figura é carregada com binário horário de momento igual a 150 N · m, aplicado no ponto: (a) A e (b) B.



Figuras P6.63 e P6.64

6.65 Um trabalhador de 70 kg está sobre um banquinho, no ponto C. Metade do peso do trabalhador é suportado pelas pernas do banquinho da ilustração. Determine as componentes da força exercida no ponto E da perna BE, supondo que a parte inferior das pernas não é bem paralela ao chão e que o apoio se dá apenas nos pontos A e B. Despreze o peso do banco e suponha que não há atrito no chão.

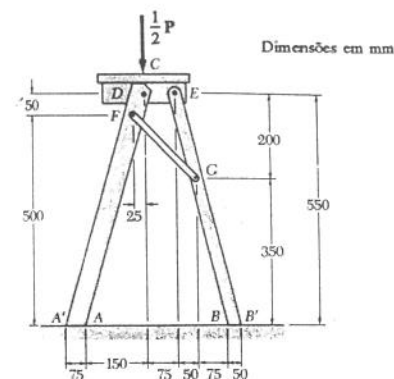
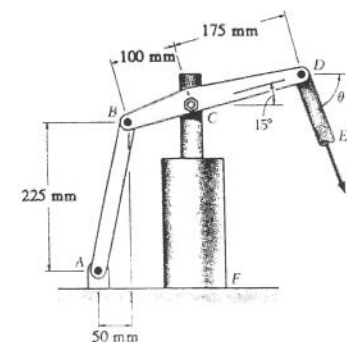


Figura P6.65

6.66 No Prob. 6.65 o apoio das pernas do banquinho no chão pode se dar de quatro maneiras: em A e B, A e B', A' e B e A' e B'. Determine: (a) para qual combinação de apoios a força na barra FG é máxima e (b) o valor correspondente da força em FG.

6.67 O cilindro hidráulico CF, que controla parcialmente a posição de uma barra DE, foi fixado na posição da figura. Sabendo que $\theta = 70^\circ$, determine: (a) a força P para a qual a tração na barra AB é de 625 N e (b) a correspondente força exercida pela barra BCD no ponto C.

6.68 O cilindro hidráulico CF, que controla parcialmente a posição de uma barra DE, foi fixado na posição da figura. Sabendo que $P = 450$ N e $\theta = 80^\circ$, determine a força: (a) na haste AB e (b) aplicada no ponto C da barra BCD.



Figuras P6.67 e P6.68

- 6.69 Sabendo que a polia tem um raio de 0,5 m, determine a componente das reações em A e E.

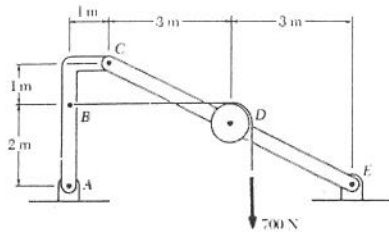


Figura P6.69

- 6.70 Sabendo que cada polia tem um raio de 250 mm, determine as componentes das reações D e E.

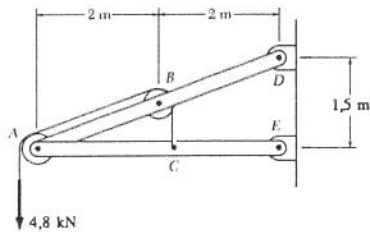


Figura P6.70

- 6.71 Uma tubulação de 0,90 m de diâmetro é suportada a cada 4,80 m por uma pequena estrutura do tipo ilustrado. Sabendo que o peso combinado da tubulação e seu conteúdo é de 8,33 kN/m, e desprezando efeitos de atrito, determine as componentes: (a) da reação em E e (b) da força aplicada no ponto C da barra CDE.

- 6.72 Resolva o Prob. 6.71 com $h = 1,80$ m.

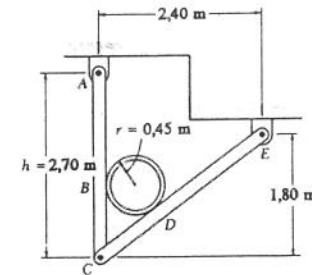


Figura P6.71

- 6.73 As partes da cabine e do motor da pá carregadeira da figura são articuladas por um pino vertical localizado 1,50 m atrás das rodas dianteiras. A distância de C a D é 0,75 m. O baricentro da parte do motor, que pesa 300 kN, é o ponto G_m . Os baricentros da parte da cabine, que pesa 100 kN, e da carga, de 75 kN, são, respectivamente, os pontos G_c e G_f . Sabendo que o veículo está em repouso, com os freios soltos, determine: (a) as reações em cada uma das quatro rodas e (b) as forças exercidas na parte do motor em C e D.

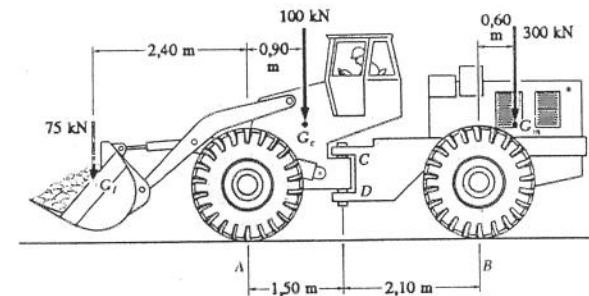


Figura P6.73

- 6.74 Resolva o Prob. 6.73 supondo que a carga de 75 kN foi removida.

- 6.75 Um trailer de 1 050 kg está preso a um carro de 1 200 kg por um engate com rótula em D. Determine: (a) as reações em cada uma das seis rodas quando o carro e o trailer estão em repouso e (b) a carga adicional devida ao trailer em cada roda do carro.

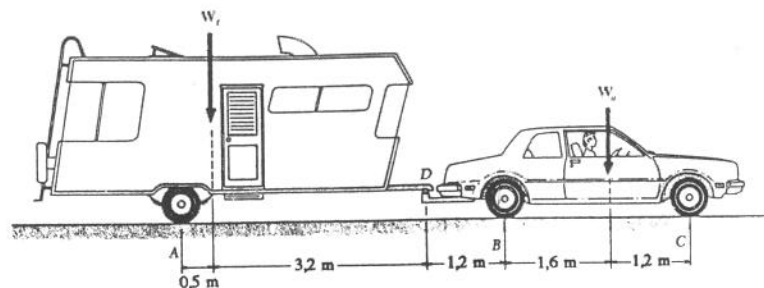


Figura P6.75

6.76 Para propiciar uma melhor distribuição de peso nas quatro rodas do carro do Prob. 6.75, utiliza-se um engate de compensação do tipo ilustrado. Esse engate é formado por duas barras elásticas (apenas uma é vista na figura) encaixadas em mancais de um suporte preso rigidamente ao carro. As barras elásticas estão ligadas à estrutura do trailer por correntes que são mantidas sob tração por ganchos especiais. (a) Determine a tração T necessária em cada uma das duas correntes para que carga adicional devida ao trailer seja uniformemente distribuída nas quatro rodas do carro. (b) Quais as reações correspondentes em cada uma das seis rodas da combinação carro-trailer?

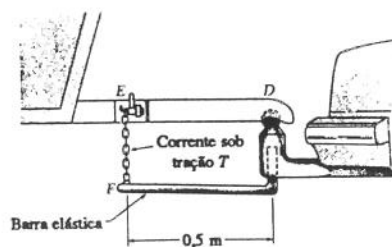
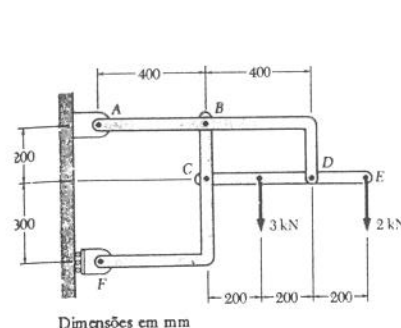


Figura P6.76

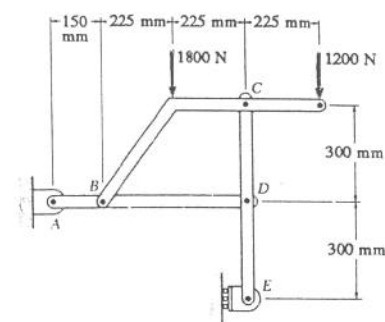
6.77 e 6.78 Para a estrutura e o carregamento da figura, determine as componentes de todas as forças que agem na barra *ABD*.

6.79 Resolva o Prob. 6.78 supondo que a carga de 1 800 N foi removida.

6.80 Resolva o Prob. 6.77 supondo que a carga de 3 kN foi removida.



Figuras P6.77 e P6.78



6.81 (a) Mostre que, quando uma estrutura suporta uma polia em A , pode-se obter um carregamento equivalente da estrutura e de cada componente removendo a polia e aplicando em A duas forças iguais e paralelas às forças de tração no cabo. (b) Mostre também que, se uma ponta do cabo é presa à estrutura em B , uma força de módulo igual à tração deveria ainda ser aplicada em B .

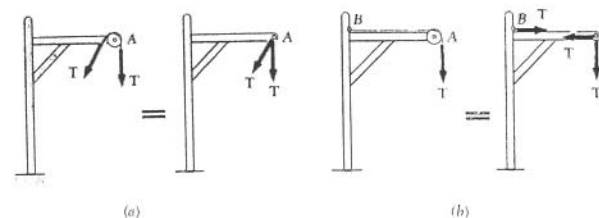


Figura P6.81

6.82 As barras ABC e CDE estão articuladas por um pino em C e apoiadas em quatro barras AF , BG , GD e EH . Para o carregamento da figura, determine as forças nas quatro barras de apoio.

6.83 Resolva o Prob. 6.82 supondo que a força **P** foi substituída por um binário horário de momento **M** aplicado ao mesmo ponto.

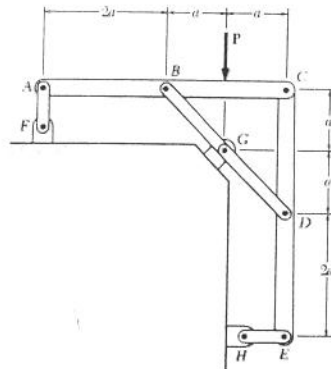


Figura P6.82

6.84 a 6.86 A estrutura ilustrada é formada por barras AD e EH que estão articuladas por duas barras. Determine as forças em cada uma dessas barras de articulação para o carregamento dado.

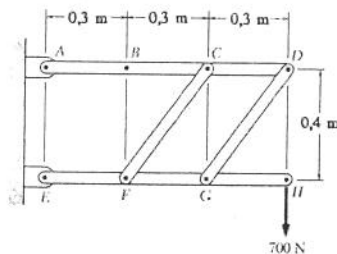


Figura P6.84

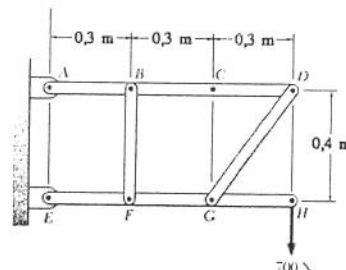


Figura P6.85

6.87 Sabendo que não há atrito nas superfícies A e D , determine as componentes de todas as forças aplicadas na barra ACD .

6.88 Resolva o Prob. 6.87 supondo que a força de 1 000 N aplicada em E é horizontal e aponta para a direita.

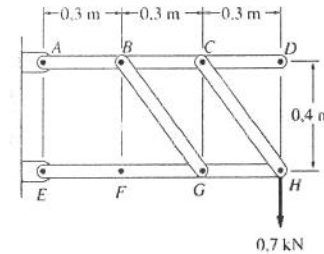


Figura P6.86

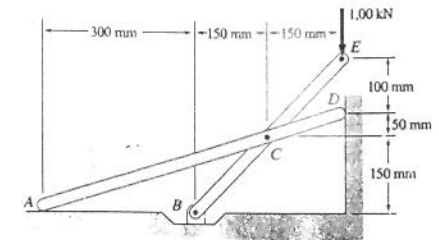
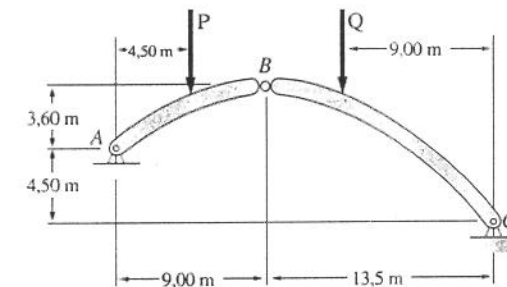


Figura P6.87

6.89 O arco ABC é parabólico, com vértice em B , e é triplamente articulado. Sabendo que $P = 450$ kN e $Q = 300$ kN, determine as componentes: (a) da reação em C e (b) da força exercida no ponto B da barra AB .

6.90 Para o arco no Prob. 6.89, sabendo que $P = 300$ kN e $Q = 450$ kN, determine as componentes (a) da reação em C e (b) da força aplicada no ponto B da barra AB .



Figuras P6.89 e P6.90

6.91 Três vigas estão pregadas em seus pontos médios para formar a base da figura. Supondo que apenas forças verticais são aplicadas nas conexões, determine as reações em A , D e F .

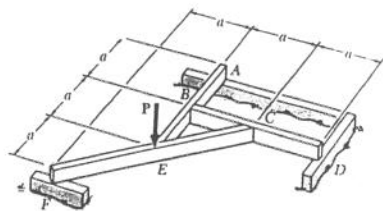


Figura P6.91

6.92 Quatro vigas, cada uma de comprimento $2a$, estão pregadas em seus pontos médios, para formar o sistema de suporte representado. Supondo que nas conexões somente se exerçam forças verticais, determine as reações verticais em A, D, E e H.

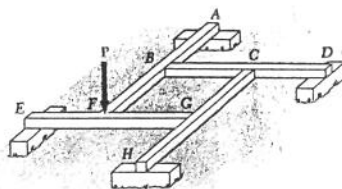


Figura P6.92

6.93 e 6.94 Cada estrutura da figura é formada por duas barras em L presas por barras rígidas. Para cada estrutura, determinar as reações nos apoios e indique se a estrutura é rígida.

6.95 Uma carga vertical P de $0,9 \text{ kN}$ é aplicada à barra ABC. As barras ABC e DEF são paralelas e estão colocadas entre paredes sem atrito e articuladas pela barra BE. Com $a = 0,8 \text{ m}$, determine as reações nos pontos A, C, D e F.

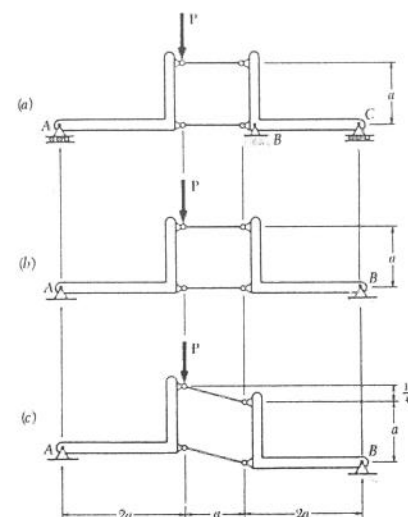


Figura P6.93

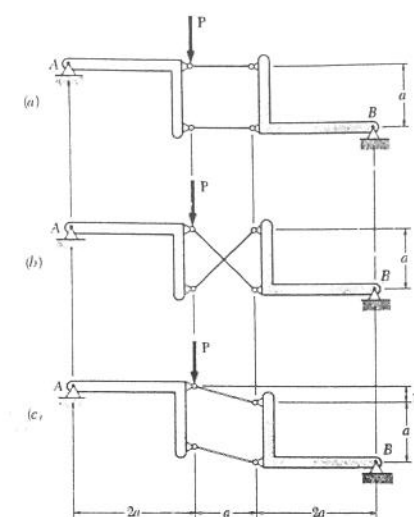
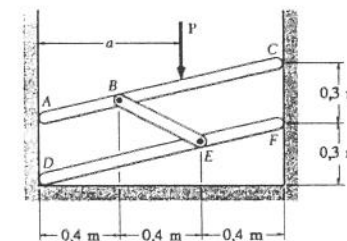


Figura P6.94

6.96 As duas barras paralelas são colocadas entre duas paredes sem atrito e articuladas pela barra BE. Determine o intervalo de valores para a distância a para os quais a carga P pode ser suportada.



Figuras P6.95 e P6.96

6.12. Máquinas.* Máquinas são estruturas projetadas para transmitir e modificar forças. Sejam elas simples ferramentas ou incluam mecanismos complicados, seu objetivo principal é transformar *forças de entrada em forças de saída*. Considere-se, por exemplo, uma tesoura para arame (Fig. 6.22a). Se aplicarmos em seus cabos duas forças iguais e opostas F e $-F$, estes exercerão duas forças iguais e opostas Q e $-Q$ sobre o arame (Fig. 6.22b).

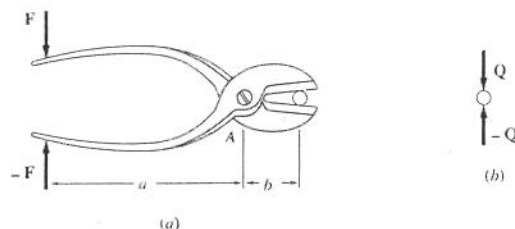


Figura 6.22

Para determinar o módulo Q das forças de saída, quando o módulo F das forças de entrada é conhecido (ou, inversamente, determinar F quando Q é conhecido), desenhamos o diagrama de corpo livre da tesoura *apenas*, mostrando as forças de entrada F e $-F$ e as *reações* $-Q$ e Q que o arame exerce sobre ela (Fig. 6.23). Entretanto, como a tesoura forma uma estrutura não-rígida, devemos usar uma de suas partes componentes como corpo livre, para determinar as forças incógnitas. Considerando a Fig. 6.24a por exemplo, e tomando os momentos em relação a A , obtemos a relação $Fa = Qb$, que determina o módulo Q em função de F , ou F em função de Q . O mesmo diagrama de corpo livre pode ser usado para determinar as componentes da força interna em A ; encontramos $A_x = 0$ e $A_y = F + Q$.

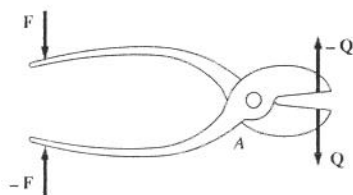


Figura 6.23

* Em nossa literatura corrente as máquinas aqui tratadas são chamadas *máquinas simples*. O termo genérico *máquina* refere-se, comumente, a sistemas capazes de realizar trabalho quando a entrada é alguma forma de energia. Por exemplo, uma máquina a vapor é um sistema que transforma energia térmica (caldeira) em energia mecânica (biela-manivela). (N. do R. T.)

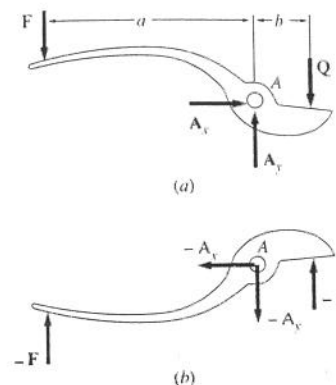
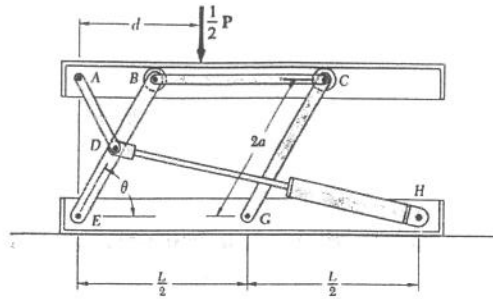


Figura 6.24

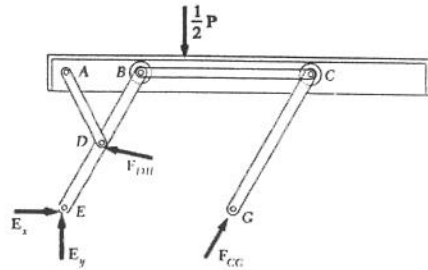
No caso de máquinas mais complicadas, será, em geral, necessário usar vários diagramas de corpo livre e, possivelmente, resolver equações simultâneas envolvendo várias forças internas. Os corpos livres devem ser escolhidos de modo a incluir as forças de entrada e as reações às forças de saída. Além disso, o número total de componentes de forças incógnitas envolvidas não deve exceder o número de equações independentes disponíveis. Ainda que seja aconselhável verificar se o problema é determinado antes de tentar resolvê-lo, não faz sentido discutir a rigidez da máquina. Uma máquina contém partes móveis e deve ser, portanto, não-rígida.

Problema Resolvido 6.7

Uma mesa elevadora é usada para suspender uma caixa de 1 000 kg. Ela consiste em uma plataforma e dois sistemas articulados idênticos sobre os quais cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um sistema articulado e um cilindro estão representados.) As barras EDB e CG têm cada uma o comprimento $2a$, e a barra AD é articulada ao ponto médio de EDB. Se a caixa é colocada sobre a mesa, de modo que metade de seu peso é suportado pelo sistema mostrado, determinar a força exercida pelos cilindros em sua elevação, para $\theta = 60^\circ$, $a = 0,70$ m e $L = 3,20$ m. Mostrar que o resultado obtido é independente da distância d .

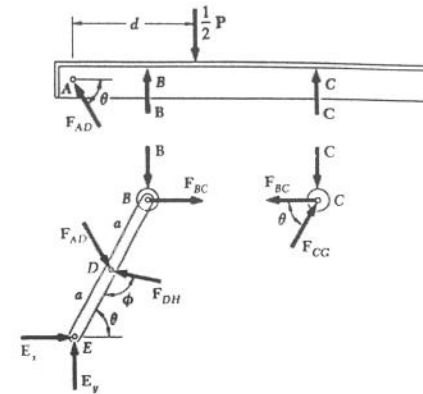


Solução. A máquina considerada consiste na plataforma e no sistema articulado, com uma força de entrada F_{DH} exercida pelo cilindro, e uma força de saída igual e oposta a $\frac{1}{2}P$. Como seriam envolvidas mais de três incógnitas, o mecanismo inteiro não é usado como um corpo livre. Desmembra-se o mecanismo e traçam-se diagramas de corpos livres para a plataforma ABC, o rolete C e a barra EDB. Como AD, BC e CG são barras submetidas a duas forças, seus diagramas de corpos livre foram omitidos, e as forças que exercem nas outras partes do mecanismo foram desenhadas paralelas a essas barras.



Plataforma ABC:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad -F_{AD} \cos \theta = 0 & \quad F_{AD} = 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad B + C - \frac{1}{2}P = 0 & \quad B + C = \frac{1}{2}P \end{aligned} \quad (1)$$



Roleta C. Desenhamos o triângulo de forças e obtemos $F_{BC} = C \cotg \theta$.

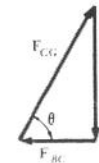
Barra EDB. Lembrando que $F_{AD} = 0$,

$$\begin{aligned} + \curvearrowright \Sigma M_E = 0: & \quad F_{DH} \cos(\phi - 90^\circ)a - B(2a \cos \theta) - F_{BC}(2a \sin \theta) = 0 \\ & \quad F_{DH} a \sin \phi - B(2a \cos \theta) - (C \cotg \theta)(2a \sin \theta) = 0 \\ & \quad F_{DH} \sin \phi - 2(B + C) \cos \theta = 0 \end{aligned}$$

Lembrando a Eq. (1), temos

$$F_{DH} = P \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \quad (2)$$

e observamos que o resultado obtido é independente de d .

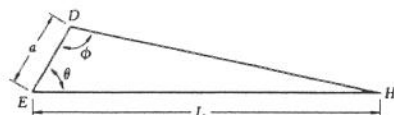


Aplicando inicialmente a lei dos senos ao triângulo EDH, escrevemos

$$\frac{\sin \phi}{EH} = \frac{\sin \theta}{DH} \quad \sin \phi = \frac{EH}{DH} \sin \theta \quad (3)$$

Usando agora a lei dos co-senos, temos

$$\begin{aligned} (DH)^2 &= a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta \\ &= (0,70)^2 + (3,20)^2 - 2(0,70)(3,20) \cos 60^\circ \\ (DH)^2 &= 8,49 \text{ m}^2 \quad DH = 2,91 \text{ m} \end{aligned}$$



Notamos, também, que

$$P = mg = (1\,000 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2) = 9\,810 \text{ N} = 9,81 \text{ kN}$$

Substituindo em (2) $\sin \phi$ de (3) e usando os dados numéricos, escrevemos

$$F_{DH} = P \frac{DH}{EH} \cotg \theta = (9,81 \text{ kN}) \frac{2,91 \text{ m}}{3,20 \text{ m}} \cotg 60^\circ$$

$$F_{DH} = 5,15 \text{ kN} \leftarrow$$

Problemas

6.97 A guilhotina da figura é utilizada para cortar e aparar lâminas de circuito impresso. Na posição da figura, determine: (a) a componente vertical da força exercida no ponto D da lâmina e (b) a reação em C.

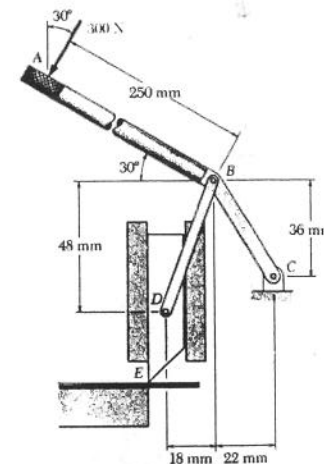


Figura P6.97

6.98 Uma força de 420 N é aplicada ao ponto C da alavanca. Sabendo que $\theta = 90^\circ$, determine: (a) a força vertical exercida no bloco em D e (b) a força exercida no ponto B da barra ABC.

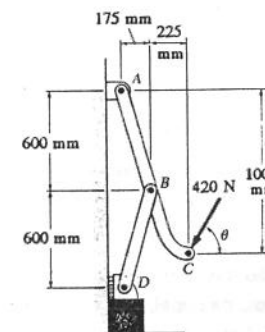


Figura P6.98

6.99 Resolva o Prob. 6.98 com $\theta = 0$.

6.100 Resolva o Prob. 6.97 supondo que a força de 300 N é aplicada em A verticalmente para baixo.

6.101 O moinho da figura é formado por um apoio fixo e por um mordente móvel AB , articulado por um pino grande em A . Energia é fornecida ao eixo C no qual está preso, fora do centro, o disco circular D . Quando o eixo C gira, a haste EF move a barra GFH . Na posição ilustrada, o módulo da resultante F no mordente AB é de 250 kN, e os braços GF e FH formam ângulo de 6° com a horizontal. Desprezando o atrito, determine a força na haste EF (Nota: Após cada ciclo de esmagamento, molas não desenhadas empurram o mordente para a posição inicial.)

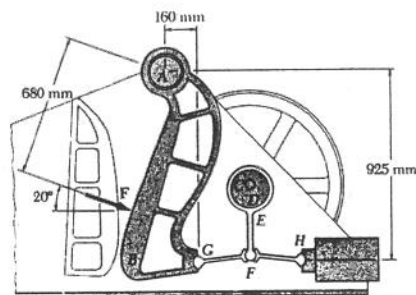


Figura P6.101

6.102 Uma barra de trilho de trem, com 9 m de comprimento e densidade linear igual a 40 kg/m, é erguida por tenazes ferroviárias, como ilustrado. Determine as forças aplicadas nos pontos D e F da peça BDF .

6.103 Um lingote de aço pesando 40 kN é levantado pela tenaz, como mostra a figura. Determine as forças aplicadas nos pontos C e E da peça BCE .

6.104 Se, como mostra a figura, duas barras são adicionadas à tenaz do Prob. 6.103 e se a carga é erguida aplicando-se uma única força em G , determine as forças exercidas nos pontos C e E da peça BCE .

6.105 A ação das garras é controlada pelos dois cilindros hidráulicos da figura. Para segurar com firmeza o rolo de papel, aplica-se uma força vertical de 5 kN na parte superior do rolo por meio da garra CAF . Sabendo que o peso do rolo de papel é 22,5 kN, determine: (a) a força exercida por cada cilindro e (b) a força aplicada no ponto C da garra $BCEH$.

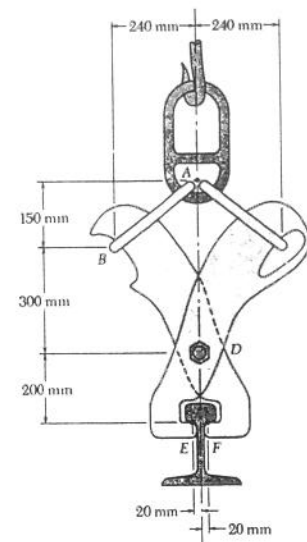


Figura P6.102

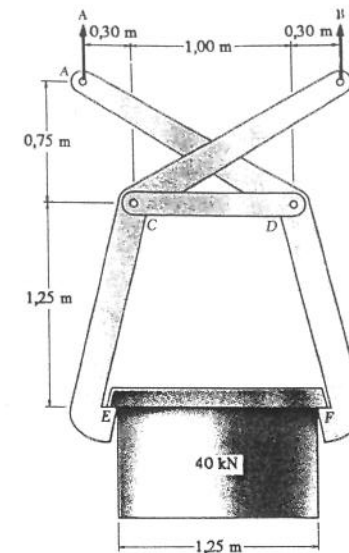


Figura P6.103

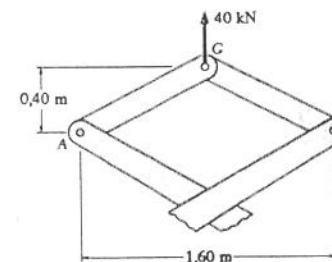


Figura P6.104

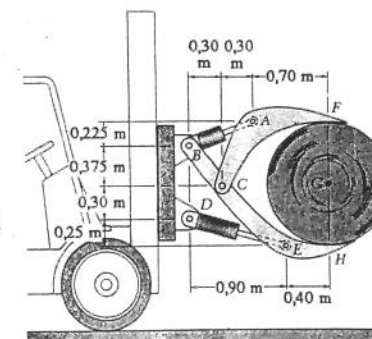


Figura P6.105

6.106 O extrator de engrenagens da figura é formado pela base CF , dois braços ABC e FGH , duas hastes BD e EG e pelo parafuso central JK . Sabendo que o parafuso central JK deve exercer uma força de 4 500 N no eixo vertical KL para iniciar a remoção da engrenagem, determine todas as forças que atuam no braço ABC . Suponha que a lateral arredondada da base é lisa e exerce forças horizontais nos braços.

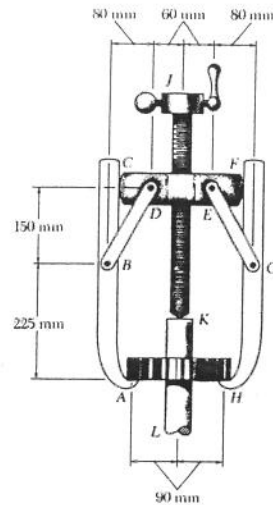


Figura P6.106

6.107 Uma força P de 1,8 kN de módulo é aplicada ao pistão do motor da figura. Determine o binário M necessário para manter o sistema em equilíbrio, nas duas posições ilustradas.

6.108 Um binário M de momento 180 N · m é aplicado ao virabrequim do motor da figura. Determine a força P necessária para manter o sistema em equilíbrio, nas duas posições ilustradas.

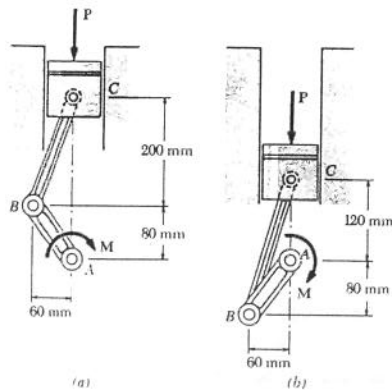


Figura P6.107 e P6.108

6.109 e 6.110 Duas barras estão ligadas por um colar B , sem atrito. Sabendo que o módulo do vetor binário M_A é 62,5 N · m, determine: (a) o vetor binário M_C necessário para manter o equilíbrio e (b) as componentes da reação correspondente em C .

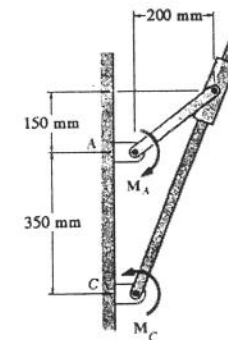


Figura P6.109

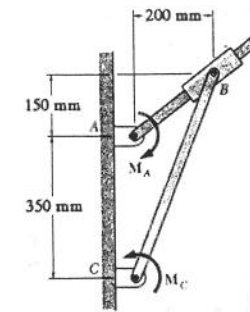


Figura P6.110

6.111 Um cano de 48 mm de diâmetro é preso por um grifo, como ilustrado. As partes AB e DE do grifo estão rigidamente presas uma à outra, sendo que a parte CF está presa por um pino em D . Supondo que não haja escorregamento entre o cano e o grifo, determine as componentes das forças exercidas no cano em A e em C .

6.112 Duas forças de 400 N são aplicadas aos cabos de alicate da figura. Determine: (a) o módulo das forças exercidas na barra e (b) a força que o pino A exerce na parte AB do alicate.

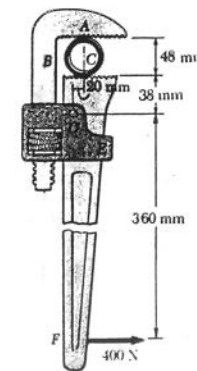


Figura P6.111

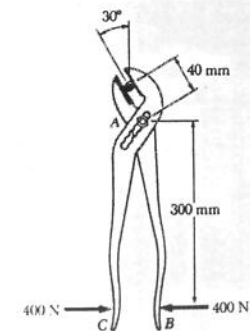


Figura P6.112

6.113 A ferramenta da figura é utilizada para prender terminais em fios elétricos. Sabendo que um trabalhador aplicará forças de módulo $P = 120 \text{ N}$ aos cabos, determine o módulo das forças aplicadas ao terminal.

6.114 O alicate da ilustração é utilizado para prender conectores elétricos em cabos planos que contêm vários fios separados. Sabendo que são necessárias forças de 300 N ao longo da linha $a-a$ para prender os conectores, determine o módulo P das forças que devem ser aplicadas aos cabos. Suponha que os pinos A e D deslizam livremente em sulcos feitos nas mandíbulas.

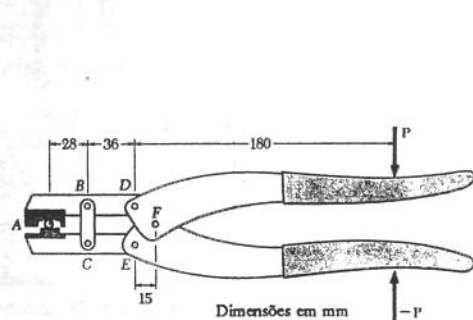


Figura P6.113

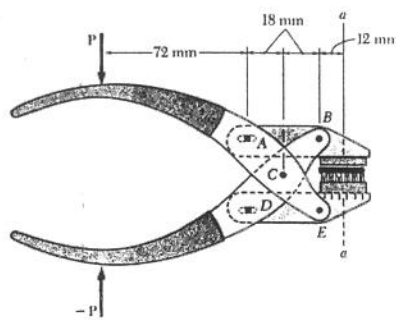


Figura P6.114

6.115 Um cilindro hidráulico de operação manual foi projetado para uso em espaços exíguos. Determine o módulo da força aplicada no pistão no ponto D quando duas forças de 400 N são aplicadas como ilustrado.

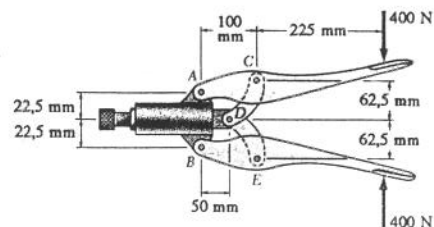


Figura P6.115

6.116 A tesoura de poda da figura pode ser ajustada apoiando-se o pino A em um dos vários dentes da lâmina ACE . Sabendo que forças verticais de 1500 N são necessárias para cortar um ramo, determine o módulo P das forças que devem ser aplicadas nos apoios de mão quando a tesoura está ajustada como ilustrado.

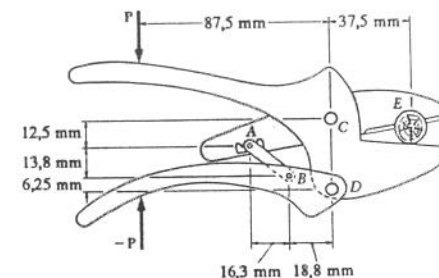
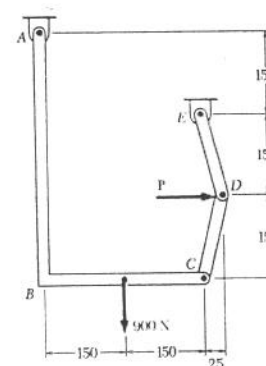
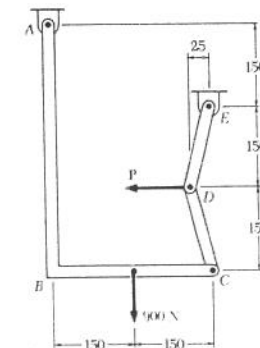


Figura P6.116

6.117 e 6.118 Determine a força P que deve ser aplicada ao elo articulado CDE para manter o suporte ABC na posição ilustrada.



Dimensões em mm



Figuras P6.117 e P6.118

6.119 A prateleira ABC é mantida em posição horizontal por um braço autotravante constituído de duas partes, BDE e EDF , articuladas em E e apoiadas uma na outra em D . Sabendo que a prateleira tem 400 mm de largura e pesa 180 N , determine a força P necessária para desarmar o braço. (Sugestão: Para desarmar o braço, as forças de contato em D devem ser nulas.)

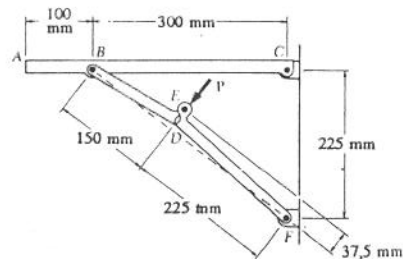
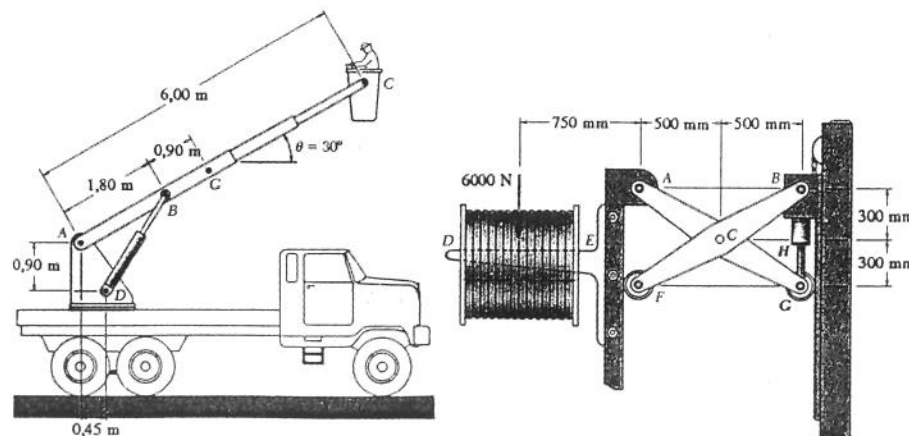


Figura P6.119

6.120 Resolva o Prob. 6.119 supondo que a força P é aplicada verticalmente para baixo no ponto E .

6.121 O braço telescópico ABC é utilizado para erguer um operário até o nível de cabos elétricos e telefônicos. Na situação da figura o baricentro do braço de 7 500 N fica no ponto G . O operário, a caçamba e o equipamento nela contidos pesam 2 500 N e têm seu baricentro em C . Determine a força aplicada em B pelo único cilindro hidráulico usado, na situação ilustrada.

6.122 A posição da haste DE de uma empilhadeira é parcialmente controlada por dois sistemas idênticos de barra articulada e cilindro hidráulico, dos quais apenas um é visto na ilustração. Um carretel de cabos elétricos com 12 000 N de peso é mantido na posição ilustrada pela haste. Sabendo que a carga sustentada pelo sistema ilustrado é de 6 000 N, determine: (a) a força exercida pelo cilindro hidráulico no ponto G e (b) as componentes da força aplicada no ponto C da barra BCF .



Figuras P6.121 e P6.122

6.123 Uma placa de 400 kg de concreto está suspensa por uma corrente presa à caçamba da empilhadeira da figura. O movimento da caçamba é controlado por dois mecanismos idênticos, sendo que apenas um é mostrado na ilustração. Sabendo que o mecanismo da figura sustenta apenas metade do peso da placa de 400 kg, determine a força aplicada: (a) pelo cilindro CD e (b) pelo cilindro FH .

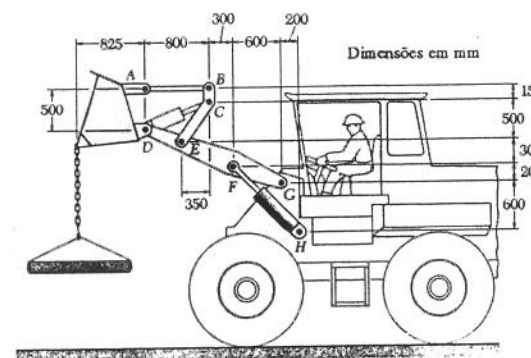


Figura P6.123

6.124 A ação da caçamba da retroescavadeira da figura é controlada pelos cilindros hidráulicos AB , DE e FI . Determine a força exercida por cada cilindro na sustentação da carga de 6 kN.

6.125 As engrenagens D e G estão rigidamente presas aos eixos apoiados em mancais sem atrito. Se $r_D = 100$ mm e $r_G = 50$ mm, determine: (a) o vetor binário M_O que deve ser aplicado para manter o equilíbrio e (b) as reações em A e B .

6.126 Resolva o Prob. 6.125 com $r_D = 87,5$ mm e $r_G = 62,5$ mm.

6.127 No sistema de engrenagens planetárias da figura, o raio da engrenagem central A é a , o raio de cada uma das engrenagens planetárias é b , e o raio da engrenagem externa é $(a + 2b)$. Em um sistema particular onde $a = b = 40$ mm, um vetor-binário horário M_A é aplicado à engrenagem A . Para que o sistema fique em equilíbrio, determine (a) o vetor-binário M_S a ser aplicado ao sistema BCD e (b) o vetor-binário M_E a ser aplicado à engrenagem externa E .

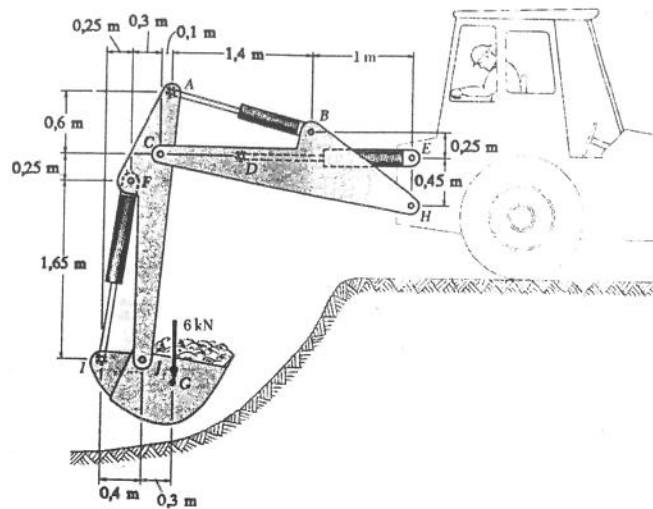


Figura P6.124

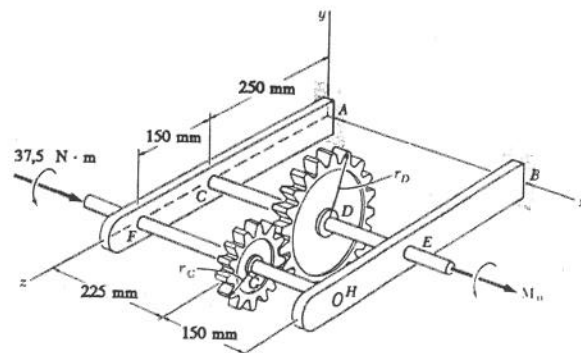
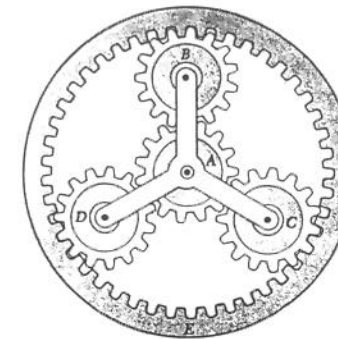


Figura P6.125

6.128 No sistema planetário do Prob. 6.127 aplica-se um vetor-binário de módulo M_A à engrenagem central A e um vetor-binário anti-horário de módulo $3,6 M_A$ ao sistema BCD. Para que o sistema fique em equilíbrio, determine: (a) a razão b/a e (b) o vetor binário M_E a ser aplicado à engrenagem externa E.



Figuras P6.127 e P6.128

***6.129** Dois eixos AC e EG contidos no plano vertical yz estão acoplados por uma junta universal em D. Os mancais em B e E não exercem forças axiais. Um vetor-binário de $25 \text{ N} \cdot \text{m}$ de módulo (de sentido horário quando visto da parte positiva do eixo z) é aplicado no ponto A do eixo AC. Em um instante em que o braço da cruzeta preso ao eixo AC está na posição vertical, determine: (a) o módulo do vetor-binário, M_G que deve ser aplicado ao eixo EG para manter o equilíbrio e (b) as reações em B, C e E. (Sugestão: A soma dos momentos que atuam na cruzeta deve ser nula.)

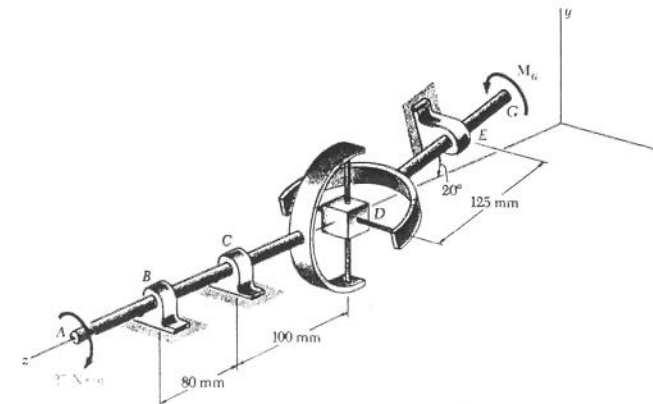


Figura P6.129

*6.130 Resolva o Prob. 6.129 supondo que o braço da cruzeta preso ao eixo ABC está na posição horizontal.

*6.131 O mecanismo da figura é instalado em alguns pátios de carga para que a borda C possa ser nivelada com o fundo da carroceria de vários tipos de caminhão. O peso da plataforma e do mecanismo é, grosso modo, equilibrado pela força exercida pela mola DE , sendo o ajuste final de altura controlado pelo cilindro hidráulico GJ . Sabendo que o peso de todas as partes móveis é equivalente a uma força P de 6.250 N, determine a tração necessária na mola DE para que a força exercida pelo cilindro hidráulico seja nula na posição ilustrada.

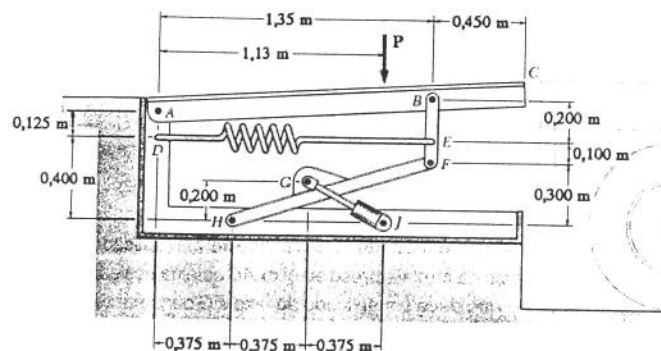


Figura P6.131

*6.132 O peso da plataforma e do mecanismo do Prob. 6.131 é exatamente equilibrado pela força exercida pela mola DE , na posição da figura, sendo nula a força exercida pelo cilindro hidráulico GJ . Uma força de 900 N vertical e dirigida para baixo é então aplicada na borda C . Determine a força que deve ser exercida pelo cilindro hidráulico para que o mecanismo permaneça na mesma posição.

*6.133 As grandes tenazes mecânicas da figura são usadas para agarrar e erguer uma chapa grossa de aço. HJ , de 7 500 kg. Sabendo que não há deslizamento entre a chapa e as tenazes em H e J , determine as componentes de todas as forças que agem na barra EFH . (Sugestão: Considere a simetria das tenazes para estabelecer relações entre as componentes da força que age no ponto E da peça EFH e as componentes da força que age no ponto D da peça CDF .)

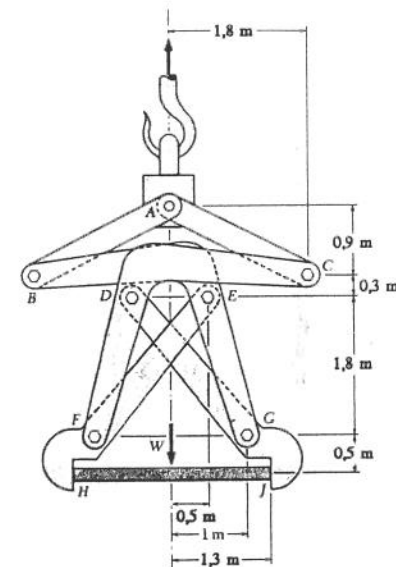


Figura P6.133

Problemas de Recapitulação

6.134 O mecanismo de Whitworth, da figura, é usado para produzir um rápido de retorno do ponto D . O bloco em B é articulado por um pino ao eixo de manivela desliza livremente no sulco da peça CD . Determine o vetor-binário M que deve ser aplicado na manivela AB para manter o mecanismo em equilíbrio quando: (a) $\alpha = 0$ e (b) $\alpha = 30^\circ$.

6.135 Resolva o Prob. 6.134 com: (a) $\alpha = 60^\circ$ e (b) $\alpha = 90^\circ$.

6.136 Determine as reações nos apoios das vigas da figura.

6.137 A elevação da plataforma é controlada por dois mecanismos idênticos apenas um é visto na figura. Uma carga de 7 500 N é aplicada ao mecanismo ilustrado. Salvo o pino C pode transmitir apenas forças horizontais, determine: (a) a força na barra Bi componentes da força exercida pelo cilindro hidráulico no pino H .

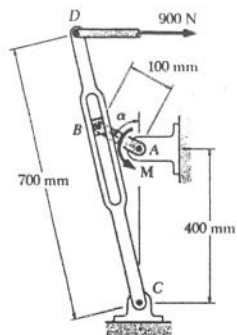
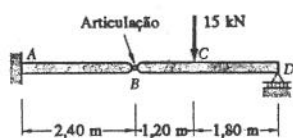
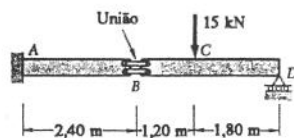


Figura P6.134



(a)



(b)

Figura P6.136

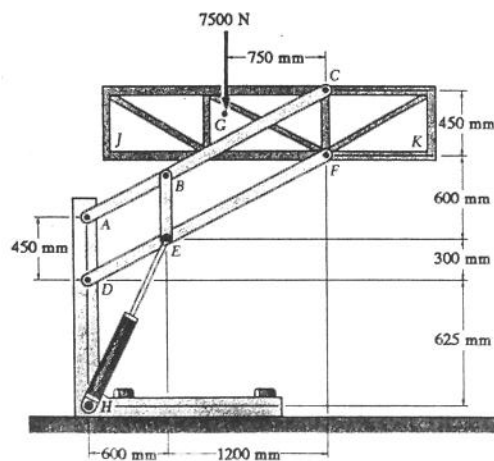


Figura P6.137

6.138 A chave especial para encanadores é utilizada em espaços exíguos (por exemplo, sob um lavatório ou pia). Consiste essencialmente em um mordente BC articulado em B a uma haste longa. Sabendo que as forças exercidas sobre a porca são equivalentes a um binário horário (quando visto de cima) de momento $13,5 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine: (a) o módulo da força exercida pelo pino B no mordente BC e (b) o vetor-binário M_O aplicado à chave.

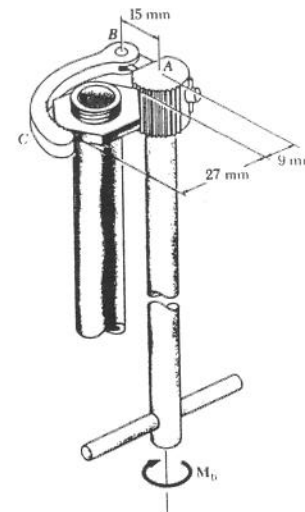


Figura P6.138

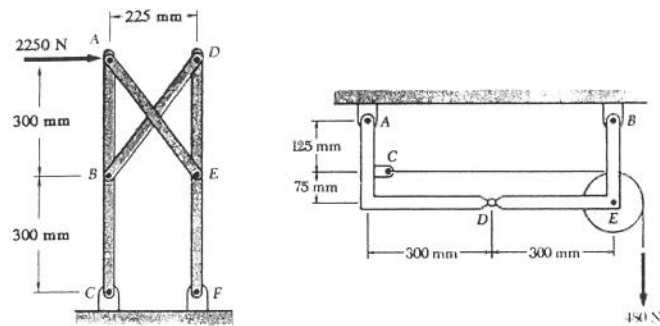
6.139 Determine a reação em F e as forças nas barras AE e BD .

6.140 Sabendo que a polia tem um raio de 75 mm , determine as componentes das reações em A e B .

6.141 Determine a intensidade das forças de agarramento produzidas quando duas forças de 300 N são aplicadas de acordo com a ilustração.

6.142 Determine as forças nas barras CE , DE e DF da treliça da figura.

6.143 Determine as forças nas barras EG , EF e DF da treliça da figura.



Figuras P6.139 e P6.140

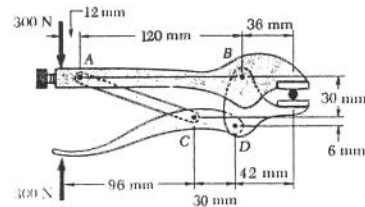
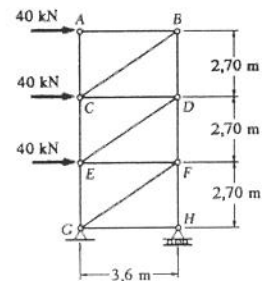


Figura P6.141



Figuras P6.142 e P6.143

6.144 A barra dobrada DEF encaixa-se no tubo dobrado ABC , como mostra a figura. Desprezando efeitos de atrito, determine as reações em A e F devidas à força de 720 N aplicada em B .

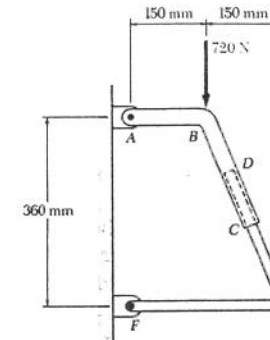


Figura P6.144

6.145 Um bloco de 300 kg pode ser suspenso por uma pequena estrutura de quatro maneiras, como mostra a figura. A roldana tem 250 mm de diâmetro. Em cada caso, determine: (a) os componentes da força e o momento que representam a reação em A e (b) a força exercida no ponto D da barra vertical.

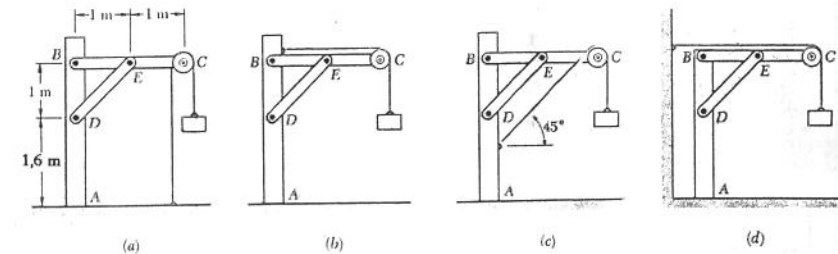


Figura P6.145

Recapitulação e Sumário

Neste capítulo aprendemos a determinar as *forças internas* que mantêm unidas as várias partes de uma estrutura.

Análise de treliças

A primeira metade do capítulo foi dedicada à análise de *treliças*, isto é, à análise de estruturas formadas por *barras retas articuladas apenas nas suas extremidades*. As barras são delgadas e não suportam cargas laterais, todas as cargas devem ser aplicadas nas juntas; uma treliça consiste em um conjunto de pinos e barras sujeitas a duas forças [Seção 6.2].

Treliças simples

Diz-se que uma treliça é rígida se ela foi projetada de modo a não sofrer deformações grandes e ruir sob uma pequena carga. Uma treliça triangular formada por três barras ligadas por pinos nas três juntas é claramente uma treliça rígida (Fig. 6.25 a), assim como a treliça obtida acrescentando-se duas novas barras à anterior e ligando-as, formando uma nova junta (Fig. 6.25 b). Treliças obtidas pela repetição deste procedimento são denominadas *treliças simples*. Pode-se verificar que em uma treliça simples o número total de barras é $b = 2n - 3$, onde n é o número total de nós [Seção 6.3].

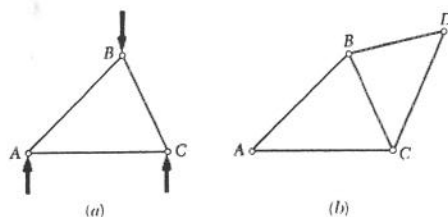


Figura 6.25

Método dos nós

As forças nas várias barras da treliça podem ser determinadas pelo *método dos nós* [Seção 6.4]. Inicialmente pode-se determinar as reações nos apoios considerando a treliça toda como um corpo livre. Desenha-se então o diagrama de corpo livre de cada pino com as forças que são aplicadas nele pelas barras ou apoios que ele interliga. Como as barras são retas e sujeitas a duas forças, a força aplicada por uma barra em um pino tem a direção da barra e apenas sua intensidade é desconhecida. No caso de treliças simples é sempre possível desenhar o diagrama de corpo livre dos pinos em uma ordem

tal que somente duas forças desconhecidas são incluídas em cada diagrama. Estas forças podem ser calculadas a partir das duas equações de equilíbrio ou — se houver apenas três forças — a partir do triângulo de forças correspondentes. Se a força aplicada por uma barra sobre um pino apontar para o pino, a barra estará em *compressão*; caso a força aponte do pino para a barra ela estará em *tração* [Problema Resolvido 6.1]. A análise de treliças pode ser abreviada pela identificação dos *nós sob condições de carregamento* [Seção 6.5]. O método dos nós pode ser estendido à análise de treliças tridimensionais ou *treliças espaciais*.

Método das seções

O método das seções é utilizado, preferencialmente, ao método dos nós quando se deseja apenas calcular as forças em uma barra, ou em um número pequeno de barras de uma treliça [Seção 6.7]. Para determinar a força na barra BD da treliça da Fig. 6.26a, por exemplo, *secciona-se* as barras BD , BE e CE , remove-se estas três barras e utiliza-se a parte ABC da treliça como corpo livre (Fig. 6.26 b). Escrevendo $\Sigma M_E = 0$ determina-se a intensidade da força F_{BD} , que representa a força da barra BD . Um sinal positivo indica que a barra está sob *tração* e um sinal negativo indica que ela está sob *compressão* [Problemas Resolvidos 6.2 e 6.3].

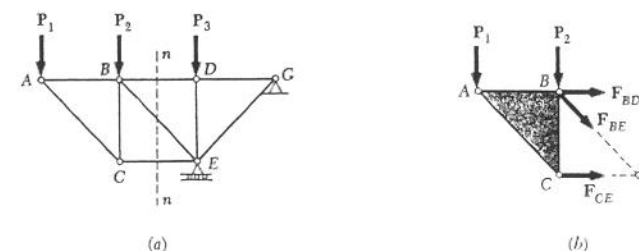


Figura 6.26

O método das seções é particularmente útil na análise de *treliças compostas*, isto é, treliças que não podem ser construídas com a treliça básica triangular da Fig. 6.25 a. Estas treliças podem ser obtidas pela conexão rígida de várias treliças simples [Seção 6.8]. Se as treliças componentes foram ligadas adequadamente (por exemplo, um pino e uma barra ou três barras não concorrentes e não paralelas) e se a estrutura resultante tem suportes adequados (por exemplo, um pino e um rolete), a treliça rígida está *estaticamente determinada, rígida e completamente vinculada*. Fica então satisfeita a seguinte condição necessária, mas não suficiente: $b + r = 2n$, onde b é o número de barras, r é o número de reações de apoio desconhecidas, e n é o número de nós.

Estruturas e máquinas

A segunda parte do capítulo foi dedicada à análise de *estruturas e máquinas*, que são sistemas compostos por *elementos submetido a várias forças*.

As estruturas são projetadas para suportar cargas sendo, em geral, estacionárias e completamente vinculadas. As máquinas destinam-se a modificar ou transmitir forças e têm sempre partes móveis [Seção 6.9].

Análise de uma estrutura

Para *analisar uma estrutura*, em primeiro lugar, consideramos a estrutura toda como corpo livre e escrevemos três equações de equilíbrio [Seção 6.10]. Se a estrutura continua rígida quando separada de seus vínculos externos, as reações envolvem apenas três incógnitas que podem ser determinadas resolvendo as três equações [Problemas Resolvidos 6.4 e 6.5]. Por outro lado, se a estrutura deixa de ser rígida quando separada de seus vínculos externos, as reações envolvem mais do que três incógnitas e não podem ser determinadas completamente [Seção 6.11; Problema Resolvido 6.6].

Barras sujeitas a várias forças

Então *desmembra-se a estrutura* e identificam-se as barras sujeitas a duas forças e aquelas sujeitas a mais de duas forças; supõe-se que os pinos pertencem a uma das duas barras que eles articulam. Desenha-se um diagrama de corpo livre para cada barra sujeita a mais de duas forças, observando que quando duas barras sujeitas a várias forças são ligadas à mesma barra sujeita a duas forças, esta barra aplica sobre elas *forças de mesma intensidade desconhecida, sentido opostos, mas de direção conhecida*. Quando duas barras sujeitas a mais de duas forças estão articuladas por um pino, uma exerce sobre a outra *forças de sentidos opostos e de direção e intensidade desconhecidas*, que devem ser representadas por *duas componentes desconhecidas*. As equações de equilíbrio, obtidas dos diagramas de corpo livre das barras sujeitas a várias forças, podem ser resolvidas e assim as forças internas são determinadas [Problemas Resolvidos 6.4 e 6.5]. Pode-se também utilizá-las para determinar as reações nos vínculos [Problema Resolvido 6.6]. Na realidade, se a estrutura é *estaticamente determinada e rígida*, os diagramas de corpo livre das barras sujeitas a várias forças nos dão um número de equações igual ao número de forças desconhecidas (incluindo as reações dos vínculos) [Seção 6.11]. Entretanto, como já sugerido anteriormente, é aconselhável estudar em primeiro lugar o diagrama de corpo livre da estrutura toda a fim de minimizar o número de equações a resolver simultaneamente.

Análise de Máquinas

Para *analisar uma máquina* desmembramo-la e, de acordo com o mesmo procedimento utilizado na análise de uma estrutura, desenhemos diagramas de corpo livre para cada elemento sujeito a várias forças. As correspondentes equações de equilíbrio determinam as *forças de saída* exercidas pela máquina em termos das *forças de entrada* nela aplicadas e também as *forças internas* nas várias articulações [Seção 6.12 e Problema Resolvido 6.7].

Capítulo 7

Forças em Vigas e Cabos

***7.1. Introdução.** Nos capítulos precedentes, foram considerados dois problemas básicos envolvendo estruturas: (1) a determinação de forças externas que atuam numa estrutura (Cap. 4) e (2) a determinação das forças que mantêm unidos os vários elementos que formam uma estrutura (Cap. 6). Consideraremos agora o problema de determinação das forças internas que mantêm unidas as várias partes de um dado elemento.

Inicialmente analisaremos as forças internas nos elementos de uma estrutura, como o guindaste considerado anteriormente no Cap. 6 (Seções 6.1 e 6.10). Veremos que, enquanto as forças internas em uma barra reta podem produzir apenas *tração* e *compressão*, em qualquer outro tipo de elemento as forças internas produzirão também *cisalhamento* e *flexão*.

Boa parte deste capítulo será dedicada à análise das forças internas em dois tipos de estruturas de engenharia:

1. *Vigas*, que são, usualmente, barras longas prismáticas e retas, projetadas para suportar cargas aplicadas em vários pontos ao longo de seu comprimento.
2. *Cabos*, que são elementos flexíveis capazes de resistir apenas a tração, projetados para suportar cargas localizadas ou distribuídas. Cabos são utilizados em muitas aplicações de engenharia, tais como pontes pênsis e linhas de transmissão.

***7.2. Forças Internas nos Elementos.** Em primeiro lugar consideremos uma barra reta AB submetida à ação de duas forças (Fig. 7.1a). Da Seção 4.6 sabemos que as forças F e $-F$ que atuam em A e B , respectivamente, devem ser dirigidas ao longo de AB em sentidos opostos e ter o mesmo módulo F . Agora, cortemos a barra em C . Para manter o equilíbrio dos corpos livres AC e CB assim obtidos, devemos aplicar a AC uma força $-F$ igual e oposta a F , e a CB uma força F igual e oposta a $-F$ (Fig. 7.1b). Essas novas forças são dirigidas ao longo de AB , em sentidos opostos, e têm o mesmo módulo F . Uma vez que as duas partes AC e CB estavam em equilíbrio antes de cortar a barra, *forças internas* equivalentes a essas novas forças deviam existir no próprio elemento. Observamos que, no caso de um elemento reto submetido à ação de duas forças, as forças internas que agem em cada uma de suas partes são equivalentes a uma força axial. O valor F dessa força não depende da posição da seção C e a força é denominada *força no elemento AB* . No caso considerado, o elemento está sob tração e se alongará sob a ação das forças internas. No caso representado na Fig. 7.2, o elemento está sob compressão, e seu comprimento diminuirá sob a ação das forças internas.

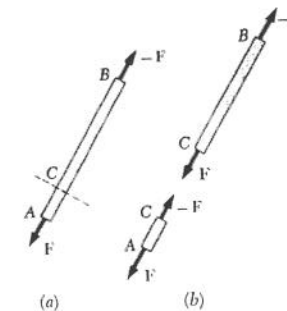


Figura 7.1

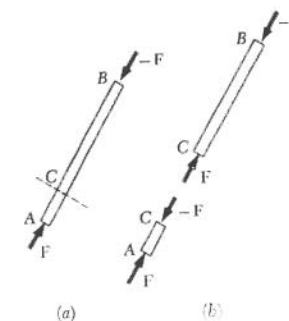


Figura 7.2

A seguir consideremos um elemento submetido a várias forças. Tomemos, por exemplo, o elemento AD do guindaste analisado na Seção 6.10. Esse guindaste está novamente ilustrado na Fig. 7.3a, e o diagrama de corpo livre do elemento AD está na Fig. 7.3b. Cortamos, agora, o elemento AD no ponto J e desenhamos um diagrama de corpo livre para cada uma das partes JD e AJ (Fig. 7.3c e d). Considerando o corpo livre JD , verificamos que seu equilíbrio será mantido se aplicarmos em J uma força F para equilibrar a componente vertical de T , uma força V para equilibrar a componente horizontal de T e um vetor binário M para equilibrar o momento de T em relação a J . Novamente concluímos que devam existir forças internas em J antes de o elemento AD ser cortado. As forças internas que agem na parte JD do elemento AD são equivalentes ao sistema força-binário representado na Fig. 7.3c. De acordo com a terceira lei de Newton, as forças internas que agem em AJ devem ser equivalentes a um sistema força-binário igual e contrário, representado na Fig. 7.3d. É evidente que a ação das forças internas no elemento AD não está limitada a produzir tração ou compressão, como no caso dos elementos retos submetidos a duas forças; as forças internas também produzem cisalhamento e flexão. A força F , nesse caso, é novamente denominada *força axial*; a força V é denominada *força cortante*; e o momento M do binário é conhecido como *momento fletor em J* . Observamos que, na determinação das forças internas de um elemento, devemos indicar claramente em que parte do elemento se supõe que elas atuem. A deformação que ocorrerá no elemento AD está esquematizada na Fig. 7.3e. A análise dessa deformação é o objeto de estudo da Resistência dos Materiais.

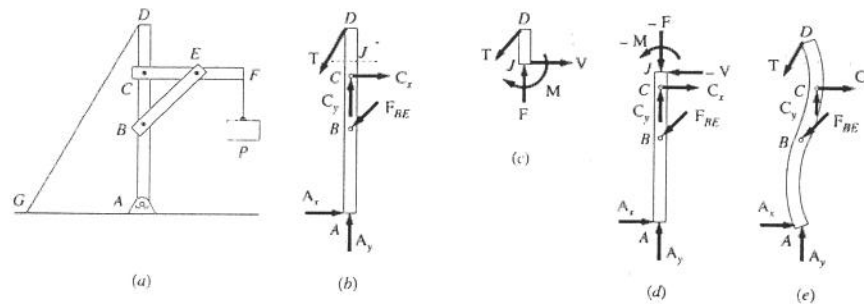


Figura 7.3

Deve-se notar que, em um elemento não-reto submetido à ação de duas forças, as forças internas são também equivalentes a um sistema força-binário. Isto é representado na Fig. 7.4, onde o elemento ABC , submetido à ação de duas forças, foi cortado em D .

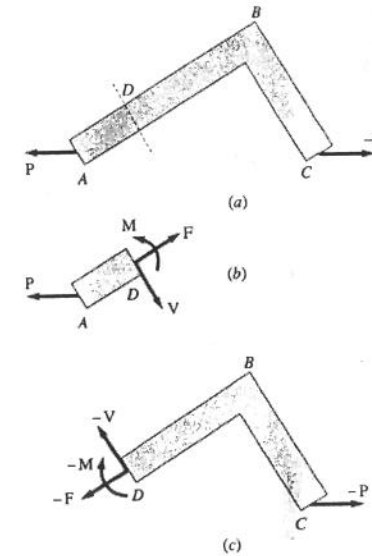
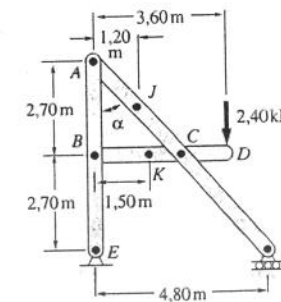


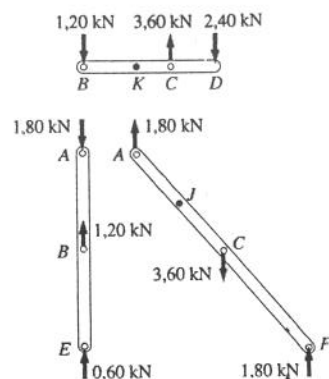
Figura 7.4

Problema Resolvido 7.1

Na estrutura representada, determinar as forças internas (a) no ponto J do elemento ACF e (b) no ponto K do elemento BCD . Essa estrutura já foi anteriormente considerada no Problema Resolvido 6.5.



Solução. As reações e as forças que atuam em cada elemento da estrutura são determinadas; isto já foi previamente feito no Problema Resolvido 6.5, e os resultados são aqui repetidos.



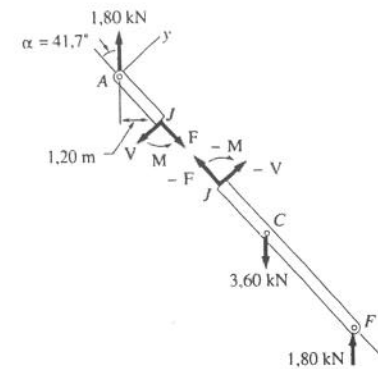
a) **Forças Internas em J.** O elemento ACF é cortado no ponto J, e a figura mostra as duas partes obtidas. As forças internas em J são representadas por um sistema força-binário equivalente que pode ser determinado considerando-se o equilíbrio de qualquer das partes. Considerando o corpo livre AJ, escrevemos

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \Sigma M_J = 0: & \quad -(1,80 \text{ kN})(1,20 \text{ m}) + M = 0 \\
 & \quad M = +2,16 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M = 2,16 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \leftarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \searrow \Sigma F_x = 0: & \quad F - (1,80 \text{ kN}) \cos 41,7^\circ = 0 \\
 & \quad F = +1,34 \text{ kN} \quad F = 1,34 \text{ kN} \quad \searrow \leftarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \nearrow \Sigma F_y = 0: & \quad -V + (1,80 \text{ kN}) \sin 41,7^\circ = 0 \\
 & \quad V = +1,20 \text{ kN} \quad V = 1,20 \text{ kN} \quad \nearrow \leftarrow
 \end{aligned}$$

As forças internas em J são, portanto, equivalentes a um binário de momento M , uma força axial F e a uma força cortante V . O sistema força-binário interno que atua na parte JCF é igual e com sentido oposto.

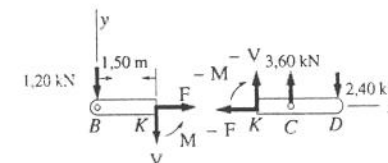


b) **Forças internas em K.** Cortamos o elemento BCD em K e obtemos as duas partes indicadas. Considerando o corpo livre BK, escrevemos

$$\begin{aligned}
 + \circlearrowleft \Sigma M_K = 0: & \quad (1,20 \text{ kN})(1,50 \text{ m}) + M = 0 \\
 & \quad M = -1,80 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M = 1,80 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \leftarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow \Sigma F_x = 0: & \quad F = 0 \quad F = 0 \quad \leftarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad -1,20 \text{ kN} - V = 0 \\
 & \quad V = -1,20 \text{ kN} \quad V = 1,20 \text{ kN} \uparrow \leftarrow
 \end{aligned}$$



Problemas

7.1 a 7.4 Determine as forças internas (força axial, força cortante e momento fletor) no ponto J da estrutura indicada.

7.1 Estrutura e carregamento do Probl. 6.53.

7.2 Estrutura e carregamento do Probl. 6.54.

7.3 Estrutura e carregamento do Probl. 6.75.

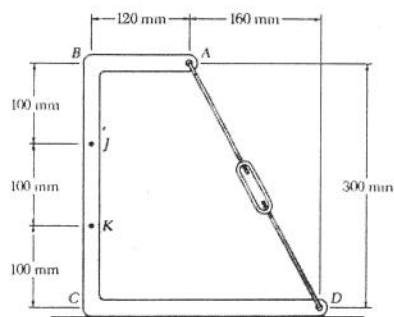
7.4 Estrutura e carregamento do Probl. 6.74.

7.5 e 7.6 Sabendo que o tensor foi ajustado para que a tração no fio AD seja de 850 N, determine as forças internas no ponto indicado.

7.5 Ponto J .

7.6 Ponto K .

7.7 Determinou-se experimentalmente que o momento fletor no ponto K da estrutura da figura é 300 N · m. Determine: (a) a tração no fio AD e (b) a correspondente força interna no ponto J .



Figuras P7.5, P7.6 e P7.7

7.8 O suporte ABD é sustentado por um pino em A e pelo cabo DE . Determine as forças internas imediatamente à esquerda da carga.

7.9 Determine as forças internas no ponto J , com $\alpha = 90^\circ$.

7.10 Determine as forças internas no ponto J , com $\alpha = 0^\circ$.

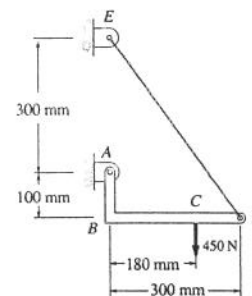
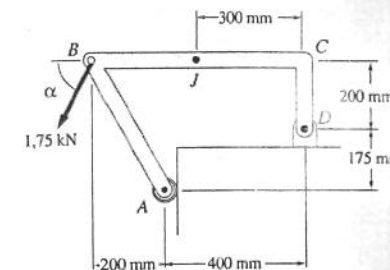


Figura P7.8



Figuras P7.9 e P7.10

7.11 Sabendo que o raio de cada roldana é de 120 mm, determine as forças internas nos pontos: (a) J e (b) K .

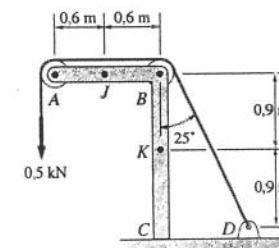


Figura P7.11

7.12 Sabendo que cada roldana tem um raio de 100 mm, determine as forças internas nos pontos: (a) C e (b) J .

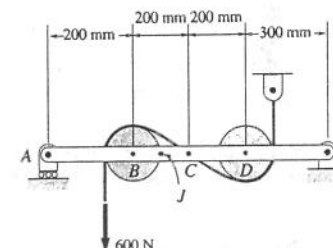


Figura P7.12

7.13 Um canal de aço forma um dos lados de um lance de escadas. Se o peso por unidade de comprimento do canal é p N/m, determine as forças internas no centro do canal, devidas a seu próprio peso, quando $p = 333$ N/m, $l = 3,60$ m e $h = 2,70$ m. Considere cada tipo de apoio ilustrado.

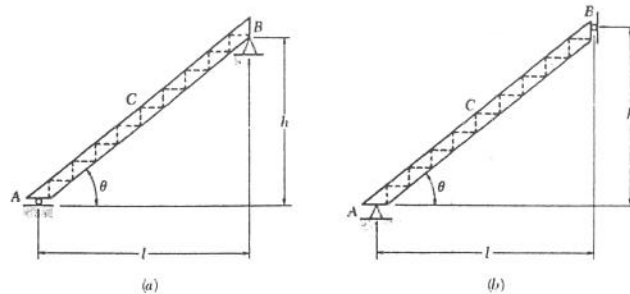
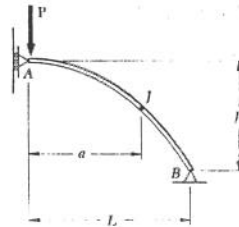


Figura P7.13

7.14 A barra AB tem perfil parabólico com vértice em A. Se uma carga vertical P de 1 500 N é aplicada em A, determine as forças internas em J quando $h = 225$ mm, $L = 750$ mm e $a = 500$ mm.

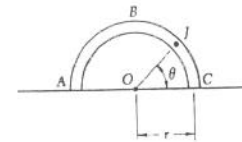
7.15 Sabendo que o perfil do elemento AB é parabólico com vértice em A, determine o módulo e a posição do momento fletor máximo.



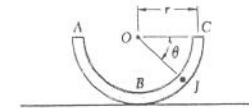
Figuras P7.14 e P7.15

7.16 e 7.17 Meia seção de um tubo repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito, como ilustrado. Se a massa da seção é de 12 kg e o diâmetro é de 400 mm, determine o momento fletor no ponto J quando $\theta = 90^\circ$.

***7.18 e 7.19** Meia seção de um tubo, com peso P e comprimento unitário, repousa sobre uma superfície horizontal lisa. Determine as forças internas no ponto J em termos de P , r e θ .



Figuras P7.16 e P7.18



Figuras P7.17 e P7.19

***7.20** No Prob. 7.19, determine o módulo e o ponto de aplicação da força axial interna máxima.

Vigas

***7.3. Vários Tipos de Carregamentos e de Vínculos Externos.** Um elemento estrutural projetado para suportar cargas aplicadas em vários pontos de sua extensão é denominado *viga*. Em geral as cargas são perpendiculares ao eixo da viga, na qual causarão somente cisalhamento e flexão. Quando as cargas não formam ângulo reto com a viga, produzem também forças axiais.

Em geral, vigas são barras prismáticas retas e longas. Projetar uma viga consiste essencialmente em selecionar uma seção reta que proporcionará resistência mais efetiva ao cisalhamento e flexão produzidos pelas cargas aplicadas. O projeto da viga, portanto, inclui duas partes distintas. Na primeira parte, as forças cortantes e os momentos fletores produzidos pelas cargas são determinados. A segunda parte refere-se à escolha da seção reta mais adequada para resistir a forças cortantes e momentos fletores determinados na primeira parte. Esta seção, Vigas, trata da primeira parte do projeto, que compreende a determinação de forças cortantes e momentos fletores nas vigas submetidas a várias condições de carregamento e vinculadas de modos diversos. A segunda parte do problema pertence ao estudo da Resistência dos Materiais.

Uma viga pode estar submetida a *cargas concentradas* $Q_1, Q_2, \dots$ expressas em newtons ou em seu múltiplo quilonewtons (Fig. 7.5a), a uma *carga distribuída* w , expressa em N/m ou kN/m (Fig. 7.5b) ou a uma combinação de ambas. Quando a carga w por unidade de comprimento tem um valor constante sobre parte da viga (como entre A e B na Fig. 7.5b), diz-se que a carga é *uniformemente distribuída* sobre aquela região da viga. A determinação da reação nos vínculos externos pode ser consideravelmente simplificada se as cargas distribuídas forem substituídas por cargas concentradas equivalentes, conforme explicado na Seção 5.8. Essa substituição, no entanto, não deve ser efetuada ou, pelo menos, deve ser efetuada com cuidado, quando forças internas estão sendo calculadas (ver Problema Resolvido 7.3).

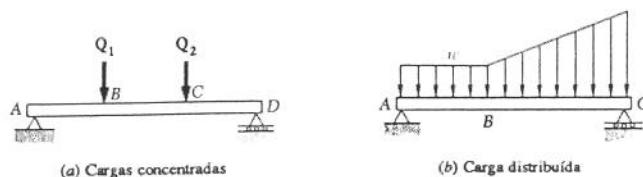


Figura 7.5 Tipos de carregamento.

As vigas são classificadas de acordo com o modo pelo qual são vinculadas. Diversos tipos de vigas frequentemente usadas são representadas na Fig. 7.6. A distância L entre os apoios é denominada *vão*. Observe-se que as reações serão determinadas se os vínculos externos envolverem apenas três incógnitas. As reações serão estaticamente indeterminadas se mais incógnitas forem envolvidas; nesse caso, os métodos da estática não serão suficientes para determinar as reações, e as propriedades da viga com relação a sua resistência à flexão devem ser consideradas. Vigas apoiadas por dois roletes não são ilustradas aqui; tais vigas são apenas parcialmente vinculadas e mover-se-ão sob certas condições de carregamento.

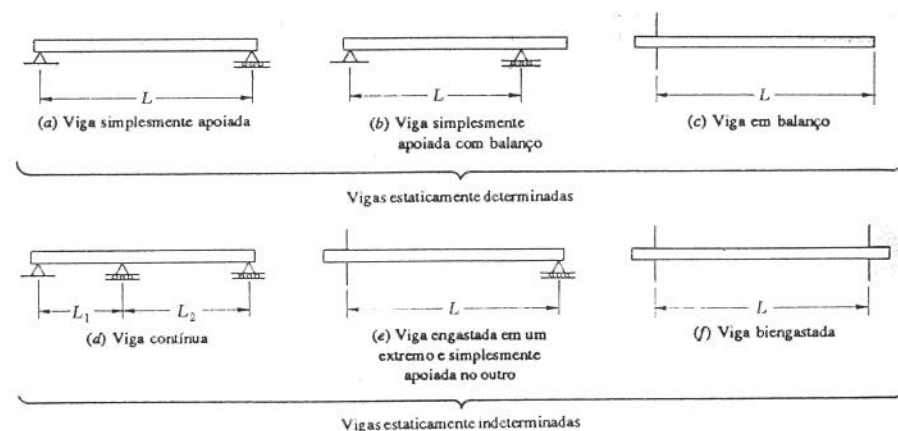


Figura 7.6 Tipos de vigas.

Algumas vezes, duas ou mais vigas são acopladas por articulações para formar uma única estrutura contínua. Dois exemplos de vigas articuladas em um ponto H são representados na Fig. 7.7. Será observado que as reações nos vínculos externos envolvem quatro incógnitas e não podem ser determinadas a partir do diagrama de corpo livre do sistema das duas vigas. Entretanto, essas incógnitas poderão ser determinadas considerando-se separadamente o diagrama de corpo livre de cada viga; seis incógnitas estão envolvidas (incluindo duas componentes da força na articulação), e dispõe-se de seis equações.

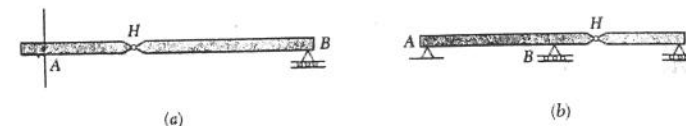


Figura 7.7 Vigas combinadas.

***7.4. Força Cortante e Momento Fletor em uma Viga.** Consideremos uma viga AB submetida a várias cargas concentradas e distribuídas (Fig. 7.8a). Propomos-nos a determinar a força cortante e o momento fletor em qualquer ponto da viga. No exemplo aqui considerado, a viga é simplesmente apoiada; porém, o método utilizado pode ser aplicado a qualquer tipo de viga estaticamente determinada.

Primeiro determinamos as reações em A e B , escolhendo a viga inteira como corpo livre (Fig. 7.8b); escrevendo $\Sigma M_A = 0$ e $\Sigma M_B = 0$, obtemos, respectivamente, R_A e R_B .

Para determinar as forças internas em C , cortamos a viga em C e desenhamos os diagramas de corpo livre das partes AC e CB da viga (Fig. 7.8c). Usando o diagrama de corpo livre de AC , podemos determinar a força cortante V em C , igualando a zero a soma das componentes verticais de todas as forças que atuam em AC . Analogamente, o momento fletor M em C pode ser determinado igualando-se a zero a soma dos momentos em relação a C de todas as forças e de todos os binários que atuam em AC . Poderíamos ter usado igualmente o diagrama de corpo livre de CB^* e determinado a força cortante V' e o momento fletor M' , igualando a zero a soma das componentes verticais e a soma dos momentos em relação a C de todas as forças e binários que atuam em CB . Ainda que essa liberdade quanto à escolha do corpo livre possa facilitar o cálculo dos valores numéricos da força cortante e do momento fletor, torna-se necessário indicar em que parte da viga as forças internas consideradas estão agindo. Se a força cortante e o momento fletor, entretanto, forem calculados para todos os pontos da viga e eficientemente registrados, não será necessário, a cada instante, especificar qual parte da viga é utilizada como corpo livre. Adotaremos, portanto, a seguinte convenção:

Para determinar a força cortante em uma viga, sempre suporemos que as forças internas V e V' estão dirigidas conforme representamos na Fig. 7.8c. Um valor positivo obtido para seu valor V indicará que essa hipótese estava correta e que as forças cortantes estão realmente dirigidas conforme representado. Um valor negativo obtido para V indicará que a hipótese estava errada e que as forças cortantes estão dirigidas em sentidos opostos. Assim, somente a intensidade V , associada a um sinal mais ou menos, necessita ser registrada para definir completamente as forças de cisalhamento em um dado ponto da viga. O escalar V é comumente referido como *força cortante* em um dado ponto da viga.

* A força e o vetor-binário que representam as forças internas sobre CB serão agora designados V' e M' em vez de $-V$ e M , como anteriormente, de modo a evitar confusão quando aplicarmos a convenção de sinais que estamos em via de expor.

Analogamente, suporemos sempre que os momentos internos M e M' estão orientados conforme representado na Fig. 7.8c. Um sinal positivo obtido para seu valor M , comumente denominado *momento fletor*, indicará que essa hipótese era correta, e um valor negativo, que era errada. Resumindo a convenção adotada, temos:

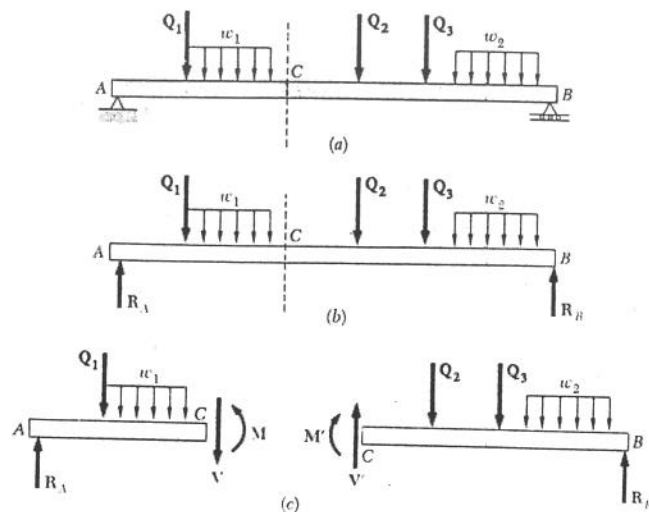


Figura 7.8

A força cortante V e o momento fletor M em um dado ponto de uma viga serão positivos quando as forças internas e os momentos que atuam em cada parte da viga estiverem orientados conforme o esquema na Fig. 7.9a.

Essa convenção pode ser lembrada mais facilmente se observarmos que:

1. A força cortante em C é positiva quando as forças externas (cargas e reações) que atuam na viga tendem a cisalhá-la em C , conforme indicado na Fig. 7.9b.
2. O momento fletor em C é positivo quando as forças externas que atuam na viga tendem a flexioná-la em C , como indicado na Fig. 7.9c.

Pode também ser útil observar que a situação descrita na Fig. 7.9 e correspondente a valores positivos da força cortante e do momento fletor é precisamente a situação que ocorre na metade esquerda de uma viga simplesmente apoiada que suporta uma única carga concentrada em seu ponto médio. Esse exemplo particular é completamente analisado na seção seguinte.

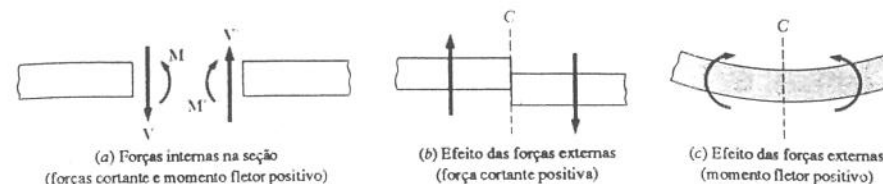


Figura 7.9

***7.5. Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor.** Agora que a força cortante e o momento fletor já foram claramente definidos tanto em sentido quanto em módulo, podemos facilmente registrar seus valores em qualquer ponto da viga, representando esses valores em função de uma distância x medida a partir de uma das extremidades da viga. Os gráficos obtidos desse modo são denominados, respectivamente, *diagrama de força cortante* e *diagrama de momento fletor*. Como exemplo, consideremos uma viga AB simplesmente vinculada, de vão L , submetida a uma única carga concentrada Q , aplicada em seu ponto médio D (Fig. 7.10a). Em primeiro lugar, determinamos as reações nos vínculos externos, a partir do diagrama de corpo livre de toda a viga (Fig. 7.10b). Resulta que o módulo de cada reação é igual a $Q/2$.

Em seguida, cortamos a viga em um ponto C entre A e D e traçamos os diagramas de corpo livre de AC e CB (Fig. 7.10c). Supondo que a força cortante e o momento fletor sejam positivos, orientamos as forças internas V e V' e os binários internos M e M' como indicado na Fig. 7.9a. Considerando o corpo livre AC e escrevendo que a soma das componentes verticais e a soma dos momentos em relação a C , das forças que atuam no corpo livre, são iguais a zero, encontramos $V = +Q/2$ e $M = +Qx/2$. Por conseguinte, tanto a força cortante quanto o momento fletor são positivos; isto pode ser comprovado observando-se que a reação em A tende a cisalhar e fletir a viga em C , conforme indicado nas Figs. 7.9b e c. Podemos representar graficamente V e M entre A e D (Fig. 7.10e e f); a força cortante tem um valor constante $V = Q/2$, enquanto o momento fletor cresce linearmente desde $M = 0$, em $x = 0$, até $M = QL/4$, em $x = L/2$.

Cortando agora a viga em um ponto E entre D e B e considerando o corpo livre EB (Fig. 7.10d), escrevemos que a soma das componentes verticais e a soma dos momentos em relação a E , das forças que atuam no corpo livre, são iguais a zero. Obtemos $V = -Q/2$ e $M = Q(L-x)/2$. Portanto a força cortante é negativa e o momento fletor positivo; isto pode ser comprovado observando-se que a reação em B flexiona a viga no ponto E , conforme indicado na Fig. 7.9c, mas tende a cisalhá-la de maneira oposta àquela representada na Fig. 7.9b. Podemos completar agora os diagramas de força cortante e momento fletor das Figs. 7.10e e f; a força cortante tem valor constante $V = -Q/2$ entre D e B , enquanto o momento fletor decresce linearmente de $M = QL/4$, em $x = L/2$, até $M = 0$, em $x = L$.

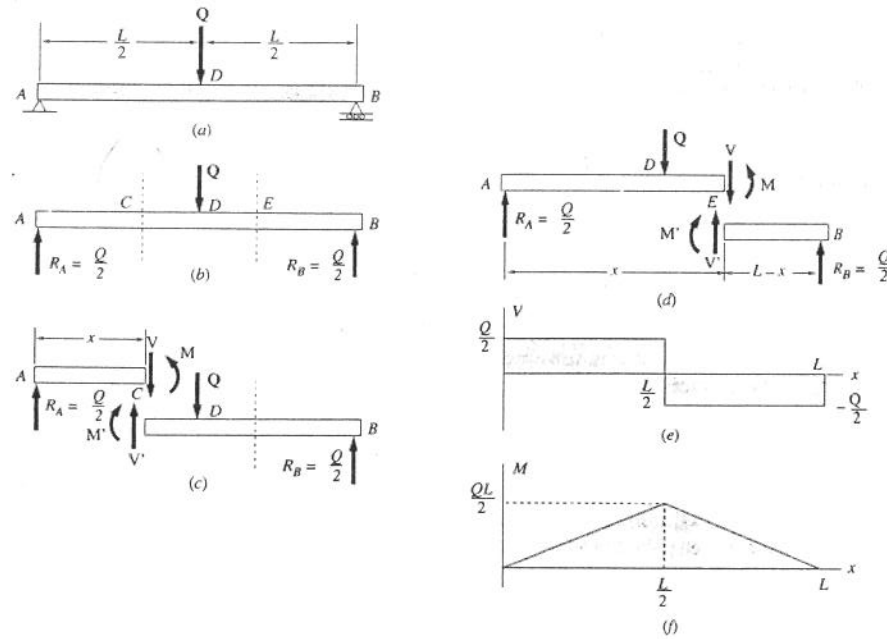
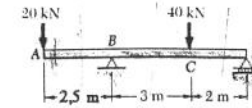


Figura 7.10

Observamos que, quando uma viga está submetida somente a cargas concentradas, a força cortante tem valor constante entre as cargas e o momento fletor varia linearmente entre eles. Por outro lado, quando uma viga está submetida a cargas distribuídas, a força cortante e o momento fletor variam de modo totalmente diferente (ver Problema Resolvido 7.3).

Problema Resolvido 7.2

Traçar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento representados.



Solução. As reações são determinadas considerando-se a viga inteira como um corpo livre; temos:

$$R_B = 46 \text{ kN} \uparrow$$

$$R_D = 14 \text{ kN} \uparrow$$

Em primeiro lugar determinamos as forças internas logo à direita da carga de 20 kN aplicada em A. Considerando a parte da viga à esquerda da seção 1 como corpo livre, e supondo V e M positivos (de acordo com a convenção adotada), escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 \quad V_1 = -20 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

A seguir, consideramos como corpo livre a parte da viga à esquerda da seção 2, e escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_2 = 0 \quad V_2 = -20 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad (20 \text{ kN})(2,5 \text{ m}) + M_2 = 0 \quad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

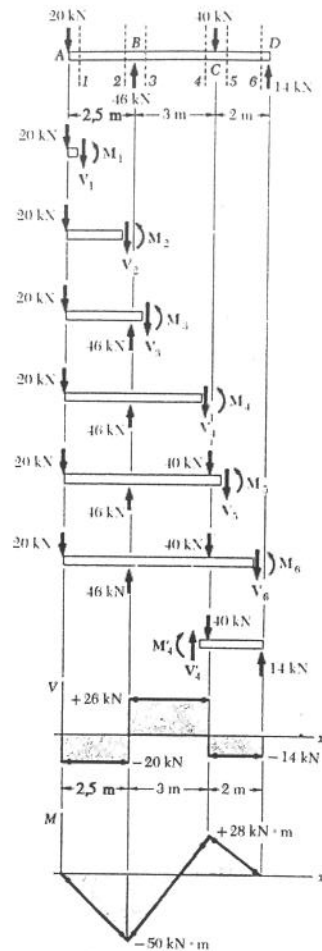
A força cortante e o momento fletor nas seções 3, 4, 5 e 6 são determinados de modo semelhante, a partir dos diagramas de corpo livre representados. Obtemos

$$V_3 = +26 \text{ kN} \quad M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_4 = +26 \text{ kN} \quad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_5 = -14 \text{ kN} \quad M_5 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_6 = -14 \text{ kN} \quad M_6 = 0$$



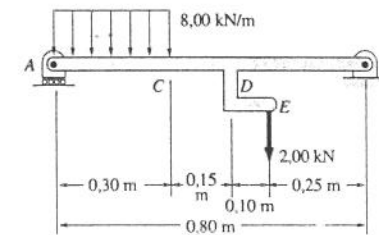
Para várias das últimas seções, os resultados podem ser obtidos mais facilmente considerando-se como corpo livre a parte da viga à direita da seção. Por exemplo, considerando a parte da viga à direita da seção, escrevemos

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma F_y = 0: & \quad V_4 - 40 \text{ kN} + 14 \text{ kN} = 0 & \quad V_4 = +26 \text{ kN} \\
 +\uparrow \Sigma M_4 = 0: & \quad -M_4 + (14 \text{ kN})(2 \text{ m}) = 0 & \quad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Podemos agora situar os seis pontos indicados sobre os diagramas de força cortante e de momento fletor. Como explicado na Seção 7.4, a força cortante tem valor constante entre as cargas concentradas e o momento fletor varia linearmente; obtemos, portanto, os diagramas de força cortante e de momento fletor representados.

Problema Resolvido 7.3

Faça os gráficos de força cortante e de momento fletor para a viga AB. A carga distribuída de 8,00 kN/m estende-se por 0,30 m da viga, de A a C, e a carga de 2,00 kN é aplicada ao ponto E.



Solução. As reações são determinadas considerando a viga inteira como corpo livre:

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_A = 0: & \quad B_y (0,80 \text{ m}) - (2,40 \text{ kN})(0,15 \text{ m}) - (2,00 \text{ kN})(0,55 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad B_y = 1,83 \text{ kN} & \quad B_y = 1,83 \text{ kN} \uparrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 +\uparrow \Sigma M_B = 0: & \quad (2,40 \text{ kN})(0,65 \text{ m}) + (2,00 \text{ kN})(0,25 \text{ m}) - A(0,80 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad A = 2,58 \text{ kN} & \quad A = 2,58 \text{ kN} \uparrow
 \end{aligned}$$

$$\pm \Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0 \quad B_x = 0$$

A carga de 2,00 kN é agora substituída por um sistema força-vetor binário equivalente aplicado ao ponto D da barra.

De A a C. Determinamos as forças internas a uma distância x do ponto A considerando a parte da viga à esquerda da seção 1. A parte da carga distribuída que age no corpo livre é substituída por sua resultante, e escrevemos:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2,58 - 8,00x - V = 0 \quad V = 2,58 - 8,00x$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad -2,58x + 8,00x \left(\frac{1}{2}x\right) + M = 0 \quad M = 2,58x - 4,00x^2$$

Como o diagrama de corpo livre ilustrado pode ser usado para todos os valores de x menores que $0,30$ m, as expressões obtidas para V e M são válidas na região $0 < x < 0,30$ m.

De C a D. Considerando a parte da viga à esquerda da seção 2 e novamente substituindo a carga distribuída por sua resultante, obtemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad 2,58 - 2,40 - V = 0 \quad V = 0,18 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad -2,58x + 2,40(x - 0,15) + M = 0 \quad M = (0,36 + 0,18x) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Essas expressões são válidas na região $0,30 \text{ m} < x < 0,45 \text{ m}$.

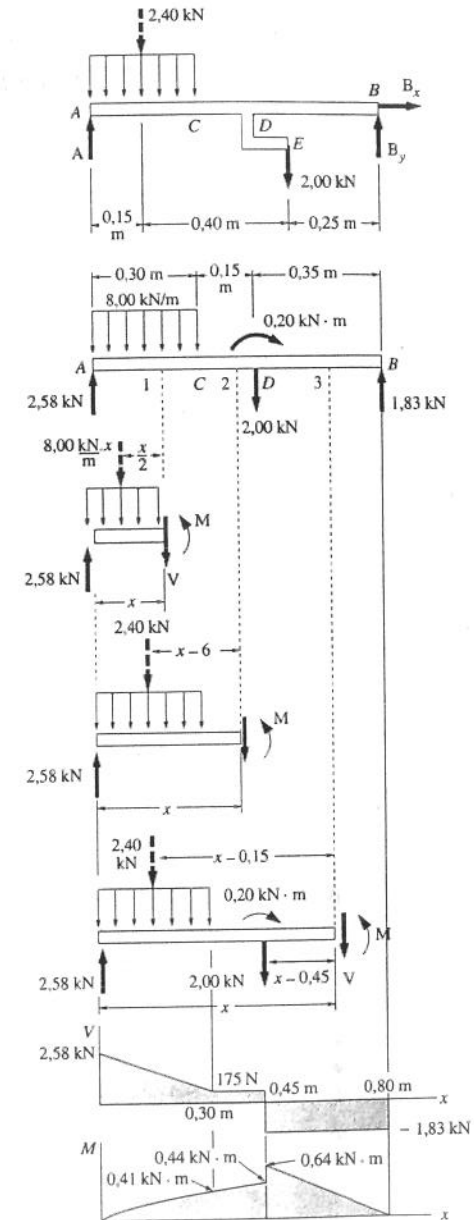
De D a B. Utilizando a porção da viga à esquerda da seção 3, obtemos, para a região $0,45 \text{ m} < x < 0,80 \text{ m}$,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2,58 - 2,40 - 2,00 - V = 0 \quad V = -1,83 \text{ kN}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = 0: \quad -2,58x + 2,40(x - 0,15) - 0,20 + 2,00(x - 0,45) + M = 0$$

$$M = (1,46 - 1,83x) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Os diagramas de força cortante e momento fletor da viga podem agora ser traçados. Notamos que o binário de momento $0,20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ aplicado ao ponto D introduz uma descontinuidade no diagrama de momento fletor.



Problemas

7.21 a 7.26 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento da figura.

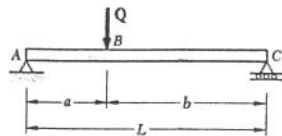


Figura P7.21

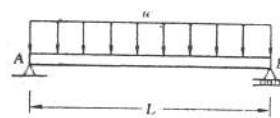


Figura P7.22

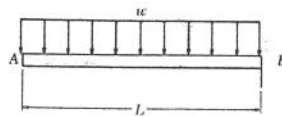


Figura P7.23

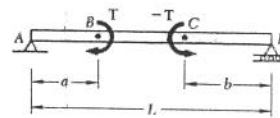


Figura P7.24

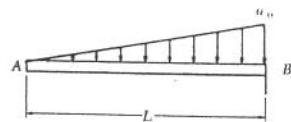


Figura P7.25

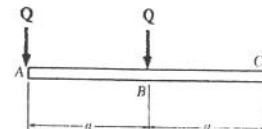


Figura P7.26

7.27 e 7.28 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga AB.

7.29 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga AB, com o módulo da força Q igual a 375 N.

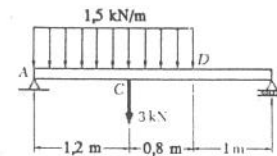


Figura P7.27

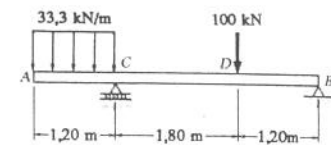


Figura P7.28

7.30 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga AB, com $a = 0,30$ m.

*7.31 Determine o módulo da força Q para o qual o máximo valor absoluto do momento fletor na viga seja o menor possível. (Sugestão: Trace o diagrama de momento fletor e, então, iguale os valores absolutos do maior valor positivo ao do menor valor negativo dos momentos fletores obtidos.)

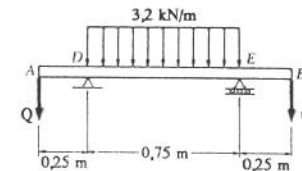


Figura P7.29 e P7.31

*7.32 Determine a distância a para a qual o maior valor absoluto do momento fletor da viga é o menor possível (veja a sugestão do Prob. 7.31).

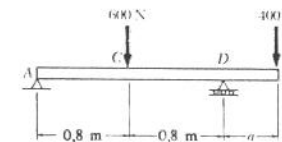


Figura P7.30 e P7.32

7.33 a 7.35 Supondo que a reação do solo, dirigida para cima, seja uniformemente distribuída, trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga AB .

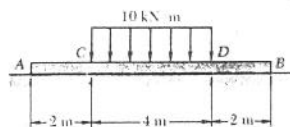


Figura P7.33

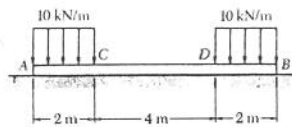


Figura P7.34

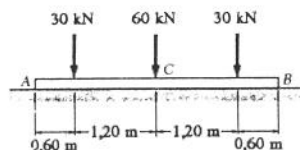


Figura P7.35

7.36 Resolva o Prob. 7.35 supondo que a carga de 60 kN foi removida.

7.37 a 7.39 Trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga AB .

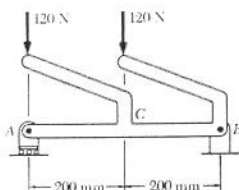


Figura P7.37

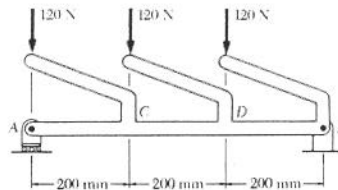


Figura P7.38

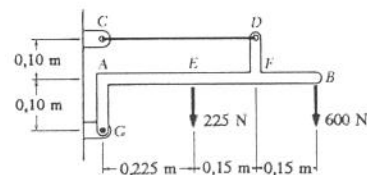


Figura P7.39

7.40 Resolva o Prob. 7.39 supondo que a carga de 225 N foi removida.

7.41 Para a viga e o carregamento ilustrados, (a) determine a dimensão a para a qual o momento fletor é nulo de C a D e (b) trace os diagramas correspondentes de força cortante e momento fletor.

7.42 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor da viga AB com $a = 200$ mm.

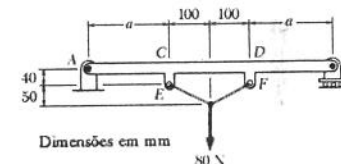


Figura P7.41 e P7.42

***7.43** Uma viga uniforme deve ser elevada pelos cabos de um guindaste ligados a A e B . Determine a distância a desde as extremidades da viga até os pontos onde os cabos devem ser presos para que o máximo valor absoluto do momento fletor na viga seja tão pequeno quanto possível. (Sugestão: Trace o diagrama de momento fletor em termos de a , L e do peso w por unidade de comprimento e, então, iguale os momentos fletores máximo positivo e máximo negativo obtidos.)

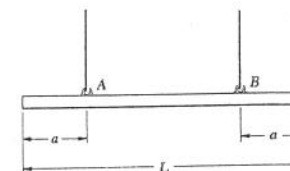


Figura P7.43

***7.44** Para reduzir o momento fletor na viga em balanço AB , um cabo e um contrapeso são permanentemente ligados ao extremo B . Determine o valor do contrapeso para o qual o máximo valor absoluto do momento fletor na viga seja tão pequeno quanto possível. (a) Considere somente o caso em que a força P está aplicada em C . (b) Considere o caso mais geral em que a força P pode ou não estar aplicada em C .

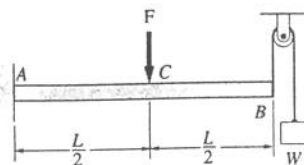


Figura P7.44

***7.6. Relações entre Carga, Força Cortante e Momento Fletor.** Quando uma viga suporta mais de duas ou três cargas concentradas, ou quando suporta cargas distribuídas, o método delineado na Seção 7.5 para representar graficamente forças cortantes e momentos fletores pode ser muito complicado. A construção do diagrama de força cortante e, especialmente, do momento fletor pode ser bastante facilitada se certas relações existentes entre carga, força cortante e momento fletor forem levadas em consideração.

Consideremos uma viga AB simplesmente vinculada suportando uma carga w por unidade de comprimento (Fig. 7.11a), e sejam C e C' dois pontos da viga separados por uma distância Δx . A força cortante e o momento fletor em C serão designados V e M , respectivamente, e serão supostos positivos; a força cortante e o momento fletor em C' serão designados $V + \Delta V$ e $M + \Delta M$.

Destacaremos agora a parte CC' da viga e traçaremos seu diagrama de corpo livre (Fig. 7.11b). As forças exercidas sobre o corpo livre incluem uma carga de valor $w\Delta x$, forças e binários internos em C e C' . Uma vez que a força cortante e o momento fletor foram supostos positivos, as forças e os momentos serão dirigidos conforme está indicado na figura.

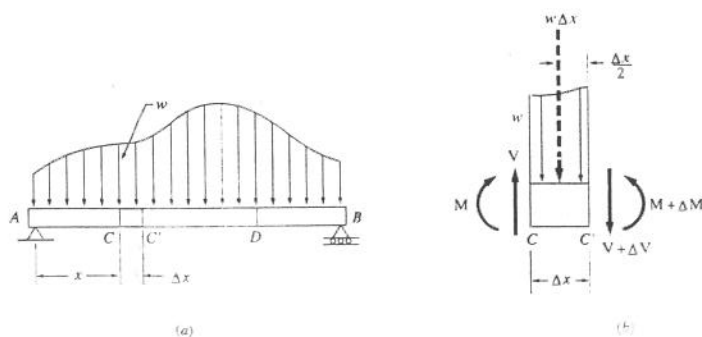


Figura 7.11

Relações entre Carga e Força Cortante. Escrevendo que a soma das componentes verticais das forças que atuam no corpo livre CC' é zero, obtemos

$$V - (V + \Delta V) - w \Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w \Delta x$$

Dividindo ambos os membros da equação por Δx e fazendo Δx tender a zero, temos

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.1)$$

A fórmula (7.1) indica que, para uma viga carregada conforme representado na Fig. 7.11a, a inclinação dV/dx da curva da força cortante é negativa; o valor numérico da inclinação em qualquer ponto é igual à carga por unidade de comprimento naquele ponto.

Integrando (7.1) entre os pontos C e D , obtemos

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w \, dx \quad (7.2)$$

$$V_D - V_C = - (\text{área}^* \text{ sob a curva de carregamento entre } C \text{ e } D) \quad (7.2')$$

Note-se que esse resultado poderia ter sido obtido considerando-se o equilíbrio na parte CD da viga, uma vez que a área sob a curva de carregamento representa a carga total aplicada entre C e D .

Deve-se observar que a fórmula (7.1) *não é válida* em um ponto de aplicação de carga concentrada; em tal ponto, a curva da força cortante é descontínua, como visto na Seção 7.5. Do mesmo modo, as fórmulas (7.2) e (7.2') deixam de ser válidas quando cargas concentradas são aplicadas entre C e D uma vez que não levam em consideração a súbita variação na força cortante causada por uma carga concentrada. As fórmulas (7.2) e (7.2'), portanto, devem ser aplicadas somente entre sucessivas cargas concentradas.

* Vide observação no rodapé da pág. 104. (N. do R. T.)

Relações entre Força Cortante e Momento Fletor. Retornando ao diagrama de corpo livre da Fig. 7.11b e escrevendo agora que a soma dos momentos em relação a C é zero, obtemos

$$(M + \Delta M) - M - V \Delta x + w \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

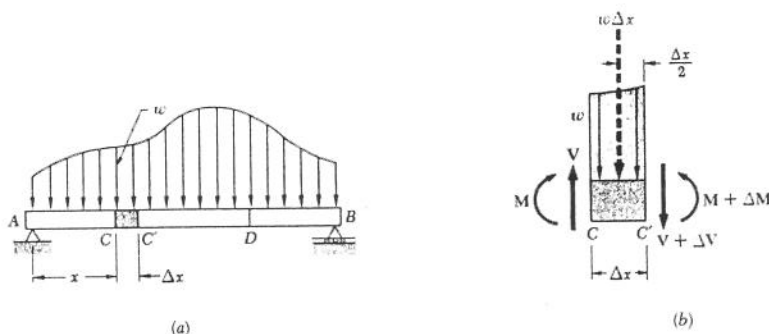


Figura 7.11 (repetição)

Dividindo ambos os membros da equação por Δx e fazendo Δx tender a zero, obtemos

$$\frac{dM}{dx} = V$$

(7.3)

A fórmula (7.3) indica que a inclinação dM/dx da curva do momento fletor é igual ao valor da força cortante. Isto é verdadeiro para qualquer ponto onde a força cortante tenha valor definido, isto é, em qualquer ponto onde não exista carga concentrada aplicada. A fórmula (7.3) indica também que a força cortante é nula nos pontos onde o momento fletor é máximo. Essa propriedade facilita a determinação dos pontos em que a viga pode romper-se por flexão.

Integrando (7.3) entre os pontos C e D , obtemos

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx \quad (7.4)$$

$$M_D - M_C = \text{área}^* \text{ sob a curva da força cortante entre } C \text{ e } D \quad (7.4')$$

Note-se que a área sob a curva da força cortante deve ser considerada positiva onde a força cortante é positiva, e negativa onde a força cortante é negativa. As fórmulas (7.4) e (7.4') são válidas mesmo quando cargas concentradas estão aplicadas entre C e D , desde que a curva da força cortante tenha sido corretamente traçada.

As fórmulas deixam de ser válidas, no entanto, se um binário é aplicado em um ponto entre C e D , uma vez que não levam em consideração a súbita variação no momento fletor causada por um binário (ver Problema Resolvido 7.7).

Exemplo. Consideremos uma viga AB simplesmente vinculada, de vão L , que suporta uma carga uniformemente distribuída w (Fig. 7.12a). A partir do diagrama de corpo livre da viga inteira, determinamos o valor das reações nos vínculos externos: $R_A = R_B = wL/2$ (Fig. 7.12b). A seguir desenhemos o diagrama de força cortante. Perto da extremidade A da viga, a força cortante é igual a R_A , isto é, a $wL/2$, como podemos comprovar considerando como corpo livre uma parte muito pequena da viga. Utilizando a fórmula (7.2), podemos, então determinar a força cortante V em qualquer distância x a partir de A ; escrevemos

$$V - V_A = - \int_0^x w dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w \left(\frac{L}{2} - x \right)$$

A curva da força cortante é, pois, uma reta inclinada que corta o eixo dos x em $x = L/2$ (Fig. 7.12c). Considerando agora o momento fletor, primeiro observamos que $M_A = 0$. O valor M do momento fletor em qualquer distância x de A pode, então, ser obtido a partir da fórmula (7.4); temos

$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

* Vide observação no rodapé da pág. 104. (N. do R. T.)

$$M = \int_0^x w \left(\frac{L}{2} - x \right) dx = \frac{w}{2} (Lx - x^2)$$

A curva do momento fletor é uma parábola. O valor máximo do momento fletor ocorre quando $x = L/2$, uma vez que V (e, portanto, dM/dx) é zero para esse valor de x . Substituindo $x = L/2$ na última equação, obtemos

$$M_{\text{máx}} = wL^2/8$$

Na maior parte das aplicações de engenharia, o valor do momento fletor precisa ser conhecido somente em uns poucos pontos específicos. Uma vez traçado o diagrama de força cortante e após M ter sido determinado em uma das extremidades da viga, o valor do momento fletor pode ser obtido em qualquer ponto dado calculando-se a área sob a curva de força cortante e utilizando-se a fórmula (7.4'). Por exemplo, como $M_A = 0$ para a viga da Fig. 7.12a, o valor máximo do momento fletor para aquela viga pode ser obtido simplesmente medindo-se a área* do triângulo sombreado no diagrama de força cortante da Fig. 7.12c. Temos

$$M_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

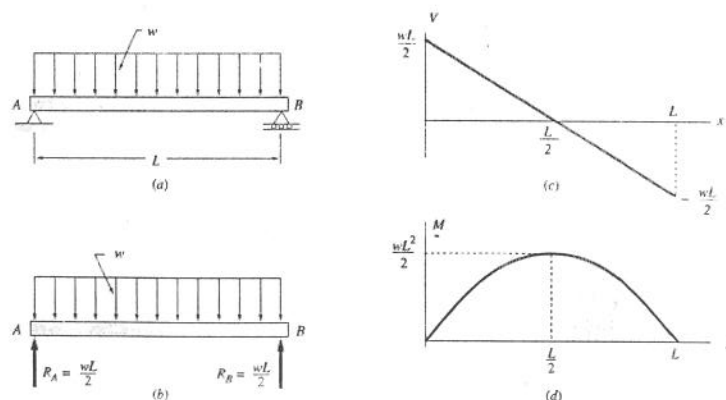


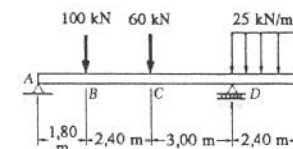
Figura 7.12

* Vide observação no rodapé da pág. 104. (N. do R. T.)

Observamos, nesse exemplo, que a curva de carga é uma reta horizontal, a curva de força cortante é uma reta inclinada e a curva do momento fletor é uma parábola. Se a curva de carga fosse uma reta inclinada (primeiro grau), a curva da força cortante teria sido uma parábola (segundo grau) e a curva do momento fletor, uma parábola cúbica (terceiro grau). As curvas da força cortante e do momento fletor terão sempre, respectivamente, um e dois graus acima da curva de carga. Com isto em mente, deveríamos ser capazes de esquematizar os diagramas de força cortante e momento fletor, sem determinar as funções $V(x)$ e $M(x)$, uma vez calculados alguns valores da força cortante e do momento fletor. Os esquemas serão mais exatos se fizermos uso do fato de que, em qualquer ponto onde as curvas são contínuas, a inclinação da curva da força cortante é igual a $-w$ e a inclinação da curva do momento fletor é igual a V .

Problema Resolvido 7.4

Trace os diagramas da força cortante e do momento fletor para a viga e o carregamento da figura.



Solução. Considerando a viga inteira como corpo livre, calculamos as reações:

$$+ \curvearrowright \Sigma M_A = 0:$$

$$D(7,20 \text{ m}) - (100 \text{ kN})(1,80 \text{ m}) - (60 \text{ kN})(4,20 \text{ m}) - (60 \text{ kN})(8,40 \text{ m}) = 0$$

$$D = +130 \text{ kN}$$

$$D = 130 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$A_y - 100 \text{ kN} - 60 \text{ kN} + 130 \text{ kN} - 60 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = +90 \text{ kN}$$

$$A_y = 90 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

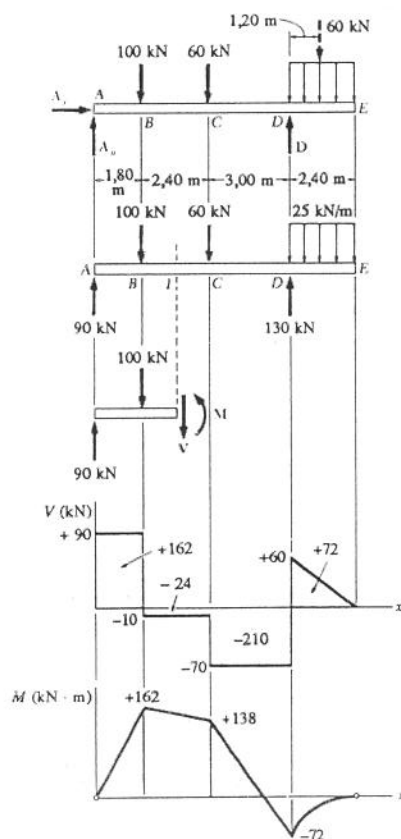
$$A_x = 0$$

$$A_x = 0$$

Observamos ainda que o momento fletor é nulo em A e E. Assim, dois pontos (indicados por bolinhas) são obtidos no diagrama do momento fletor.

Diagrama de Força Cortante. Sendo $dv/dx = -w$, verificamos que, entre cargas localizadas e reações, a inclinação do diagrama de força cortante é nula (isto é, a força cortante é constante). A força cortante, em qualquer ponto, é calculada a partir da divisão da viga em duas partes e da consideração de qualquer das partes como corpo livre. Por exemplo, utilizando-se a parte da viga à esquerda da seção 1, obtém-se a força cortante entre B e C:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad +90 \text{ kN} - 100 \text{ kN} - V = 0 \quad V = -10 \text{ kN}$$



Analogamente verifica-se que a força cortante vale +60 kN logo à direita de D e é zero na extremidade E. Como a inclinação $dV/dx = -w$ é constante entre D e E, o diagrama de força cortante entre esses dois pontos é uma reta.

Diagrama de Momento Fletor. Recordemos que a área* sob a curva do diagrama de força cortante, entre dois pontos, é igual à variação do momento fletor entre aqueles dois pontos. Para maior facilidade, calcula-se a área* em cada trecho do diagrama de força cortante e anota-se o valor obtido no próprio diagrama. Sabendo-se que o momento fletor M_A na extremidade esquerda é nulo, escrevemos:

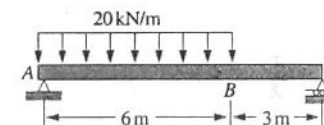
$$\begin{aligned} M_B - M_A &= +162 & M_B &= +162 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_C - M_B &= -24 & M_C &= +138 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_D - M_C &= -210 & M_D &= -72 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ M_E - M_D &= +72 & M_E &= 0 \end{aligned}$$

Como é sabido que $M_E = 0$, tem-se aí uma verificação da correção dos cálculos. Entre as cargas concentradas e reações, a força cortante é constante, de modo que a inclinação dM/dx é constante e o diagrama de momento fletor é desenhado unindo-se os pontos conhecidos por segmentos de reta. Entre D e E, onde o diagrama de força cortante é um segmento oblíquo, o diagrama de momento fletor é uma parábola.

Dos diagramas de V e M tiramos $V_{\text{máx}} = 90 \text{ kN}$ e $M_{\text{máx}} = 162 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

Problema Resolvido 7.5

Traçar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e o carregamento ilustrados.



* Vide observação no rodapé da pág. 104. (N. do R. T.)

Diagrama de Força Cortante. A força cortante logo à direita de A é $V_A = +80 \text{ kN}$. Uma vez que a variação na força cortante entre dois pontos é igual a menos a área sob a curva de carga entre os mesmos dois pontos, obtemos V_B escrevendo

$$V_B - V_A = -(20 \text{ kN/m})(6 \text{ m}) = -120 \text{ kN}$$

$$V_B = -120 + V_A = -120 + 80 = -40 \text{ kN}$$

A inclinação $dV/dx = -w$ sendo constante entre A e B, o diagrama de força cortante entre esses dois pontos será representado por uma linha reta. Entre B e C, a área sob a curva de carga é zero e, portanto,

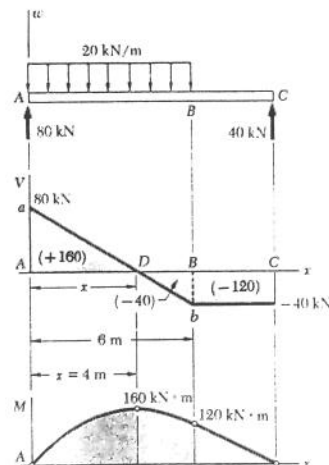
$$V_C - V_B = 0$$

$$V_C = V_B = -40 \text{ kN}$$

e a força cortante é constante entre B e C.

Diagrama de Momento Fletor. Observamos que o momento fletor em cada extremidade da viga é zero. Para determinar o momento fletor máximo, consideremos a seção D da viga onde $V = 0$. Considerando a parte do diagrama de força cortante entre A e B, observamos que os triângulos DAa e DBb são semelhantes; assim,

$$\frac{x}{80 \text{ kN}} = \frac{6 - x}{40 \text{ kN}} \quad x = 4 \text{ m}$$



O momento fletor máximo ocorre no ponto D, onde temos $dM/dx = V = 0$. As áreas* das várias partes do diagrama de força cortante são calculadas e anotadas (entre parênteses) no diagrama. Como a área* do diagrama de força cortante entre dois pontos é igual à variação do momento fletor entre esses mesmos dois pontos, temos

$$M_D - M_A = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B - M_D = -40 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_B = +120 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C - M_B = -120 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_C = 0$$

O diagrama de momento fletor é um arco de parábola seguido de um segmento de reta; a inclinação da parábola em A é igual ao valor de V naquele ponto.

Problema Resolvido 7.6

Esquematizar os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga em balanço representada.

Solução. Diagrama de Força Cortante. Na extremidade livre da viga, calculamos $V_A = 0$. Entre A e B, a área* sob a curva de carga é $\frac{1}{2} w_0 a$; obtemos V_B escrevendo

$$V_B - V_A = -\frac{1}{2} w_0 a \quad V_B = -\frac{1}{2} w_0 a$$

Entre B e C, a viga não está carregada; assim, $V_C = V_B$. Em A, temos $w = w_0$ e, de acordo com a Eq. (7.1), a inclinação da curva de força cortante é $dV/dx = -w_0$, enquanto em B a inclinação é $dV/dx = 0$. Entre A e B o carregamento decresce linearmente, e o diagrama de força cortante é parabólico. Entre B e C, $w = 0$ e o diagrama de força cortante é uma reta horizontal.

Diagrama de Momento Fletor. O momento fletor M_A na extremidade livre da viga é zero. Calculamos a área sob a curva de força cortante e escrevemos

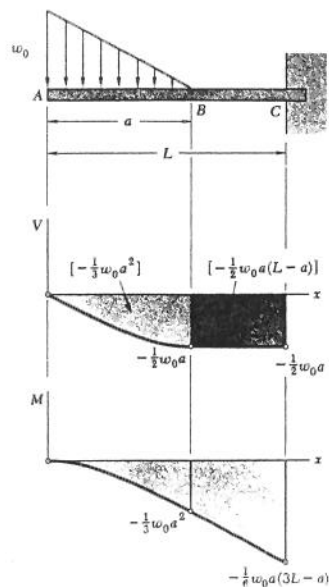
$$M_B - M_A = -\frac{1}{3} w_0 a^2 \quad M_B = -\frac{1}{3} w_0 a^2$$

$$M_C - M_B = -\frac{1}{2} w_0 a (L - a)$$

$$M_C = -\frac{1}{6} w_0 a (3L - a)$$

* Vide observação no rodapé da pág. 104. (N. do R. T.)

O esquema do diagrama de momento fletor é completado, recordando-se que $dM/dx = V$. Encontramos que entre A e B o diagrama é representado por uma curva cúbica com inclinação zero em A, e entre B e C por uma linha reta.



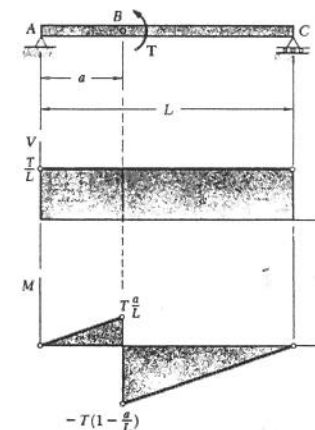
Problema Resolvido 7.7

A viga simples AC está sujeita a um binário de momento de módulo T aplicado ao ponto B. Trace os diagramas de força cortante e de momento fletor da viga.

Solução. A viga inteira é tomada como um corpo livre, e obtemos

$$R_A = \frac{T}{L} \uparrow \quad R_C = \frac{T}{L} \downarrow$$

A força cortante em qualquer seção é constante e igual a T/L . Como um momento está aplicado em B, o diagrama de momento fletor é descontínuo nesse ponto; o momento fletor decresce bruscamente de um valor igual a T .



Problemas

- 7.45 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.21.
- 7.46 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.22.
- 7.47 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.25.
- 7.48 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.26.
- 7.49 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.27.
- 7.50 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.28.
- 7.51 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.29.
- 7.52 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.30.
- 7.53 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.33.
- 7.54 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.34.
- 7.55 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.35.
- 7.56 Usando os métodos da Seção 7.6, resolva o Prob. 7.38.

7.57 a 7.60 Trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento ilustrados.

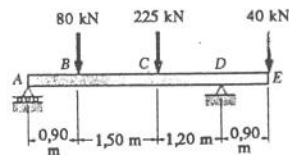


Figura P7.57

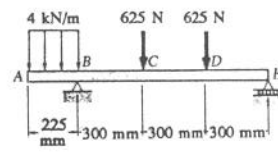


Figura P7.58

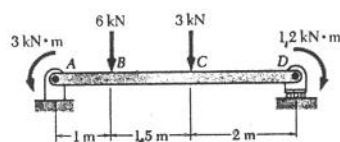


Figura P7.59

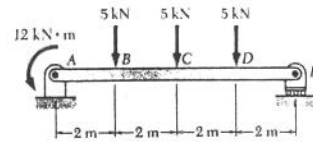


Figura P7.60

7.61 a 7.66 Trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento ilustrados e determine a posição e a intensidade do maior momento fletor.

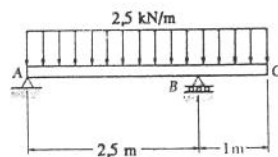


Figura P7.61

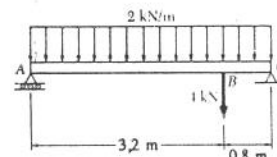


Figura P7.62

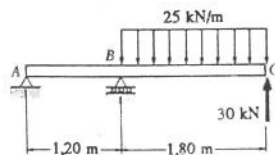


Figura P7.63

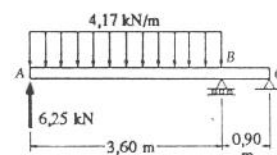


Figura P7.64

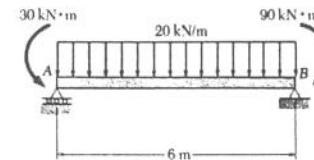


Figura P7.65

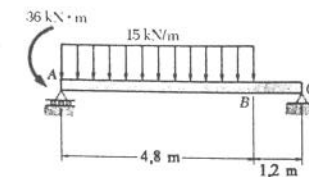


Figura P7.66

7.67 Determine as equações das curvas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento do Prob. 7.25 (coloque a origem no ponto A).

7.68 a 7.70 Determine as equações das curvas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento ilustrados. Determine, também, a intensidade e a localização do momento fletor máximo.

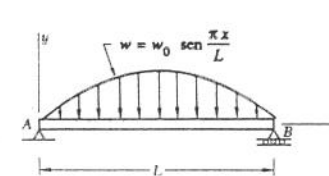


Figura P7.68

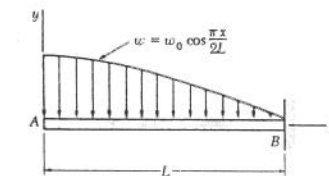


Figura P7.69

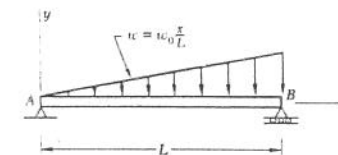


Figura P7.70

*7.71 A viga AB é submetida a uma carga uniformemente distribuída de 1,5 kN/m e a duas forças N e Q. Foi determinado experimentalmente que o momento fletor em D é +360 N·m e em E é +960 N·m. Determine N e Q e trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga.

*7.72 A viga AB é submetida a uma carga uniformemente distribuída de 33,3 kN/m e a duas forças N e Q. Foi determinado experimentalmente que o momento fletor em D é +258 kN·m

e em E é $353 \text{ kN} \cdot \text{m}$. Determine N e Q e trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga.

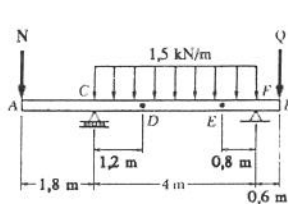


Figura P7.71

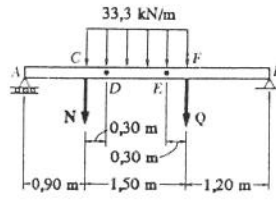


Figura P7.72

*7.73 Resolva o Prob. 7.72 admitindo que a carga uniformemente distribuída de $33,3 \text{ kN/m}$ está aplicada à viga AB toda.

*7.74 Resolva o Prob. 7.71 supondo que a carga uniformemente distribuída de $1,5 \text{ kN/m}$ estende-se sobre toda a viga AB .

*7.75 Uma viga uniforme de peso por unidade de comprimento igual a w é vinculada como ilustrado. Determine a distância a para que o máximo valor absoluto do momento fletor seja o menor possível (veja a sugestão do Prob. 7.43).

*7.76 Para a viga e o carregamento ilustrados, determine a distância a para que o máximo valor absoluto do momento fletor seja o menor possível (veja a sugestão do Prob. 7.31).



Figura P7.75

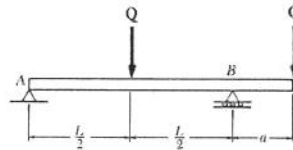


Figura P7.76

Cabos

*7.7. Cabos com Cargas Concentradas. Os cabos são usados em muitas aplicações da engenharia, tais como pontes pênséis, linhas de transmissão, teleféricos,

cabos tensores para torres elevadas etc. Os cabos podem ser divididos em duas categorias, de acordo com seu carregamento: (1) cabos que suportam cargas concentradas; (2) cabos que suportam cargas distribuídas. Nesta seção examinaremos os cabos da primeira categoria.

Consideremos um cabo preso a dois pontos fixos A e B e que suportam n cargas concentradas verticais $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ (Fig. 7.13a). Supomos que o cabo é flexível, isto é, que sua resistência à flexão é pequena e pode ser desprezada. Além disso, supomos que o peso do cabo é desprezível, comparado com as cargas que suporta. Qualquer porção do cabo entre cargas sucessivas pode, portanto, ser considerada um elemento submetido à ação de duas forças, e as forças internas em qualquer ponto do cabo se reduzem a uma força de tração dirigida tangente ao cabo no ponto.

Supomos que todas as cargas têm uma direção vertical dada, isto é, que a projeção horizontal da distância do ponto de fixação A até cada uma das cargas é conhecida; supomos também que as projeções horizontal e vertical das distâncias entre os pontos de fixação são conhecidas. Nosso objetivo é determinar a forma do cabo, isto é, a projeção vertical da distância de A até os pontos $C_1, C_2, \dots, C_n$, e também a tração T em cada porção do cabo.

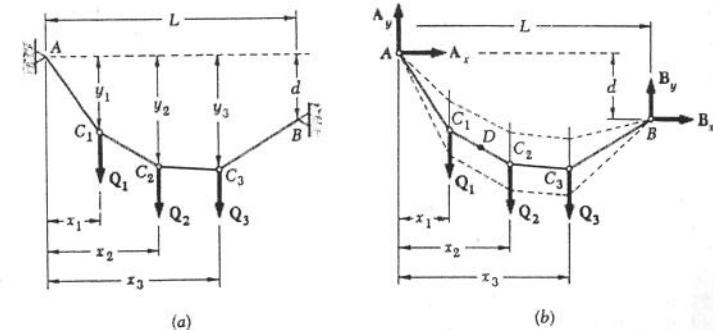


Figura 7.13

Em primeiro lugar desenhamos o diagrama de corpo livre de todo o cabo (Fig. 7.13b). Posto que as declividades das porções do cabo presas em A e B não são conhecidas, as reações em A e B devem ser representadas por duas componentes cada. Assim, quatro incógnitas são envolvidas, e as três equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações em A e B . *Torna-se necessário, portanto, obter uma equação adicional, considerando o equilíbrio de uma determinada porção do cabo. Isto será

* Evidentemente, o cabo não é um corpo rígido; as equações de equilíbrio representam, portanto, condições necessárias, porém não suficientes (ver Seção 6.11).

possível se conhecermos as coordenadas x e y de um ponto D do cabo. Desenhando o diagrama de corpo livre da porção AD do cabo (Fig. 7.14a) e, escrevendo $\Sigma M_D = 0$, obtemos uma relação adicional entre as componentes escalares A_x e A_y , e podemos determinar as reações em A e B . No entanto, o problema permaneceria indeterminado se não conhecêssemos as coordenadas de D , a não ser que alguma outra relação entre A_x e A_y (ou entre B_x e B_y) fosse dada.

O cabo pode pender de qualquer uma das várias maneiras possíveis indicadas pelas linhas tracejadas da Fig. 7.13b.

Uma vez que A_x e A_y sejam determinados, a projeção vertical da distância de A até qualquer ponto do cabo pode ser facilmente encontrada. Considerando o ponto C_2 , por exemplo, desenhamos o diagrama de corpo livre da parte AC_2 do cabo (Fig. 7.14b). Escrevendo $\Sigma M_{C_2} = 0$, obtemos uma equação que pode ser resolvida para y_2 . Escrevendo $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$, obtemos as componentes da força T representando a tração no cabo à direita de C_2 . Observamos que $T \cos \theta = -A_x$; a componente horizontal da força de tração é a mesma em qualquer ponto do cabo. Segue-se que a tração T é máxima quando $\cos \theta$ é mínimo, isto é, na parte do cabo cujo ângulo de inclinação θ é mínimo. Evidentemente, tal porção do cabo deve ser adjacente a um dos dois suportes.

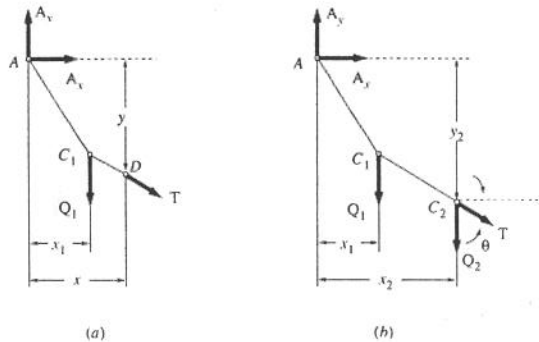


Figura 7.14

***7.8. Cabos com Cargas Distribuídas.** Consideremos um cabo preso a dois pontos fixos A e B , suportando uma carga distribuída (Fig. 7.15a). Vimos na seção precedente que, num cabo que suporta cargas concentradas, a força interna em qualquer ponto é uma força de tração dirigida ao longo do cabo. No caso de um cabo suportando uma carga distribuída, o mesmo pende formando uma curva, e a força interna em um ponto D é uma força de tração T dirigida ao longo da tangente à curva. Dada uma certa carga distribuída, nosso objetivo, nesta seção, é determinar a tração em qualquer ponto do cabo. Nas próximas seções veremos como a forma do cabo pode ser determinada para dois tipos particulares de cargas distribuídas.

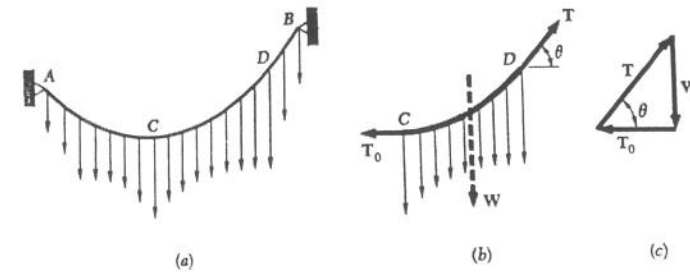


Figura 7.15

Considerando o caso mais geral de carga distribuída, desenhamos o diagrama de corpo livre da parte compreendida entre o ponto mais baixo C e um dado ponto D no cabo (Fig. 7.15b). As forças que atuam no corpo livre são a força de tração T_0 em C , que é horizontal, a força de tração T em D , dirigida ao longo da tangente ao cabo em D , e a resultante W da carga distribuída suportada pela parte CD do cabo. Desenhando o correspondente triângulo de forças (Fig. 7.15c), obtemos as seguintes relações:

$$T \cos \theta = T_0 \quad T \sin \theta = W \quad (7.5)$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \quad (7.6)$$

A partir das relações (7.5), é evidente que a componente horizontal da força de tração T é a mesma em qualquer ponto e que a componente vertical de T é igual ao módulo W da carga, medido desde o ponto mais baixo. As relações (7.6) mostram que a tensão T é mínima no ponto mais baixo e máxima em um dos dois pontos de fixação do cabo.

***7.9. Cabo Parabólico.** Suponhamos, agora, que o cabo AB suporta uma carga uniformemente distribuída ao longo da horizontal (Fig. 7.16a). Cabos de pontes pênses podem ser supostos carregados desse modo, uma vez que o peso dos cabos é pequeno comparado com o peso da pista de rodagem. Designemos por w a carga por unidade de comprimento medida horizontalmente e vamos exprimi-la em N/m. Escolhendo eixos coordenados com a origem no ponto mais baixo C do cabo, encontramos que o valor W da carga total suportada pela porção do cabo compreendida entre C e o ponto D de

coordenadas x e y é $W = wx$. As relações (7.6), que determinam o módulo e a direção da força de tração em D , tornam-se

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2 x^2} \quad \text{tg } \theta = \frac{wx}{T_0} \quad (7.7)$$

Além disso, a distância desde D até a linha de ação da resultante W é igual à metade da projeção horizontal da distância de C até D (Fig. 7.16b). Somando os momentos em relação a D , temos

$$+ \circlearrowleft \Sigma M_D = 0: \quad wx \frac{x}{2} - T_0 y = 0,$$

e, calculando y ,

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \quad (7.8)$$

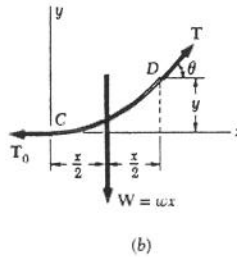
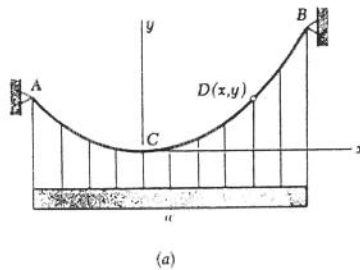


Figura 7.16

Esta é a equação de uma parábola com eixo vertical e vértice na origem das coordenadas. A curva formada por cabos uniformemente carregados ao longo da horizontal é, assim, uma parábola.*

Quando os suportes A e B do cabo estão na mesma cota, a distância L entre os suportes é designada *vão* do cabo e a projeção vertical da distância h , desde os suportes até o ponto mais baixo, é denominada *flecha* (Fig. 7.17a). Se o vão e a flecha de um cabo são conhecidos e se a carga w por unidade de comprimento horizontal é dada, a tensão mínima T_0 pode ser encontrada substituindo-se $x = L/2$ e $y = h$ na fórmula (7.8). As fórmulas (7.7) e (7.8) determinarão, então, a tração em qualquer ponto, e também a forma do cabo.

Quando os suportes estão colocados em alturas diferentes, a posição do ponto inferior do cabo pode não ser conhecida, e as coordenadas x_A, y_A e x_B, y_B dos suportes devem ser determinadas. Para isto, indicamos que as coordenadas de A e B satisfazem a Eq. (7.8) e que $x_B - x_A = L$, $y_B - y_A = d$, onde L e d designam, respectivamente, as projeções horizontal e vertical da distância entre os dois suportes (Figs. 7.17b e c).

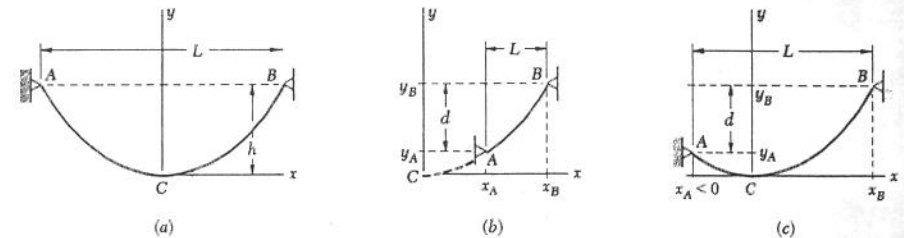


Figura 7.17

O comprimento do cabo desde seu ponto inferior C até o apoio B pode ser obtido por meio da fórmula

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (7.9)$$

* Cabos suspensos sob a ação de seu próprio peso não são uniformemente carregados ao longo da horizontal e, portanto, não formam uma parábola. No entanto, o erro introduzido em supor uma forma parabólica para um cabo sob ação de seu próprio peso é pequeno quando a flecha é pequena em relação ao vão. Uma análise completa a respeito de cabos suspensos sob ação de seu próprio peso será objeto da próxima seção.

Derivando (7.8), obtemos $dy/dx = wx/T_0$; substituindo em (7.9) e usando o teorema do binômio para desenvolver o radical numa série infinita, temos

$$S_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2 x^2}{T_0^2}} dx = \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{w^2 x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4 x^4}{8T_0^4} + \dots \right) dx$$

$$S_B = x_B = \left(1 + \frac{w^2 x_B^2}{6T_0^2} - \frac{w^4 x_B^4}{40T_0^4} + \dots \right)$$

e, como $w x_B^2 / 2T_0 = y_B$

$$S_B = x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^4 + \dots \right] \quad (7.10)$$

A série converge para valores da razão y_B/x_B menores que 0,5; na maioria dos casos, essa razão é muito menor e somente os dois primeiros termos da série precisam ser calculados.*

* A expressão exata de S_B é dada por

$$S_B = \frac{x_B}{2} \sqrt{1 + \frac{w^2 x_B^2}{T_0^2}} + \frac{T_0}{2w} \ln \left(\frac{w x_B}{T_0} + \sqrt{1 + \frac{w^2 x_B^2}{T_0^2}} \right)$$

que permite, em cada caso, calcular o erro que se comete ao usar a Eq. (7.10). Usando ainda a relação $w x_B^2 / 2T_0 = y_B$, escrevemos

$$S_B = \frac{x_B}{2} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2} + \frac{x_B^2}{4y_B} \ln \left(\frac{y_B}{x_B} + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2} \right)$$

Por exemplo, para $y_B/x_B = 0,4$, a Eq. (7.10) fornece

$$S_B = 1,096 x_B$$

enquanto a fórmula exata fornece

$$S_B = 1,098 x_B$$

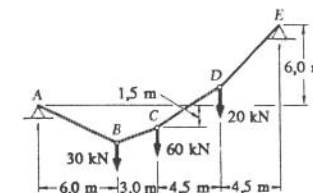
O erro cometido para $y_B/x_B = 0,4$ é, pois, igual a

$$\epsilon = \frac{1,098 - 1,096}{1,098} \times 100 = 0,2\%$$

que é bastante pequeno. (N. do R. T.)

Problema Resolvido 7.8

O cabo AE suporta três cargas verticais nos pontos indicados. Se o ponto C está 1,50 m abaixo do suporte à esquerda, determinar: (a) a altura dos pontos B e D e (b) a inclinação e a tensão máximas no cabo.



Solução. As componentes da reação, A_x e A_y , são determinadas como se segue:

Corpo Livre: Cabo Inteiro

$$+ \curvearrowright \Sigma M_E = 0:$$

$$A_x(6,0 \text{ m}) - A_y(18,0 \text{ m}) + (30 \text{ kN})(12,0 \text{ m}) + (60 \text{ kN})(9,0 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(4,5 \text{ m}) = 0$$

$$6,0A_x - 18,0A_y + 990 = 0$$

Corpo Livre: ABC

$$+ \curvearrowright \Sigma M_C = 0$$

$$-A_x(1,5 \text{ m}) - A_y(9,0 \text{ m}) + (30 \text{ kN})(3,0 \text{ m}) = 0$$

$$-1,5A_x - 9,0A_y + 90 = 0$$

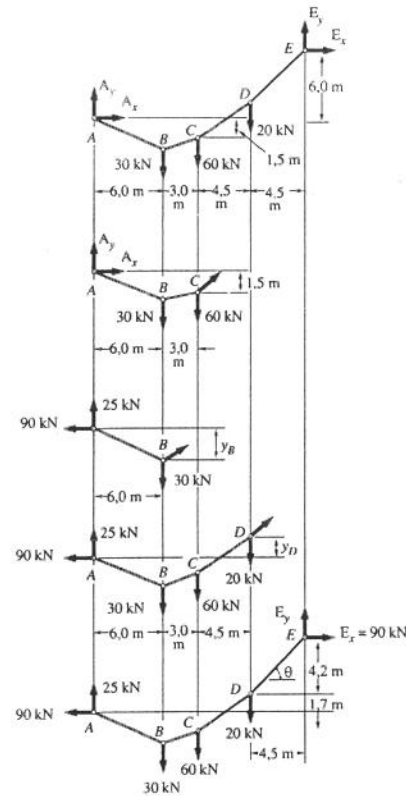
Resolvendo as duas equações simultaneamente, obtemos

$$A_x = -90 \text{ kN}$$

$$A_x = 90 \text{ kN} \leftarrow$$

$$A_y = +25 \text{ kN}$$

$$A_y = 25 \text{ kN} \uparrow$$



a) **Altura do Ponto B.** Considerando a parte AB do cabo como um corpo livre, temos

$$+) \Sigma M_B = 0; \quad (90 \text{ kN})y_B - (25 \text{ kN})(6,0 \text{ m}) = 0$$

$$y_B = 1,7 \text{ m abaixo de A} \rightarrow \Leftarrow$$

Altura do Ponto D. Usando como um corpo livre a parte ABCD do corpo, escrevemos

$$-(90 \text{ kN})y_D - (25 \text{ kN})(13,5 \text{ m}) + (30 \text{ kN})(7,5 \text{ m}) + (60 \text{ kN})(4,5 \text{ m}) = 0$$

$$y_D = 1,7 \text{ m acima de A} \rightarrow \Leftarrow$$

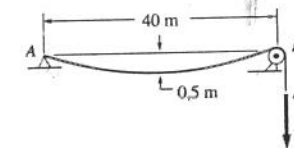
b) **Inclinação e Tensão Máximas.** Observamos que a inclinação máxima ocorre na parte DE. Como a componente horizontal da tensão é constante e igual a 90 kN, temos

$$\text{tg } \theta = \frac{4,2}{4,5} \quad \theta = 43,0^\circ \Leftarrow$$

$$T_{\text{máx}} = \frac{90 \text{ kN}}{\cos \theta} \quad T_{\text{máx}} = 124 \text{ kN} \Leftarrow$$

Problema Resolvido 7.9

Um cabo leve preso a um apoio em A passa sobre uma pequena roldana em B e suporta uma carga Q. Sabendo que a flecha do cabo é 0,5 m e que sua massa por unidade de comprimento é 0,75 kg/m, determinar: (a) a intensidade da carga Q, (b) a inclinação do cabo em B e (c) o comprimento total do cabo de A até B. Como a razão da flecha para o vão é pequena, considerar o cabo como parabólico. Desprezar, também, o peso da parte do cabo de B até D.

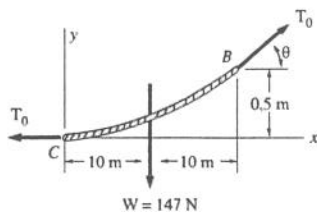


a) **Carga Q.** Designamos C o ponto inferior do cabo e desenhamos o diagrama de corpo livre da parte CB. Considerando a carga como uniformemente distribuída ao longo da horizontal, escrevemos

$$w = (0,75 \text{ kg/m})(9,81 \text{ m/s}^2) = 7,36 \text{ N/m}$$

A carga total para a parte CB do cabo é

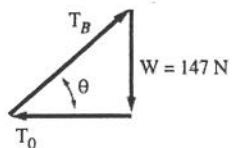
$$W = wx_B = (7,36 \text{ N/m})(20 \text{ m}) = 147 \text{ N}$$



e está aplicada no ponto médio entre C e B. Somando os momentos em relação a B, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (147 \text{ N})(10 \text{ m}) - T_0(0,5 \text{ m}) = 0 \quad T_0 = 2,9 \text{ kN} \leftarrow$$

Do triângulo de forças, obtemos



$$\begin{aligned} T_B &= \sqrt{T_0^2 + W^2} \\ &= \sqrt{(2,9 \text{ kN})^2 + (0,147 \text{ kN})^2} = 2,9 \text{ kN} \end{aligned}$$

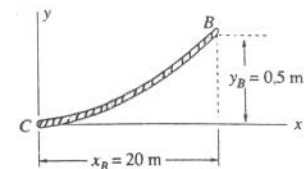
Como a tração em cada lado da roldana é a mesma, encontramos

$$Q = T_B = 2,9 \text{ kN} \leftarrow$$

b) **Inclinação do Cabo em B.** Obtemos, também, do triângulo de forças

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{W}{T_0} = \frac{0,147 \text{ kN}}{2,9 \text{ kN}} = 0,051$$

$$\theta = 2,9^\circ \leftarrow$$



c) **Comprimento do Cabo*.** Aplicando a Eq. (7.10) entre C e B, escrevemos

$$\begin{aligned} S_B &= x_B \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 + \dots \right] \\ &= (20,000 \text{ m}) \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{0,500 \text{ m}}{20,000 \text{ m}} \right)^2 + \dots \right] = 20,008 \text{ m} \end{aligned}$$

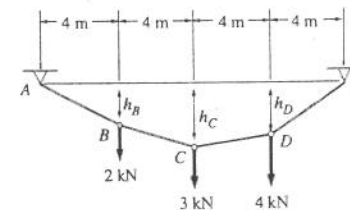
O comprimento total do cabo entre A e B é o dobro desse valor.

$$\text{Comprimento} = 2S_B = 40,016 \text{ m} \leftarrow$$

Problemas

7.77 Três cargas estão suspensas no cabo, conforme ilustrado. Sabendo que $h_C = 3,0 \text{ m}$, determine: (a) as componentes da reação em E e (b) o valor máximo da tração no cabo.

7.78 Determine a flecha do ponto C, sendo a tração máxima no cabo 13 kN.

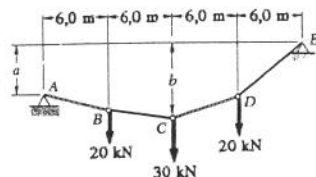


Figuras P7.77 e P7.78

* Para responder este item há necessidade de supor que as distâncias foram medidas, direta ou indiretamente, até milímetros.

7.79 Para $a = 4,8 \text{ m}$ e $b = 5,4 \text{ m}$, determine as componentes da reação em E para o cabo e o carregamento mostrados.

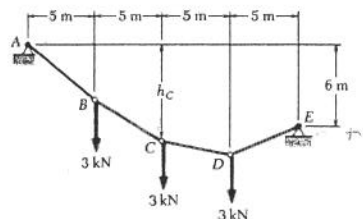
7.80 Com $a = b = 4,8 \text{ m}$, determine: (a) as componentes da reação em E e (b) a tração máxima no cabo.



Figuras P7.79 e P7.80

7.81 Com $h_C = 7 \text{ m}$, determine: (a) as componentes da reação em E e (b) a tração máxima no cabo.

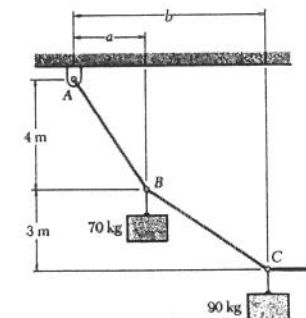
7.82 Determine: (a) a distância h_C para a qual a parte CD do cabo fica horizontal e (b) as correspondentes componentes da reação em E .



Figuras P7.81 e P7.82

7.83 Duas cargas estão suspensas pelo cabo ABC , como ilustrado. Sabendo que a distância b tem 7 m , determine: (a) o módulo do vetor P e (b) o valor correspondente da distância a .

7.84 O cabo ABC sustenta duas cargas, como mostra a figura. Determine as distâncias a e b quando uma força horizontal P de $1,0 \text{ kN}$ é aplicada no ponto C .



Figuras P7.83 e P7.84

7.85 Uma carga de $2,0 \text{ kN}$ está presa a uma roldana que pode girar sobre um cabo ACB . A roldana e a carga são mantidas na posição por um segundo cabo, DE , que é paralelo à parte CB do cabo principal. Determine: (a) as reações em A e B , (b) a tração no cabo ACB e (c) a tração no cabo DE . Despreze o raio da roldana e o peso dos cabos.

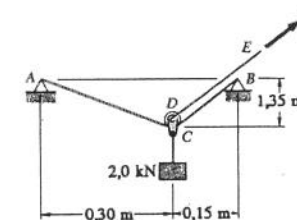


Figura P7.85

7.86 Sabendo que a força de $2,20 \text{ kN}$ aplicada em C e o bloco preso a B mantêm o cabo $ABCD$ na posição ilustrada, determine: (a) a reação em D , (b) o peso P do bloco e (c) a tração em cada segmento do cabo.

7.87 Um fio condutor com $0,400 \text{ kg/m}$ de massa por unidade de comprimento está preso a dois isoladores de mesmas cotas distantes $40,0 \text{ m}$. Sabendo que a flecha é de $1,20 \text{ m}$, determine: (a) a tração máxima no fio e (b) o comprimento do fio.

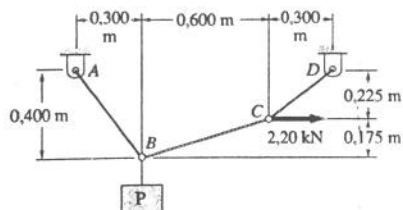


Figura P7.86

7.88 O vão central da ponte do estreito de Verrazano consiste em duas vias carroçáveis uniformes suspensas por quatro cabos. A carga uniforme suportada por cada cabo é $w = 180 \text{ kN/m}$ na direção horizontal. Sabendo que o vão é $L = 1\,278 \text{ m}$ e que a flecha é $h = 117 \text{ m}$, determine: (a) a tração máxima em cada cabo e (b) o comprimento do cabo.

7.89 No projeto da ponte do estreito de Verrazano previu-se o efeito de variações extremas de temperatura que podem causar alterações na flecha do vão central de $h = 115,8 \text{ m}$ no inverno a $h_v = 118,2 \text{ m}$ no verão. Sabendo que o vão central é $L = 1\,278 \text{ m}$, determine a variação no comprimento dos cabos devido a variações extremas da temperatura.

7.90 61 m de cabo com massa de $1,80 \text{ kg/m}$ por unidade de comprimento são estendidos horizontalmente com vão de 60 m. Determine: (a) aproximadamente, a flecha do cabo e (b) a tração máxima no cabo. [Sugestão: Utilize apenas os dois primeiros termos da Eq. (7.10).]

7.91 O cabo ACB tem massa de 10 kg. Supondo que a massa esteja distribuída uniformemente ao longo da horizontal, determine: (a) a flecha h e (b) a inclinação do cabo no ponto A.

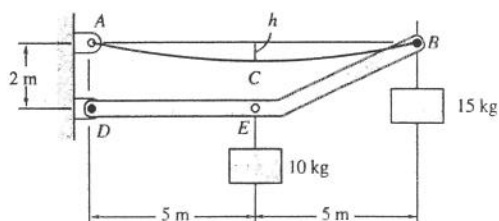
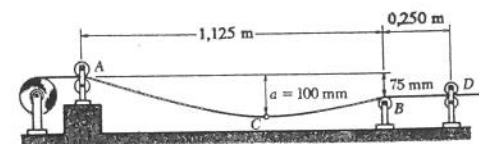
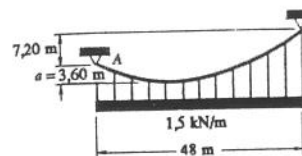


Figura P7.91

7.92 Resolva o Prob. 7.91 supondo que a carga de 10 kg é removida do ponto E.

7.93 O cabo AB está sujeito a uma carga uniformemente distribuída na horizontal, como ilustrado. O ponto mais baixo do cabo está 3,60 m abaixo do apoio A. Determine os valores máximo e mínimo da tração no cabo.

7.94 Antes de entrar em uma impressora à direita do ponto D, uma folha contínua de papel, com massa de $0,30 \text{ kg/m}$ por unidade de comprimento, passa sobre rolos em A e B. Supondo que a curva formada pela folha seja parabólica, determine: (a) a posição do ponto mais baixo C e (b) a tração máxima na folha.



Figuras P7.93 e P7.94

7.95 Resolva o Prob. 7.94 supondo que $a = 90 \text{ mm}$.

7.96 Resolva o Prob. 7.93 supondo que $a = 2,70 \text{ m}$.

*7.97 Um cabo AB, de vão L , e a viga simples A'B', de mesmo vão, estão sujeitos a carregamentos verticais idênticos, como ilustrado. Mostre que o módulo do momento fletor em C' na viga, é igual a $T_0 h$, sendo T_0 o módulo da componente horizontal da tração no cabo e h o comprimento do segmento vertical que une C ao segmento AB.

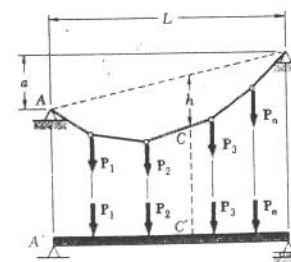


Figura P7.97

*7.98 Mostre que a equação diferencial da curva formada por um cabo sujeito a uma carga distribuída $w(x)$ é $d^2y/dx^2 = w(x)/T_0$, sendo T_0 a tração no ponto mais baixo.

*7.99 Utilizando a propriedade indicada no Prob. 7.98, determine a curva formada por um cabo de vão L e flecha h que suporta uma carga distribuída $w = w_0 \cos(\pi x/L)$, onde x é medido a partir da metade do vão. Determine também os valores máximo e mínimo da tração.

*7.100 Um grande número de cordas está amarrado a um arame fino suspenso em dois pontos A e B de mesmo nível. Mostre que, se as extremidades inferiores das cordas forem cortadas segundo uma linha horizontal e se as cordas estiverem uniformemente espaçadas, a curva formada pelo fio ACB será

$$y + d = d \cosh \left(\frac{w_r}{T_0 \theta} \right)^{1/2} x$$

onde w_r é o peso por unidade de comprimento das cordas, d é o comprimento da corda mais curta e θ é a distância horizontal entre cordas adjacentes. (Sugestão. Use a propriedade indicada no Prob. 7.98.)

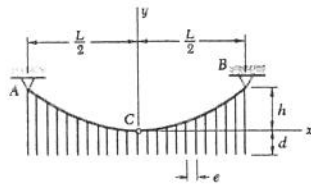


Figura P7.100

*7.10. Catenária. Consideremos, agora, um cabo AB que suporta uma carga uniformemente distribuída ao longo do próprio cabo (Fig. 7.18a). Cabos pendendo sob seus próprios pesos são carregados dessa maneira. Designamos w a carga por unidade de comprimento (medida ao longo do cabo) e vamos exprimi-la em N/m. A intensidade W da carga total suportada por uma parte do cabo de comprimento s compreendida entre o ponto inferior C e o ponto D é $W = ws$. Substituindo W por esse valor na fórmula (7.6), obtemos a tração em D :

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2}$$

Para simplificar os cálculos subsequentes, introduzimos a constante $c = T_0/w$. Então escrevemos

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = w \sqrt{c^2 + s^2} \quad (7.11)$$

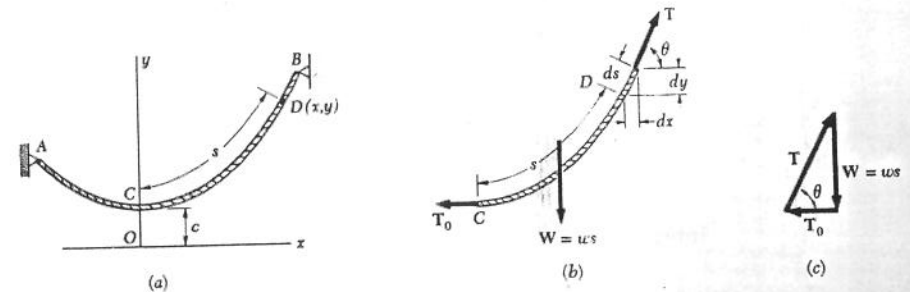


Figura 7.18

O diagrama de corpo livre da parte CD do cabo é mostrado na Fig. 7.18b. Esse diagrama, no entanto, não pode ser usado para obter diretamente a equação da curva formada pelo cabo, uma vez que não conhecemos a distância de D até a linha de ação da resultante W da carga. Para obter essa equação, em primeiro lugar escrevemos que a projeção horizontal de um pequeno elemento de cabo, de comprimento ds , é $dx = ds \cos \theta$. Observando na Fig. 7.18c que $\cos \theta = T_0/T$ e utilizando a Eq. (7.11), temos

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{wc ds}{w \sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Escolhendo a origem O das coordenadas a uma distância c , diretamente abaixo de C (Fig. 7.18a), e integrando de $C(0, c)$ a $D(x, y)$, obtemos*

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c \left[\operatorname{arsinh} \frac{s}{c} \right]_0^s = \operatorname{arsinh} \frac{s}{c} **$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x \quad \sinh 0 = 0 \quad \cosh x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x \quad \cosh 0 = 1$$

Essa equação, que relaciona o comprimento s da porção CD do cabo e a distância x , pode ser escrita na forma

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (7.15)$$

A relação entre as coordenadas x e y pode agora ser obtida escrevendo-se $dy = dx \operatorname{tg} \theta$. Observando na Fig. 7.18c que $\operatorname{tg} \theta = W/T_0$ e utilizando (7.11) e (7.15) temos

$$dy = dx \operatorname{tg} \theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{s}{c} dx = \sinh \frac{x}{c} dx$$

Integrando de $C(0, c)$ até $D(x, y)$ e usando (7.12) e (7.13), obtemos

$$y - c = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \left[\cosh \frac{x}{c} \right]_0^x = c \left(\cosh \frac{x}{c} - 1 \right)$$

* Essa integral pode ser encontrada em qualquer tabela de integrais. A função

$$z = \operatorname{arsenh} u$$

(leia-se: "seno hiperbólico inverso de u ") é o *inverso* da função $u = \sinh z$ (leia-se: "seno hiperbólico de z "). Essa função e a função $v = \cosh z$ (leia-se: "co-seno hiperbólico de z ") são definidas como se segue:

$$u = \sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) \quad v = \cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z})$$

Os valores numéricos das funções $\sinh z$ e $\cosh z$ são encontrados em *tabelas de funções hiperbólicas*. Eles podem, também, ser obtidos em muitas calculadoras quer diretamente, quer partindo das definições acima. O aluno deve procurar qualquer texto de cálculo para uma descrição completa das propriedades dessas funções. Nesta seção utilizaremos somente as seguintes propriedades, que podem ser facilmente deduzidas a partir das definições acima referidas:

$$\frac{d \sinh z}{dz} = \cosh z \quad \frac{d \cosh z}{dz} = \sinh z \quad (7.12)$$

$$\sinh 0 = 0 \quad \cosh 0 = 1 \quad (7.13)$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (7.14)$$

** A função $\operatorname{arsenh} y$ é a função inversa do $\sinh$ (seno hiperbólico) e pode ser lida como "argumento de seno hiperbólico y ", de acordo com a NBR 12513/92 (N. do R. T.)

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.16)$$

Esta é a equação de uma *catenária* com eixo vertical. A ordenada c do ponto inferior C é denominada *parâmetro* da catenária. Elevando ao quadrado ambos os membros das Eqs. (7.15) e (7.16), subtraindo e levando (7.14) em consideração, obtemos a seguinte relação entre y e s

$$y^2 - s^2 = c^2 \quad (7.17)$$

Resolvendo (7.17) para s^2 e introduzindo seu valor na última das relações (7.11), escrevemos essas relações como se segue:

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = wy \quad (7.18)$$

A última relação indica que a *tensão*, em qualquer ponto D do cabo, é proporcional à distância de D até a linha horizontal que representa o eixo dos x .

Quando os suportes A e B do cabo estão à mesma altura, a distância L entre os suportes é denominada *vão* do cabo e a distância h desde os suportes até o ponto inferior C é denominada *flecha* do cabo. Essas definições são as mesmas que foram dadas para o caso de cabos parabólicos; porém, deve-se observar que, em virtude de nossa escolha de eixos coordenados, a flecha h é agora

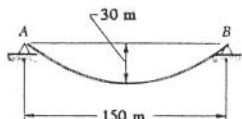
$$h = y_A - c \quad (7.19)$$

Deve também ser observado que certos problemas de catenária envolvem equações transcendentais, que devem ser resolvidas por aproximações sucessivas (ver Problema Resolvido 7.10). No entanto, quando a flecha é pequena em relação ao vão, a carga pode ser suposta uniformemente distribuída ao longo da horizontal e a catenária pode ser substituída por uma parábola. A solução do problema será, assim, bastante simplificada e o erro introduzido, pequeno.

Quando os suportes A e B estão em alturas diferentes, a posição do ponto inferior do cabo pode não ser conhecida. O problema, nesse caso, é resolvido de maneira semelhante àquela usada para cabos parabólicos, considerando-se que o cabo deve passar pelos suportes e que $x_B - x_A = L$, $y_B - y_A = d$, onde L e d designam, respectivamente, as projeções horizontal e vertical da distância entre os suportes.

Problema Resolvido 7.10

Um cabo uniforme, pesando 50 N/m, está suspenso entre dois pontos A e B , conforme a ilustração. Determinar: (a) os valores máximo e mínimo da tração no cabo e (b) o comprimento do cabo.



Solução. Equação do Cabo. A origem das coordenadas é colocada a uma distância c abaixo do ponto inferior do cabo. A equação do cabo é dada pela Eq. (7.16)

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

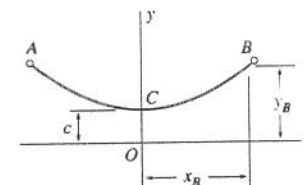
As coordenadas do ponto B são

$$x_B = 75 \text{ m} \quad y_B = 30 + c$$

Substituindo essas coordenadas na equação do cabo, obtemos

$$30 + c = c \cosh \frac{75}{c}$$

$$\frac{30}{c} + 1 = \cosh \frac{75}{c}$$



O valor de c é determinado tentando-se diversos valores sucessivamente, conforme indicado na tabela seguinte:*

* O estudante pode-se perguntar como foi imaginado o primeiro valor $c = 90$ m na tabela. Quando o valor de x é razoavelmente pequeno, a fórmula do co-seno hiperbólico fornece, por desenvolvimento em série,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Uma aproximação razoável é tomar-se

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2}$$

No caso do problema em questão temos,

$$30 + c = c \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{75}{c} \right)^2 \right]$$

de onde obtemos

$$c = \frac{5,6 \times 10^2 \text{ m}^2}{60 \text{ m}} = 93 \text{ m}$$

Esse valor pode ser tomado como uma primeira aproximação ou mesmo o valor 90, como faz o autor. (N. do R. T.)

c (m)	$\frac{75}{c}$	$\frac{30}{c}$	$\frac{30}{c} + 1$	$\cosh \frac{75}{c}$
90	0,833	0,333	1,333	1,367
105	0,714	0,286	1,286	1,266
99	0,758	0,303	1,303	1,301
98,4	0,762	0,305	1,305	1,305

Tomando $c = 98,4$ m, obtemos

$$y_B = 30 + c = 128,4 \text{ m}$$

a) **Valores Máximo e Mínimo da Tração.** Utilizando a Eq. (7.18), obtemos

$$T_{min} = T_O = wc = (50 \text{ N/m})(98,4 \text{ m})$$

$$T_{min} = 4,92 \text{ kN} \Leftarrow$$

$$T_{max} = T_B = wy_B = (50 \text{ N/m})(128,4 \text{ m})$$

$$T_{max} = 6,42 \text{ kN} \Leftarrow$$

b) **Comprimento do Cabo.** A metade do comprimento do cabo é encontrada resolvendo-se a Eq. (7.17):

$$y_B^2 - s_{CB}^2 = c^2 \quad s_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (128,4)^2 - (98,4)^2 \quad s_{CB} = 82,5 \text{ m}$$

O comprimento total do cabo é, portanto,

$$s_{AB} = 2s_{CB} = 2(82,5 \text{ m}) \quad s_{AB} = 165,0 \text{ m} \Leftarrow$$

Problemas

7.101 Uma corda de 30 m está esticada entre os telhados de dois edifícios, cada um de 9 m de altura. A tração máxima é de 250 N, e observa-se que o ponto mais baixo da corda está 3 m acima do solo. Determine a distância entre os edifícios e o peso total da corda.

7.102 Uma trena metálica de 50,00 m tem massa de 1,600 kg. Se a trena é esticada entre dois pontos à mesma altura e puxada até que a tração em cada extremidade seja 60,00 N, determine a distância entre seus extremos. Despreze o alongamento da trena devido à tração.

7.103 Um cabo de teleférico com 180 m de comprimento e com peso, por unidade de comprimento, igual a 50 N/m pende de dois pontos que têm a mesma elevação. Sabendo que a flecha é de 45 m, calcule: (a) a distância entre os suportes e (b) a tração máxima no cabo.

7.104 Uma corrente de 6,0 m de comprimento e 150 N de peso está suspensa entre dois pontos de mesma altura. Sabendo que a flecha é de 2,4 m, determine: (a) a distância entre os suportes e (b) a tração máxima na corrente.

7.105 Um contrapeso D de 50,0 kg de massa está preso a um cabo que passa sobre uma pequena polia em A e tem uma extremidade presa a um suporte em B . Sabendo que $L = 12,0$ m e $h = 4,00$ m, determine: (a) o comprimento do cabo entre A e B e a massa por unidade de comprimento do cabo. Despreze a massa do cabo entre A e D .

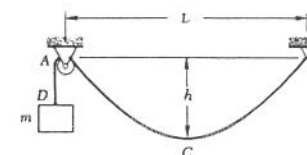


Figura P7.105

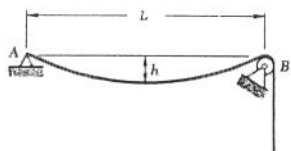
7.106 Resolva o Prob. 7.105 supondo que a massa do contrapeso D é 40,0 kg.

7.107 Um fio de 18 m de comprimento e 100 N de peso está suspenso entre dois pontos de mesma altura distantes 9 m um do outro. Determine a flecha e a tração máxima.

7.108 Um cabo de 72 m está suspenso entre dois pontos à mesma altura e separados de 48 m. Sabendo que a tração máxima é 250 N, determine a flecha e o peso total do cabo.

7.109 Um cordão uniforme de 750 mm de comprimento passa sobre uma roldana sem atrito em B e está preso a um suporte rígido em A . Sabendo que $L = 250$ mm, determine o menor dos dois valores de h para os quais o cordão está em equilíbrio.

7.110 Um cordão uniforme de 1,25 m de comprimento passa sobre uma roldana sem atrito em B e está preso a um suporte rígido em A . Sabendo que $L = 0,50$ m, determine o menor dos dois valores de h para os quais o cordão está em equilíbrio.



Figuras P7.109 e P7.110

7.111 À esquerda do ponto B o cabo longo $ABDE$ repousa sobre a superfície horizontal áspera ilustrada. Sabendo que o peso por unidade de comprimento do cabo é 25 N/m, determine a força F correspondente a $a = 1,8$ m.

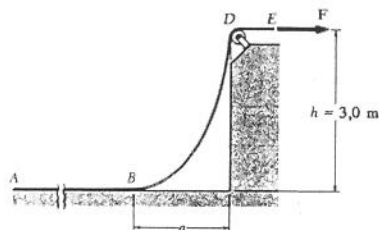


Figura P7.111

7.112 Resolva o Prob. 7.111 com $a = 3,0$ m.

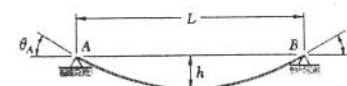
7.113 Sendo θ o ângulo formado por um cabo uniforme com a horizontal, mostre que em qualquer ponto $y = c / \cos \theta$.

***7.114** (a) Determine o maior vão possível para um cabo uniforme, de peso w por unidade de comprimento, se a tração no cabo não pode exceder o valor T_M . (b) Utilizando o resultado da parte a, determine o maior vão possível para um cabo de aço extrudado para o qual $w = 40,9$ N/m e $T_M = 40$ kN.

***7.115** Um cabo tem uma massa por unidade de comprimento de 4 kg/m e está sustentada como ilustrado. Sabendo que o vão L é 6 m, determine os dois valores da flecha h para os quais a tração máxima é 500 N.

***7.116** Determine a razão flecha-vão para a qual a máxima tração no cabo seja igual ao peso total do cabo AB .

***7.117** Um cabo, de peso w por unidade de comprimento, está suspenso entre dois pontos à mesma altura e separados por uma distância L . Determine a razão flecha-vão para a qual a tração máxima seja tão pequena quanto possível. Quais os valores correspondentes de θ_B e T_M ?



Figuras P7.115, P7.116 e P7.117

Problemas de Recapitulação

7.118 Um cabo de aço de 14 mm de diâmetro tem massa por unidade de comprimento de $0,7$ kg/m e está suspenso entre dois suportes à mesma altura e distanciados de 120 m. Se a flecha é de 30 m, determine (a) o comprimento total do cabo e (b) a tração máxima.

7.119 Dois cabos de mesma bitola estão presos a uma torre de transmissão em B . Como a torre é delgada, a componente horizontal da resultante das forças exercidas pelos cabos em B é nula. Supondo que os cabos tenham assumido a forma parabólica, determine a correspondente flecha h do cabo AB .

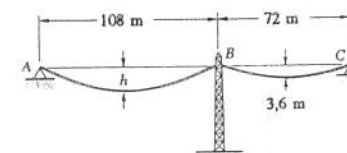
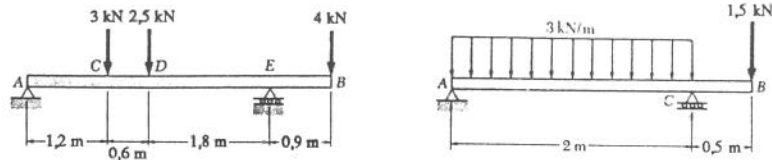


Figura P7.119

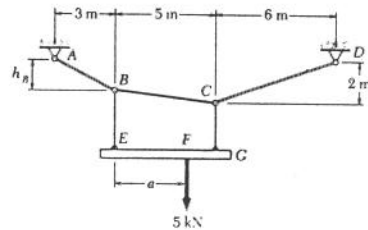
7.120 e 7.121 Trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga e o carregamento ilustrados.



Figuras P7.120 e P7.121

7.122 Uma carga de 5 kN é aplicada no ponto *F* de uma placa *EFG*, que está suspensa por um cabo *ABCD*, como ilustrado. Se $h_B = 1,5$ m, determine: (a) distância *a* e (b) a tração máxima correspondente no cabo *ABCD*.

7.123 Uma carga de 5 kN é aplicada no ponto *F* de uma placa *EFG* que está suspensa por uma cabo *ABCD*, como ilustrado. Se $a = 2,5$ m, determine: (a) a flecha h_B e (b) a tração máxima correspondente no cabo *ABCD*.

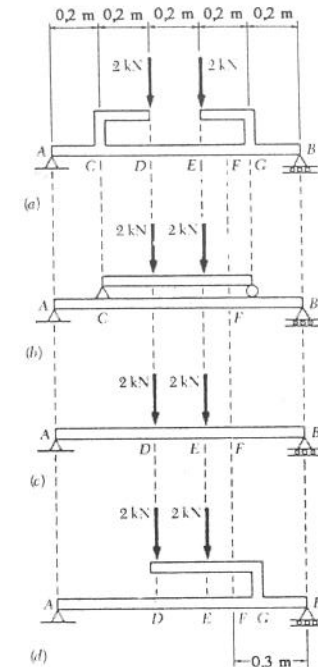


Figuras P7.122 e P7.123

7.124 Para cada uma das situações ilustradas, determine as forças internas no ponto *F* da viga *AB*.

7.125 Nos casos *a* e *b*, trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga *AB*.

7.126 Nos casos *c* e *d*, trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a viga *AB*.



Figuras P7.124, P7.125 e P7.126

7.127 Um cabo de comprimento $L + \Delta$ é suspenso de dois pontos que têm a mesma altura e que distam L um do outro. (a) Supondo que Δ seja pequeno comparado com L e que o cabo tenha a forma parabólica, determine a flecha aproximada em termos de L e Δ . (b) Se $L = 30$ m, $\Delta = 0,8$ m e a massa por unidade de comprimento do cabo é $0,35$ kg/m, utilize o resultado da parte *a* para determinar valores aproximados para a flecha e para a tração máxima no cabo. [Sugestão: Utilize apenas os dois primeiros termos da Eq. (7.10).]

7.128 Uma barra uniforme *ABCDE* foi dobrada e está suspensa por um cabo da maneira ilustrada. Sabendo que a barra pesa 18 N, trace os diagramas de força cortante e de momento fletor para a parte *BCD* da barra.

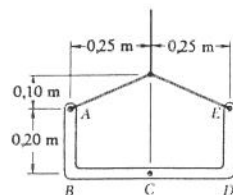


Figura P7.128

7.129 A barra AB é articulada em A e livre em B . Determine: (a) a razão de W_2 e W_1 para a qual a barra está em equilíbrio, (b) as equações das curvas da força cortante e do momento fletor para a barra e (c) o módulo e a localização do máximo do momento fletor.

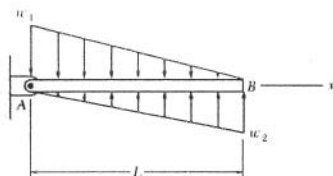


Figura P7.129

Recapitulação e Sumário

Neste capítulo aprendemos como determinar as forças internas que mantêm unidas as várias partes de um dado elemento de uma estrutura.

Forças em elementos retilíneos sujeitos a duas forças

Considerando inicialmente um elemento *retilíneo sujeito a duas forças*, recordamos que ele é submetido a duas forças F e $-F$, aplicadas em A e B , paralelas a AB (Fig. 7.19 a). Seccionando o elemento AB em C e desenhando o diagrama de corpo livre da parte AC , concluímos que as forças internas aplicadas em C no elemento AB são equivalentes a uma *força axial* $-F$ de mesmos módulo e direção que F , porém de sentido oposto (Fig. 7.19 b). Notamos que no caso de um elemento submetido a duas forças e que não é retilíneo, as forças internas reduzem-se a um sistema força-binário e não a uma única força.

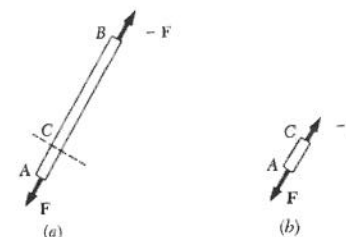


Figura 7.19

Forças em elementos submetidos a mais de duas forças

Consideremos agora um elemento AD submetido a *mais de duas forças*. Seccionando-o em J e desenhando um diagrama de corpo livre para a parte JD , concluímos que as forças internas em J são equivalentes a um sistema força-binário formado por uma *força axial* F , a *força de cisalhamento* V e um binário M (Fig. 7.20 b). A intensidade V da força de cisalhamento é chamada de *força cortante* em J e o momento do binário é o *momento fletor* em J . Se tivéssemos considerado o diagrama de corpo livre da parte AJ do elemento, teríamos obtido um sistema força-binário que diferiria do anterior por ter todos os vetores com sentidos trocados, devido a isso é necessário especificar qual foi a parte do elemento que se analisou ao dar as respostas [Problema Resolvido 7.1].

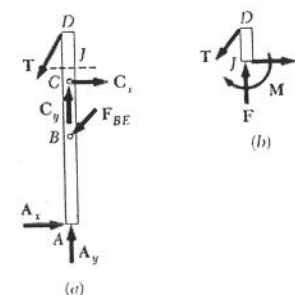


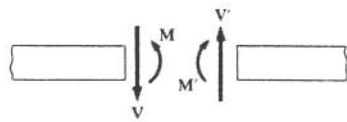
Figura 7.20

Forças em vigas

A maior parte do capítulo foi dedicada à análise de forças internas em dois tipos de estruturas importantes em engenharia: *vigas* e *cabos*. Em geral, *vigas* são barras prismáticas retas e longas projetadas para suportar cargas aplicadas em várias pontos de sua extensão. As cargas são, em geral, perpendiculares ao eixo da viga causando apenas *cisalhamento* e *flexão*. As cargas podem estar *concentradas* em pontos específicos ou *distribuídas* ao longo da parte da viga ou da sua extensão total. As vigas podem ser vinculadas de várias maneiras; neste texto são considerados apenas os casos de vigas estaticamente determinadas o que limitou nossa análise às vigas *simplesmente apoiadas*, *simplesmente apoiadas com balanço* e *em balanço* [Seção 7.3].

Força cortante e momento fletor em uma viga

Para obter a *força cortante* V e o *momento fletor* M em um ponto C dado de uma viga, determinamos inicialmente as reações nos vínculos considerando a viga toda como corpo livre. Em seguida, seccionamos a viga em C e utilizamos o diagrama de corpo livre de uma das duas partes assim obtidas para determinar V e M . Visando evitar confusão com relação aos sinais da força de cisalhamento V e do binário M (que têm sentidos opostos nas duas partes da viga), foi adotada a convenção de sinais ilustrada na Figura 7.21 [Seção 7.4]. Tendo-se determinado valores da força cortante e do momento fletor em alguns pontos selecionados da barra é possível, em geral, traçar *diagramas de força cortante e de momento fletor* que representam, respectivamente, a força cortante e o momento fletor em um ponto qualquer da barra [Seção 7.5]. Quando a barra é submetida apenas a cargas concentradas, a força cortante tem valor constante entre as cargas e o momento fletor varia linearmente entre elas [Problema Resolvido 7.2]. Por outro lado, se uma viga é submetida a cargas distribuídas, a força cortante e o momento fletor têm comportamentos muito diferentes [Problema Resolvido 7.3].



(a) Forças internas na seção
(força cortante e momento fletor positivo)

Figura 7.21

Relações entre carga, força cortante e momento fletor

A elaboração de diagramas de força cortante e momento fletor é facilitada se as relações abaixo são levadas em conta. Representado por w a carga distribuída por unidade de comprimento (positiva quando aponta verticalmente para baixo), temos [Seção 7.5].

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.3)$$

ou, quando integradas,

$$V_D - V_C = -(\text{área* sob a curva de carregamento entre C e D}) \quad (7.2')$$

$$M_D - M_C = -(\text{área* sob a curva cortante entre C e D}) \quad (7.4')$$

A Eq. (7.2') torna possível fazer o diagrama de força cortante de uma viga a partir da curva da carga distribuída sobre a viga, e do valor de V em uma das extremidades da viga. Analogamente, a Eq. (7.4') torna possível traçar o diagrama do momento fletor a partir do diagrama de força cortante e do valor de M em uma das extremidades da viga. Por outro lado, cargas concentradas introduzem descontinuidades no diagrama de força cortante e binários concentrados o fazem no diagrama do momento fletor, sem que as equações mencionadas dêem conta disso [Problemas Resolvidos 7.4 a 7.7]. Finalmente, a Eq. (7.3) implica que, os pontos da viga, onde o momento fletor é máximo ou mínimo, são os pontos onde a força cortante é nula [Problema Resolvido 7.5].

Cabos com cargas concentradas

A segunda parte do capítulo foi dedicada à análise de *cabos flexíveis*. Consideramos, inicialmente, cabos de peso desprezível submetidos a *cargas concentradas* [Seção 7.7]. Tomando o cabo todo como corpo livre (Fig. 7.22) notamos que as três equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as quatro incógnitas que representam as reações nos vínculos em A e B . Se, entretanto, forem conhecidas as coordenadas de um ponto D do cabo, pode-se obter mais uma equação a partir do diagrama de corpo livre da parte AD ou DB do cabo. Tendo-se determinado as reações nos vínculos é possível obter a elevação e a tração em um ponto qualquer do cabo utilizando-se o diagrama de

* Vide observação no rodapé da página 104. (N. do R. T.)

corpo livre apropriado [Problema Resolvido 7.8]. Verificou-se que a componente horizontal da força T , que representa a tração, é igual em todos os pontos do cabo.

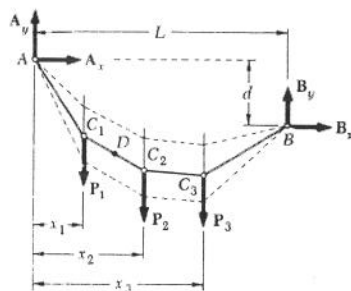


Figura 7.22

Cabos com cargas distribuídas

Em seguida foram estudados cabos submetidos a cargas distribuídas [Seção 7.8]. Utilizando como corpo livre uma parte do cabo CD que vai do ponto mais baixo C a um ponto qualquer D do cabo (Fig. 7.23), observamos que a componente horizontal da tração T em D é constante e igual à intensidade T_0 da tração em C , enquanto que sua componente vertical é igual ao peso W da porção CD do cabo. O módulo e a direção de T foram obtidos do triângulo de forças:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \text{tg } \theta = \frac{W}{T_0} \quad (7.6)$$

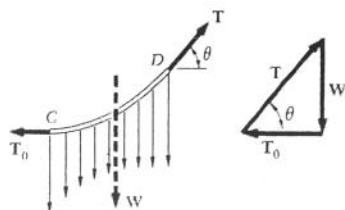


Figura 7.23

Cabo parabólico

No caso de uma carga *uniformemente distribuída ao longo da horizontal* — como em uma ponte pênsil (Fig. 7.24) — a carga suportada pela parte CD é $W = wx$ onde w é a carga constante por unidade de comprimento horizontal [Seção 7.9]. Também verificamos que a curva formada pelo cabo é uma *parábola* com equação

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} \quad (7.8)$$

e que o comprimento do cabo pode ser determinado utilizando-se a expansão em série dada na Eq. (7.10) [Problema Resolvido 7.9].

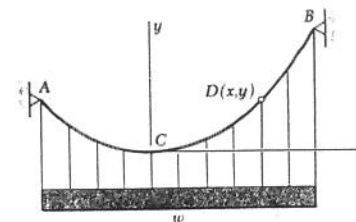


Figura 7.24

Catenária

No caso de uma carga *uniformemente distribuída ao longo do próprio cabo* — por exemplo, o cabo pendendo submetido ao seu peso (Fig. 7.25) — a carga a que está submetida a parte CD é $W = ws$, onde s é o comprimento desta parte do cabo e w é a carga constante por unidade de comprimento [Seção 7.10]. Colocando a origem O das coordenadas a uma distância $c = T_0 / w$ abaixo de C , deduzimos as relações:

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (7.15)$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.16)$$

$$y^2 - s^2 = c^2 \quad (7.17)$$

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = wy \quad (7.18)$$

que podem ser utilizadas para resolver problemas envolvendo cabos pendurados sujeitos ao seu próprio peso [Problema Resolvido 7.10]. A Eq. (7.16) que define a forma do cabo é a equação de uma *catenária*.

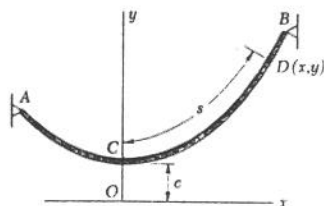


Figura 7.25

Capítulo 8

Atrito

8.1. Introdução. Nos capítulos anteriores, supusemos que as superfícies em contato eram ou *lisas* ou *ásperas*. Se lisas, supusemos que a força exercida por uma sobre a outra fosse normal a ambas, e as duas superfícies poderiam mover-se livremente uma em relação a outra. Se ásperas, supusemos a existência de forças tangenciais que poderiam evitar o movimento de uma superfície em relação a outra.

Tal ponto de vista é uma simplificação. Na realidade, não existe nenhuma superfície perfeitamente lisa. Quando duas superfícies estão em contato, sempre aparecem forças tangenciais, denominadas *forças de atrito*, ao se tentar mover uma em relação a outra. Por outro lado, essas forças de atrito têm limites e não impedirão o movimento se forças tangenciais suficientemente grandes forem aplicadas. Portanto a distinção entre superfície lisa e superfície áspera é apenas uma questão de gradação. Isto será visto mais claramente no presente capítulo, que é dedicado ao estudo do atrito e de suas aplicações em problemas comuns de Engenharia.

Existem dois tipos de atrito: *atrito seco*, às vezes chamado *atrito de Coulomb*, e *atrito fluido*. O atrito fluido desenvolve-se entre as camadas de fluidos que se movem com diferentes velocidades. O atrito fluido é de grande importância em problemas que envolvem o escoamento de fluidos por meio de tubos e orifícios ou relativos a corpos imersos em fluidos em movimento. Também básico na análise do movimento de *mecanismos lubrificados*. Tais problemas são considerados em textos de Mecânica dos Fluidos. Aqui limitaremos nosso estudo ao atrito seco, isto é, a problemas que envolvem corpos rígidos em contato ao longo de superfícies *não-lubrificadas*.

Na primeira parte deste capítulo analisaremos o equilíbrio de vários corpos rígidos e estruturas, supondo que há atrito seco entre as superfícies em contato. Posteriormente consideraremos algumas aplicações específicas em Engenharia, onde o atrito seco tem um papel importante. Estudaremos: cunhas, parafusos de rosca

quadrada, mancais de deslizamento, mancais de escora, resistência ao rolamento e atrito em correias.

8.2. As Leis do Atrito Seco. Coeficientes de Atrito. As leis do atrito seco são mais bem entendidas por meio da seguinte experiência. Um bloco de peso P é colocado sobre uma superfície horizontal plana (Fig. 8.1a). As forças que atuam no bloco são seu peso P e a reação da superfície. Uma vez que o peso não tem componente horizontal, a reação da superfície também não tem componente horizontal; a reação é, portanto, *normal* à superfície e é representada por N na Fig. 8.1a. Suponha-se, agora, que uma força horizontal Q é aplicada ao bloco (Fig. 8.1b). Se Q é pequena, o bloco não se moverá; portanto alguma outra força horizontal deve existir para equilibrar Q . Essa outra força é a *força de atrito estático* F , que, na realidade, é a resultante de grande número de forças que agem em toda a superfície de contato entre o bloco e o plano. A natureza dessas forças não é bem conhecida, mas supõe-se que sejam devidas às irregularidades das superfícies em contato e, também, em certa medida, à atração molecular.

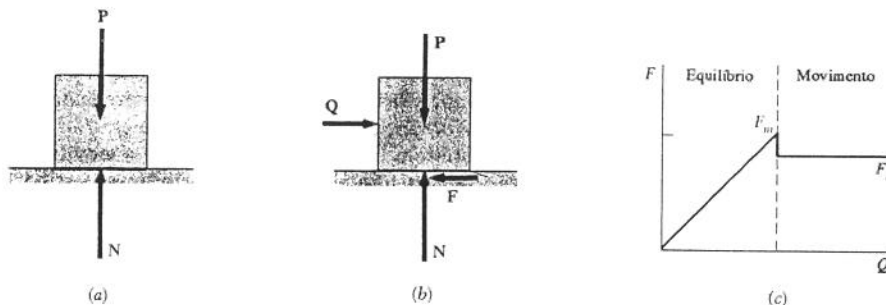


Figura 8.1

Se a força Q é aumentada, a força de atrito F também aumenta, continuando a se opor a Q , até que sua intensidade alcance um certo *valor máximo* F_m (Fig. 8.1c). Se Q é ainda aumentada, a força de atrito não pode mais equilibrá-la, e o bloco começa a deslizar. No momento em que o bloco entra em movimento, o módulo de F cai de F_m para um valor mais baixo F_c . Isto acontece porque há uma menor interpenetração entre as irregularidades das superfícies em contato quando essas superfícies se movem, uma em relação à outra. A partir de então, o bloco continua deslizando com velocidade crescente, enquanto a força de atrito, designada F_c e conhecida como *força de atrito cinético*, permanece aproximadamente constante.

Prova-se experimentalmente que o valor máximo F_m da força de atrito estático é proporcional à componente normal N da reação da superfície. Temos

$$F_m = \mu_e N \quad (8.1)$$

onde μ_e é uma constante denominada *coeficiente de atrito estático*. Analogamente, o módulo F_c da força de atrito cinético pode ser posto na seguinte forma

$$F_c = \mu_c N \quad (8.2)$$

onde μ_c é uma constante denominada *coeficiente de atrito cinético*. Os coeficientes de atrito μ_e e μ_c não dependem da área das superfícies em contato. Ambas, no entanto, dependem fortemente da *natureza* das superfícies em contato. Como dependem também das condições exatas das superfícies em contato, seus valores raramente são conhecidos em precisão maior que 5%. Valores aproximados dos coeficientes de atrito estático são dados na Tabela 8.1 para várias superfícies secas. Os valores correspondentes do atrito cinético seriam cerca de 25% menores.

Tabela 8.1 Valores Aproximados do Coeficiente de Atrito Estático para Superfícies Secas

Metal sobre metal	0,15 – 0,60
Metal sobre madeira	0,20 – 0,60
Metal sobre pedra	0,30 – 0,70
Metal sobre couro	0,30 – 0,60
Madeira sobre madeira	0,25 – 0,50
Madeira sobre couro	0,25 – 0,50
Pedra sobre pedra	0,40 – 0,70
Terra sobre terra	0,20 – 1,00
Borracha sobre concreto	0,60 – 0,90

Da descrição dada anteriormente, observa-se que podem ocorrer quatro situações quando um corpo rígido está em contato com uma superfície horizontal:

1. As forças aplicadas ao corpo não tendem a movê-lo sobre a superfície de contato; não existe força de atrito (Fig. 8.2a).
2. As forças aplicadas tendem a mover o corpo sobre a superfície de contato, mas não são suficientemente grandes para colocá-lo em movimento. A força de atrito F que se originou pode ser encontrada resolvendo-se as equações de equilíbrio para o corpo. Como não há evidência de que o valor máximo da força de atrito estático foi alcançado, a equação $F_m = \mu_e N$ não pode ser utilizada para determinar a força de atrito (Fig. 8.2b).
3. As forças aplicadas são tais que o corpo está a ponto de deslizar. Dizemos que o movimento é iminente. A força de atrito F alcançou seu valor máximo F_m e, junto com a força normal N , equilibra as forças aplicadas. Tanto as equações de equilíbrio quanto a equação $F_m = \mu_e N$ podem ser usadas. Notamos também que a força de atrito tem sentido oposto ao sentido do movimento iminente (Fig. 8.2c).
4. O corpo está deslizando sob a ação das forças atuantes e as equações de equilíbrio não mais se aplicam. No entanto, F é agora igual à força de atrito cinético F_c , e a equação $F_c = \mu_c N$ pode ser usada. O sentido de F_c é oposto ao sentido do movimento (Fig. 8.2d).

8.3. Ângulos de Atrito. Às vezes é conveniente substituir a força normal N e a força de atrito F por sua resultante R . Consideremos novamente um bloco de peso P , repousando sobre uma superfície plana horizontal. Se nenhuma força horizontal está aplicada ao bloco, a resultante R se reduz à força normal N (Fig. 8.3a). No entanto, se a força aplicada Q tem uma componente horizontal Q_x que tende a mover o bloco, a força R terá uma componente horizontal F , e assim formará um certo ângulo com a vertical (Fig. 8.3b). Se Q_x é aumentada até que o movimento se torne iminente, o ângulo entre R e a vertical cresce e alcança um valor máximo (Fig. 8.3c). Esse valor é denominado *ângulo de atrito estático* e designado ϕ_e . A partir da geometria da Fig. 8.3c, observamos que

$$\operatorname{tg} \phi_e = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_e N}{N} \quad (8.3)$$

$$\operatorname{tg} \phi_e = \mu_e$$

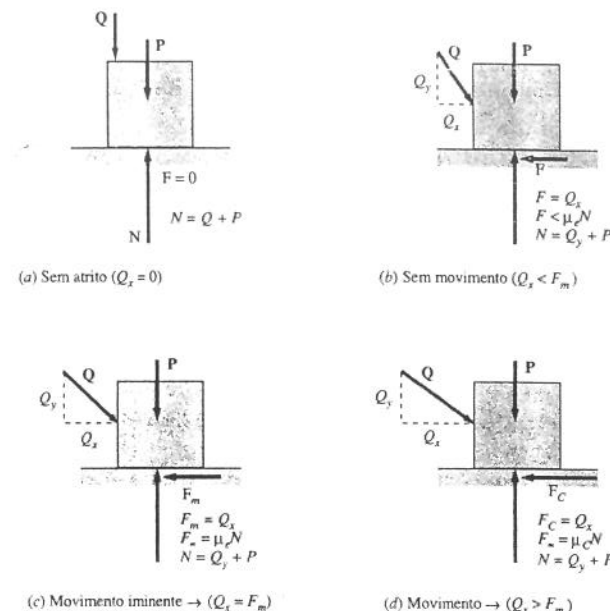


Figura 8.2

Se o movimento realmente acontece, o módulo da força de atrito cai para F_c ; analogamente, o ângulo entre R e N cai para um valor mais baixo ϕ_c , denominado *ângulo de atrito cinético* (Fig. 8.3d). A partir da geometria da Fig. 8.3d, escrevemos

$$\operatorname{tg} \phi_c = \frac{F_c}{N} = \frac{\mu_c N}{N}$$

$$\operatorname{tg} \phi_c = \mu_c$$

$$(8.4)$$

Um outro exemplo mostrará como o ângulo de atrito pode ser utilizado com vantagem na análise de certos tipos de problemas. Consideremos um bloco em repouso sobre uma prancha à qual se pode dar qualquer inclinação desejada; o bloco não está sujeito a nenhuma outra força além de seu peso P e da reação R da prancha. Se a prancha está horizontal, a força R exercida pela prancha sobre o bloco é perpendicular à prancha

e equilibra o peso P (Fig. 8.4a). Se a prancha é inclinada de um pequeno ângulo θ , a força R se afasta da perpendicular à prancha de um pequeno ângulo θ e continua equilibrando P (Fig. 8.4b); ela terá então uma componente normal N de módulo $N = P \cos \theta$ e uma componente tangencial F de módulo $F = P \sin \theta$.

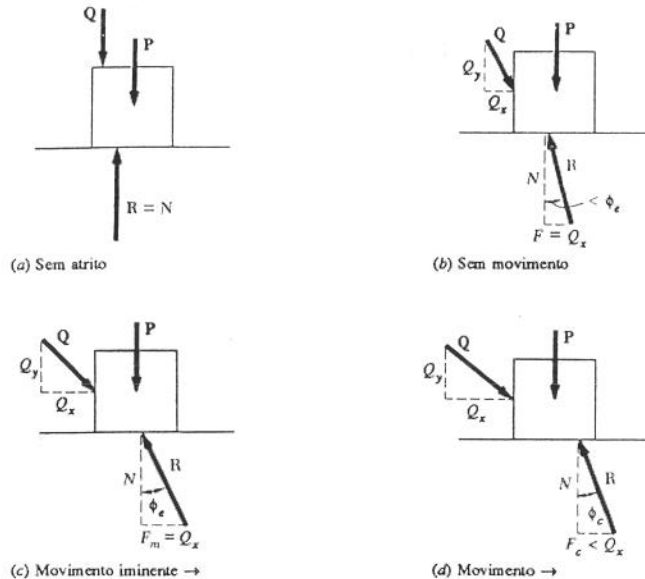


Figura 8.3

Se continuarmos aumentando o ângulo de inclinação, o movimento logo se tornará iminente. Nesse momento, o ângulo entre R e a normal terá alcançado seu valor máximo ϕ_e (Fig. 8.4c). O valor do ângulo de inclinação correspondente ao movimento iminente é denominado *ângulo de repouso*. Evidentemente, o ângulo de repouso é igual ao ângulo de atrito estático ϕ_e . Se o ângulo de inclinação θ é ainda aumentado, o movimento se inicia, e o ângulo entre R e a normal cai para o valor ϕ_c (Fig. 8.4d). A reação R mais uma vez não é vertical, e as forças que agem no bloco não estarão equilibradas.

8.4. Problemas Envolvendo Atrito Seco. Problemas envolvendo atrito seco são encontrados em muitas aplicações de Engenharia. Alguns se relacionam com situações simples, tais como o bloco deslizando sobre o plano, descrito nas seções precedentes. Outros envolvem situações mais complicadas como o Problema Resolvido 8.3; muitos abrangem a estabilidade de corpos rígidos em movimento acelerado e serão estudados em Dinâmica. Além disso, grande número de máquinas e mecanismos comuns

podem ser analisados aplicando-se as leis do atrito seco. Esses problemas incluem cunhas, parafusos, mancais comuns e de encosto e correias de transmissão. Eles serão estudados nas seções seguintes.

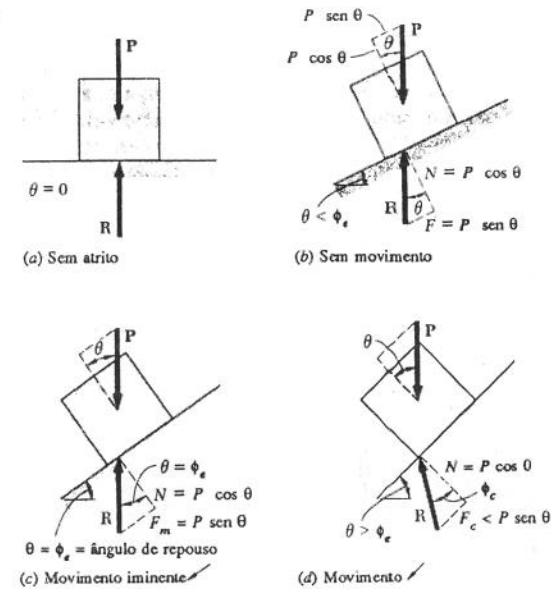


Figura 8.4

Os métodos usados para resolver problemas que envolvem atrito seco são os mesmos utilizados nos capítulos precedentes. Se um problema envolve somente um movimento de translação, sem nenhuma rotação possível, pode-se tratar o corpo considerado como uma partícula e utilizar os métodos do Cap. 2. Se o problema envolve uma possível rotação, o corpo deve ser considerado como um corpo rígido, e os métodos do Cap. 4 devem ser usados. Se a estrutura considerada é feita de várias partes, o princípio de ação e reação deve ser usado, conforme foi feito no Cap. 6.

Se o corpo considerado está submetido à ação de mais de três forças (incluindo as reações nas superfícies de contato), a reação em cada superfície será representada por suas componentes N e F , e o problema será resolvido a partir das equações de equilíbrio. Se somente três forças agem sobre o corpo, pode ser mais conveniente representar cada reação por uma única força R e resolver o problema traçando o triângulo de forças.

A maior parte dos problemas envolvendo atrito recai em um dos *três grupos* seguintes: no *primeiro grupo* de problemas são dadas todas as forças aplicadas e os coeficientes de atrito são conhecidos; devemos determinar se o corpo considerado permanecerá em repouso ou deslizará. A força de atrito *necessária para manter o equilíbrio é desconhecida* (seu módulo não é igual a $\mu_e N$) e deve ser determinada, assim como a força normal N , desenhando-se o diagrama de corpo livre e resolvendo-se as equações de equilíbrio (Fig. 8.5a). O valor encontrado para o módulo F da força de atrito é então comparado com o valor máximo $F_m = \mu_e N$. Se F for igual ou menor que F_m , o corpo permanecerá em repouso. Se o valor encontrado para F for maior que F_m , o equilíbrio não poderá ser mantido, havendo movimento; o valor real da força de atrito é, então, $F_c = \mu_c N$.

Nos problemas do *segundo grupo* são dadas todas as forças aplicadas e sabe-se que o movimento é iminente; devemos determinar o valor do coeficiente de atrito estático. Aqui, novamente, determinamos a força de atrito e a força normal, desenhando o diagrama de corpo livre e resolvendo as equações de equilíbrio (Fig. 8.5b). Como sabemos que o valor encontrado para F é o valor máximo F_m , o coeficiente de atrito pode ser encontrado escrevendo-se e resolvendo-se a equação $F_m = \mu_e N$.

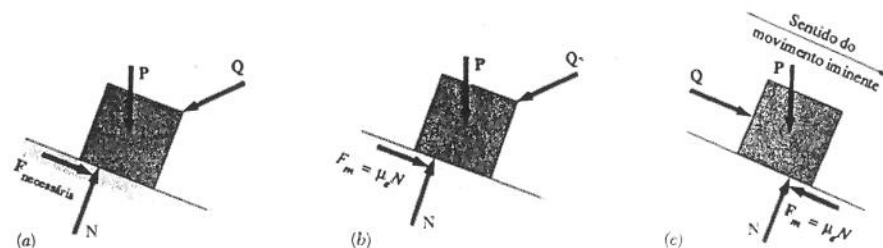


Figura 8.5

Nos problemas do *terceiro grupo*, o coeficiente de atrito estático é dado, e sabe-se que o movimento é iminente em uma determinada direção; devemos determinar o módulo ou a direção de uma das forças aplicadas. A força de atrito deve ser representada no diagrama de corpo livre com *sentido oposto ao do movimento iminente* e com módulo $F_m = \mu_e N$ (Fig. 8.5c). As equações de equilíbrio podem, então, ser escritas e determinada a força procurada.

Como foi observado acima, quando somente três forças estão envolvidas, pode ser mais conveniente representar a reação da superfície por uma única força R e resolver o problema desenhando um triângulo de forças. Tal solução é utilizada no Problema Resolvido 8.2.

Quando dois corpos A e B estão em contato (Fig. 8.6a), as forças de atrito exercidas por A sobre B e por B sobre A são iguais e opostas (terceira lei de Newton). É importante, ao desenhar o diagrama de corpo livre de qualquer dos corpos, incluir a força de atrito apropriada com sentido correto. Deve-se então observar a seguinte regra: o *sentido da força de atrito que atua em A é oposto ao sentido do movimento (ou movimento iminente) de A quando observado de B* (Fig. 8.6).^{*} O sentido da força de atrito que atua em B é determinado de modo semelhante (Fig. 8.6c). Note-se que o movimento de A , observado de B , é um *movimento relativo*. O corpo A pode estar fixo; ainda assim terá um movimento em relação a B se B estiver se movendo. Além disso, A pode, na realidade, se mover para baixo, mas, visto de B , parecer que se move para cima, caso B se mova para baixo mais rapidamente que A .

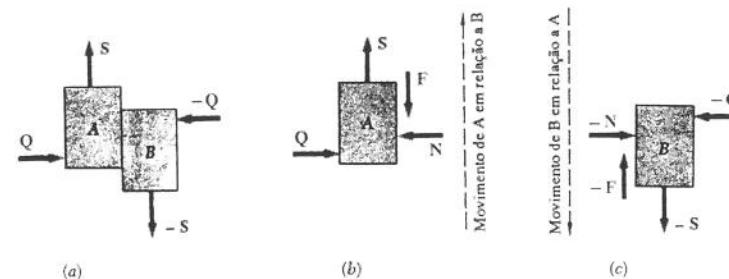
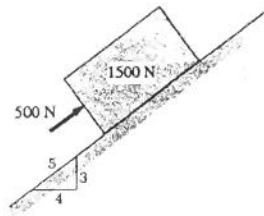


Figura 8.6

Problema Resolvido 8.1

Uma força de 500 N age, conforme a ilustração, em um bloco de 1 500 N colocado sobre um plano inclinado. Os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$. Verificar se o bloco está em equilíbrio e determinar o valor da força de atrito.

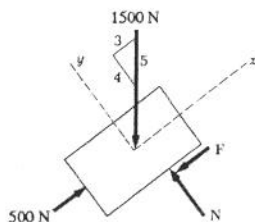
^{*} É, portanto, o mesmo que o movimento de B quando observado de A .



Força Necessária ao Equilíbrio. Em primeiro lugar determinamos o valor da força de atrito necessária para manter o equilíbrio. Supondo que F esteja dirigida para baixo e para a esquerda, desenhamos o diagrama de corpo livre do bloco e escrevemos

$$\begin{aligned}
 + \nearrow \Sigma F_x = 0: & \quad 500 \text{ N} - \frac{3}{5}(1500 \text{ N}) - F = 0 \\
 & \quad F = -400 \text{ N} \qquad \qquad \qquad F = 400 \text{ N} \nearrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \nwarrow \Sigma F_y = 0 & \quad N - \frac{4}{5}(1500 \text{ N}) = 0 \\
 & \quad N = +1200 \text{ N} \qquad \qquad \qquad N = 1200 \text{ N} \nwarrow
 \end{aligned}$$



A força F necessária para manter o equilíbrio é uma força de 400 N dirigida para cima e para a direita; a tendência do bloco é, assim, mover-se para baixo no plano.

Força de Atrito Máxima. O módulo da força de atrito máxima que pode ser desenvolvida é

$$F_{\text{máx}} = \mu_c N \qquad F_{\text{máx}} = 0,25 (1200 \text{ N}) = 300 \text{ N}$$

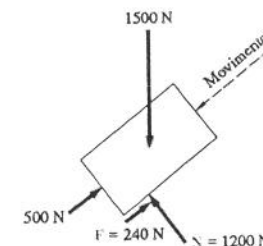
Como o valor da força necessária para manter o equilíbrio (400 N) é maior que o valor máximo que se pode obter (300 N), o equilíbrio não se manterá e o bloco deslizará plano abaixo.

Valor Real da Força de Atrito. O módulo da força real de atrito é obtido como se segue:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{real}} &= F_c = \mu_c N \\
 &= 0,25 (1200 \text{ N}) = 240 \text{ N}
 \end{aligned}$$

O sentido dessa força é oposto ao do movimento; a força está, portanto, dirigida para cima e para a direita:

$$F_{\text{real}} = 240 \text{ N} \nearrow \leftarrow$$

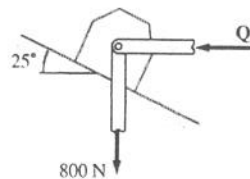


Deve-se notar que as forças que atuam no bloco não estão equilibradas; a resultante é

$$\frac{3}{5}(1500 \text{ N}) - 500 \text{ N} - 240 = 160 \text{ N} \nearrow$$

Problema Resolvido 8.2

Duas forças atuam em um bloco de apoio, como ilustrado. Sabendo que os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano inclinado são $\mu_e = 0,35$ e $\mu_c = 0,25$, determinar a força Q necessária para: (a) iniciar o movimento, subindo o plano inclinado, (b) manter esse movimento e (c) evitar que ele escorregue para baixo.

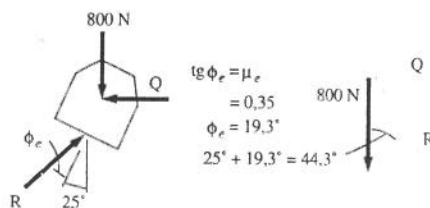


Solução. Para cada parte do problema desenhemos um diagrama de corpo livre do bloco e um triângulo de forças, formado pela força vertical de 800 N, pela força horizontal Q e pela força R exercida pelo plano inclinado no bloco. A direção de R deve ser determinada em cada caso. Observamos que, sendo Q perpendicular à força de 800 N, o triângulo de forças é retângulo e pode-se, pois, calcular Q facilmente. Na maioria dos problemas, entretanto, o triângulo de forças é escaleno e deve ser resolvido aplicando-se a lei dos senos.

a) Força Q para iniciar o movimento de subida:

$$Q = (800 \text{ N}) \operatorname{tg} 44,3^\circ$$

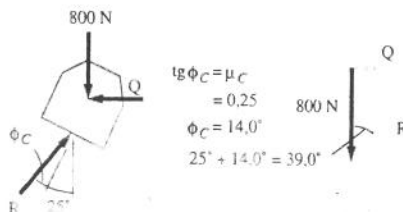
$$Q = 780 \text{ N} \leftarrow \leftarrow$$



b) Força Q para manter o bloco subindo:

$$Q = (800 \text{ N}) \operatorname{tg} 39,0^\circ$$

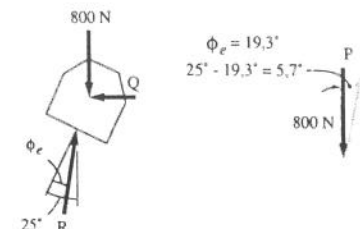
$$Q = 649 \text{ N} \leftarrow \leftarrow$$



c) Força Q para evitar o escorregamento para baixo:

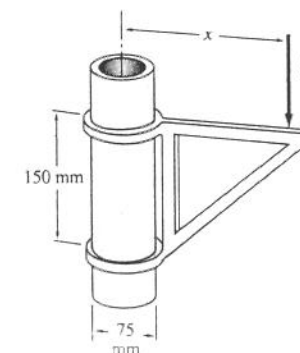
$$Q = (800 \text{ N}) \operatorname{tg} 5,7^\circ$$

$$Q = 80,0 \text{ N} \leftarrow \leftarrow$$



Problema Resolvido 8.3

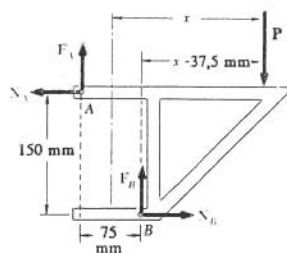
O suporte móvel ilustrado pode ser colocado em qualquer altura sobre o tubo de 75 mm de diâmetro. Se o coeficiente de atrito estático entre o tubo e o suporte é 0,25, determinar a mínima distância x para a qual a carga P pode ser suportada. Despreze o peso do suporte.



Solução. Traçamos o diagrama de corpo livre para o suporte. Quando P é colocado à mínima distância x do eixo do tubo, o suporte está na iminência de deslizar, e as forças de atrito em A e B alcançam seus valores máximos:

$$F_A = \mu N_A = 0,25N_A$$

$$F_B = \mu N_B = 0,25N_B$$



Equações de Equilíbrio

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0:$$

$$N_B - N_A = 0$$

$$N_B = N_A$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$F_A + F_B - P = 0$$

$$0,25N_A + 0,25N_B = P$$

E, como N_B é igual a N_A ,

$$0,50N_A = P$$

$$N_A = 2P$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0:$$

$$N_A (150 \text{ mm}) - F_A (75 \text{ mm}) - P (x - 37,5 \text{ mm}) = 0$$

$$150 N_A - 75(0,25N_A) - Px + 37,5 P = 0$$

$$150 (2P) - 18,75 (P) - Px + 37,5 P = 0$$

Dividindo por P e resolvendo para x ,

$$x = 319 \text{ mm} \leftarrow$$

Problemas

8.1 Os coeficientes de atrito entre o bloco e o plano inclinado são $\mu_e = 0,30$ e $\mu_c = 0,25$. Verifique se o bloco está em equilíbrio e calcule o módulo e a direção da força de atrito com $Q = 150 \text{ N}$.

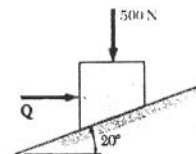


Figura P8.1

8.2 Resolva o Prob. 8.1 com $Q = 400 \text{ N}$.

8.3 Os coeficientes de atrito entre o bloco de 225 N e o plano inclinado são $\mu_e = 0,40$ e $\mu_c = 0,30$. Verifique se o bloco está em equilíbrio e calcule o módulo e a direção da força de atrito com $Q = 500 \text{ N}$.

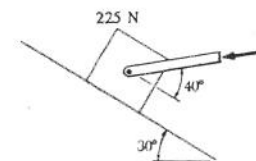


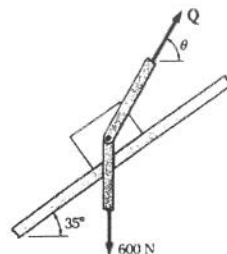
Figura P8.3

8.4 Resolva o Prob. 8.3 com $Q = 300 \text{ N}$.

8.5 Para o bloco do Prob. 8.3, determine o menor valor de Q necessário: (a) para começar a mover o bloco para cima, (b) para manter o movimento ascendente e (c) para evitar que o bloco escorregue para baixo.

8.6 Os coeficientes de atrito entre o bloco e o trilho são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$. Sabendo que $\theta = 60^\circ$, determine o menor valor de Q necessário para: (a) começar o movimento ascendente do bloco, (b) manter o movimento ascendente e (c) evitar que o bloco escorregue para baixo.

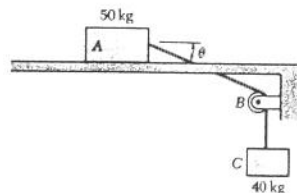
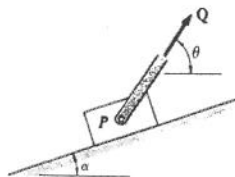
8.7 Os coeficientes de atrito entre o bloco e o trilho são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$. Determine o módulo e a direção da menor força Q necessária para: (a) iniciar o movimento ascendente do bloco e (b) evitar que o bloco escorregue para baixo.



Figuras P8.6 e P8.7

8.8 Um bloco de peso $P = 300$ N repousa sobre uma superfície áspera, como ilustrado. Sabendo que $\alpha = 20^\circ$ e $\mu = 0,30$, determine o módulo e a direção da menor força Q necessária para: (a) iniciar o movimento ascendente do bloco e (b) evitar que o bloco escorregue para baixo.

8.9 A figura mostra dois blocos ligados por um cabo. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o bloco A e a superfície horizontal é 0,50, determine o valor de θ para o qual o movimento é iminente.



Figuras P8.8 e P8.9

8.10 O bloco A, com 40 kg, está suspenso por um cabo, como mostra a figura. A roldana C está vinculada por uma articulação ao bloco E, que está apoiado em um trilho horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco E e o trilho é 0,30 e desprezando o peso do bloco E e o atrito nas roldanas, determine o maior valor possível de θ compatível com o equilíbrio.

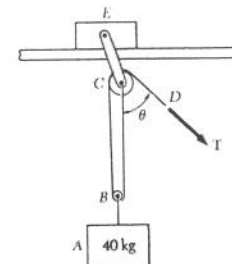
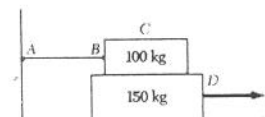


Figura P8.10

8.11 Os coeficientes de atrito entre todas as superfícies em contato são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$. Determine a menor força F necessária para pôr o bloco D em movimento se: (a) o bloco C está vinculado pelo cabo AB, como mostra a figura, e (b) o cabo AB é removido.

8.12 Os coeficientes de atrito entre todas as superfícies em contato são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$. Sabendo que $F = 800$ N, determine: (a) a resultante das forças de atrito exercidas no bloco D se o bloco C é vinculado como mostra a figura e (b) a força de atrito exercida pelo solo no bloco D se o cabo AB é removido.



Figuras P8.11 e P8.12

8.13 Três pacotes A, B e C, de 4 kg, são colocados em uma esteira transportadora que está em repouso. Os coeficientes de atrito entre a esteira e os pacotes A e C são $\mu_e = 0,30$ e $\mu_c = 0,20$; entre a esteira e o pacote B são $\mu_e = 0,10$ e $\mu_c = 0,08$. Os pacotes são colocados sobre a esteira de modo a estarem em contato um com o outro e todos em repouso. Determine se algum pacote se movimentará e a força de atrito em cada pacote.

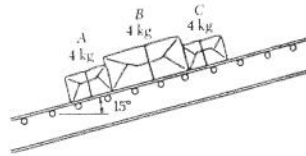


Figura P8.13

8.14 Resolva o Prob. 8.13 supondo que o pacote *B* está à direita de *A* e *C*.

8.15 O bloco *A* pesa 250 N; o bloco *B*, 125 N. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies em contato é 0,15, determine o valor de θ para o qual o movimento é iminente.

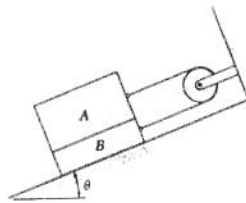


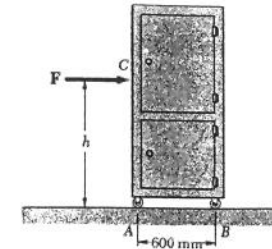
Figura P8.15

8.16 Resolva o Prob. 8.15 supondo que o coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é 0,15 e que é nulo entre o bloco *B* e o plano inclinado.

8.17 Para o sistema de Prob. 8.15, suponha que os coeficientes de atrito entre os dois blocos sejam $\mu_e = 0,15$ e $\mu_c = 0,12$ e nulos entre o bloco *B* e o plano inclinado. Determine o módulo da força de atrito entre os dois blocos quando: (a) $\theta = 25^\circ$ e (b) $\theta = 35^\circ$.

8.18 Um armário de 60 kg está montado sobre rodízios que podem ser travados. O coeficiente de atrito é 0,30. Se $h = 800$ mm, determine o módulo da força *F* necessária para mover o armário para a direita: (a) se todos os rodízios estão travados, (b) se os rodízios em *B* estão travados ao passo que os em *A* estão livres para girar e (c) se os rodízios em *A* estão travados e os em *B* livres para girar.

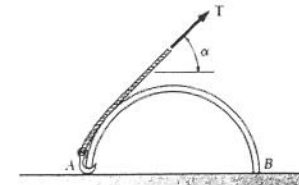
8.19 Um armário de 60 kg está montado sobre rodízios que podem ser travados. O coeficiente de atrito entre o chão e cada rodízio é 0,30. Supondo que todos os rodízios estejam travados, determine: (a) a força *F* necessária para movimentar o armário para a direita e (b) o maior valor possível para *h*, sem que o armário tombe.



Figuras P8.18 e P8.19

8.20 Um pedaço de tubo pesando 1 000 N deve ser deslocado para a direita sem tombar. Sabendo que o coeficiente de atrito entre o tubo e o chão é 0,40, determine: (a) o maior valor possível para α e (b) a correspondente tração *T*.

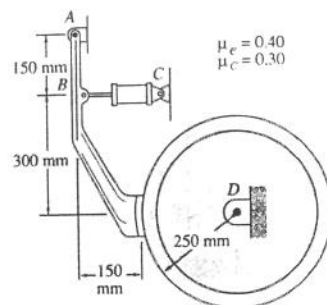
8.21 Nas condições do Prob. 8.20, com $\alpha = 30^\circ$, determine: (a) a tração *T* necessária para mover o tubo e (b) se o tubo deslizará ou tombará.



Figuras P8.20 e P8.21

8.22 Um binário de momento igual a $90 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado ao tambor. Determine a força a ser aplicada pelo cilindro hidráulico para que o tambor não gire, quando o binário tem orientação: (a) horária e (b) anti-horária.

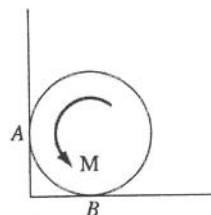
8.23 O cilindro hidráulico aplica no ponto B uma força de 2 500 N que aponta para a direita. Determine o momento da força de atrito em relação ao eixo do tambor quando o tambor gira: (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário.



Figuras P8.22 e P8.23

8.24 Determine o módulo do maior momento M que pode ser aplicado ao cilindro sem que ele gire. O cilindro tem peso P e raio r . O coeficiente de atrito estático é μ_e , tanto em A como em B .

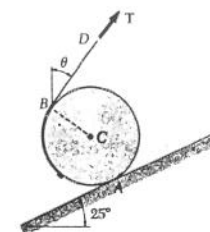
8.25 O cilindro tem peso P e raio r . Calcule em termos de P e r o módulo do maior momento que pode ser aplicado ao cilindro sem que ele gire, supondo que o coeficiente de atrito estático seja (a) zero em A e 0,40 em B e (b) 0,30 em A e 0,40 em B .



Figuras P8.24 e P8.25

* 8.26 Um cordão está preso e parcialmente enrolado em um cilindro de peso P e raio r que está apoiado em um plano inclinado, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o plano inclinado e o cilindro é 0,30, determine: (a) o menor valor de θ para que o cilindro fique parado e (b) o correspondente valor da tração no cordão.

* 8.27 Um cordão está preso e parcialmente enrolado em um cilindro de peso P e raio r que está apoiado em um plano inclinado, como mostra a figura. Como $\theta = 40^\circ$, determine: (a) a tração no cordão e (b) o menor valor do coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o plano inclinado para que o equilíbrio se mantenha.



Figuras P8.26 e P8.27

8.28 Um carro está estacionado com as rodas dianteiras encostadas na guia quando o motorista liga o motor e tenta subir na calçada. Sabendo que as rodas têm raios de 280 mm, que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a guia é 0,90 e que 60% do peso do carro está distribuído nas rodas dianteiras e 40% nas traseiras, determine a maior altura h de guia que o carro pode galgar supondo: (a) tração nas rodas dianteiras e (b) tração nas rodas traseiras.



Figura P8.28

8.29 Resolva o Prob. 8.28 supondo que o peso do carro esteja uniformemente distribuído nas quatro rodas.

8.30 A extremidade A de uma barra delgada e uniforme de comprimento L e peso P apóia-se sobre uma superfície horizontal, enquanto a ponta B está apoiada em um cordão BC . Os coeficientes de atrito são $\mu_e = 0,35$ e $\mu_c = 0,25$. Determine: (a) o maior valor de θ compatível com o equilíbrio e (b) o correspondente valor da tração no cordão.

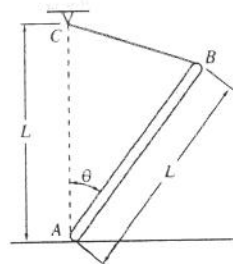


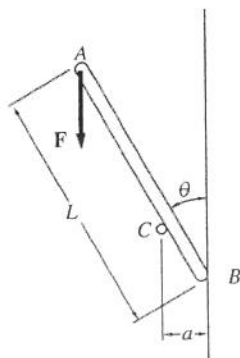
Figura P8.30

8.31 Determine se a barra do Prob. 8.30 está em equilíbrio quando $\theta = 30^\circ$ e calcule o módulo e a direção da força de atrito na barra.

8.32 Uma barra delgada de comprimento L está apoiada em um pino em C e em uma parede vertical e sujeita a uma carga F em sua ponta A . Sendo $\theta = 30^\circ$ e o coeficiente de atrito estático $\mu_e = 0,20$ em B e C , calcule o intervalo de valores da razão L/a para os quais a barra fica em equilíbrio.

8.33 Resolva o Prob. 8.32 supondo que o coeficiente de atrito seja 0,20 em B e zero em C .

8.34 Resolva o Prob. 8.32 supondo que o coeficiente de atrito seja 0,20 em C e zero em B .



Figuras P8.32 e P8.35

8.35 Uma barra delgada de comprimento L está apoiada em um pino em C e em uma parede vertical e sujeita a uma carga F na ponta A . Sabendo que $L = 10a$, $\theta = 30^\circ$ e que os coeficientes de atrito são $\mu_e = 0,20$ e $\mu_c = 0,15$ em C e nulos em B , determine se a barra está em equilíbrio.

8.36 Resolva o Prob. 8.35 supondo que $L = 5a$, $\theta = 30^\circ$ e que os coeficientes de atrito sejam $\mu_e = 0,20$ e $\mu_c = 0,15$ em B e nulos em C .

8.37 Uma barra AB de 10 kg, 2 m de comprimento, uniforme, é mantida em equilíbrio, como ilustrado, com uma ponta apoiada em uma parede vertical e a outra presa a um cordão. Os coeficientes de atrito entre a barra e a parede são $\mu_e = 0,35$ e $\mu_c = 0,25$. Determine o intervalo de valores do comprimento L do cordão para os quais a barra fica em equilíbrio.

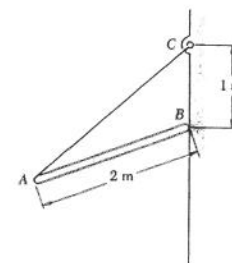


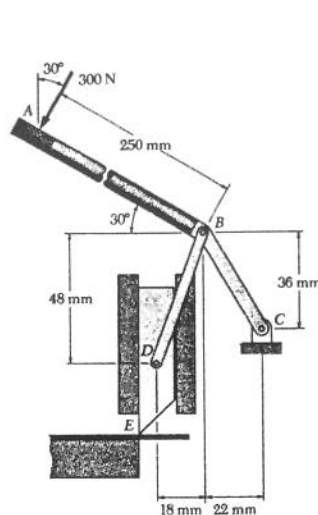
Figura P8.37

8.38 Supondo que o comprimento do cordão AC do Prob. 8.37 seja $L = 2,50$ m, determine se a barra está em equilíbrio e calcule o módulo e a direção da força de atrito que age na barra.

8.39 Resolva o Prob. 8.37 supondo que os coeficientes de atrito entre a barra e a parede sejam $\mu_e = 0,60$ e $\mu_c = 0,45$.

8.40 A tesoura da figura é utilizada para cortar e aparar laminados para circuitos impressos. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a lâmina e a guia vertical é 0,25, determine a força exercida pela aresta E da faca no laminado.

8.41 A tenaz de atrito da figura é utilizada para levantar uma peça fundida de 3,75 kN. Sabendo que $h = 750$ mm, determine o menor valor possível do coeficiente de atrito estático entre o lingote e os blocos D e D' .



Figuras P8.40 e P8.41

8.42 Com referência ao Prob. 8.41, determine o menor valor possível de h sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a peça fundida e os blocos D e D' é 0,30.

8.43 Dois cilindros grandes, iguais, de raio $r = 600$ mm giram em sentidos opostos e constituem a parte principal de um triturador de pedras. A distância d é ajustada para o tamanho máximo desejado para as pedras. Se $d = 25$ mm e $\mu_e = 0,30$, determine o tamanho s das maiores pedras que passam no triturador empurradas apenas pelas forças de atrito.

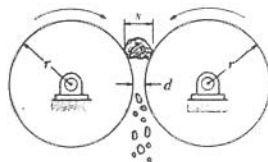
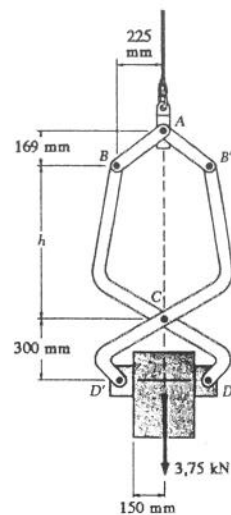


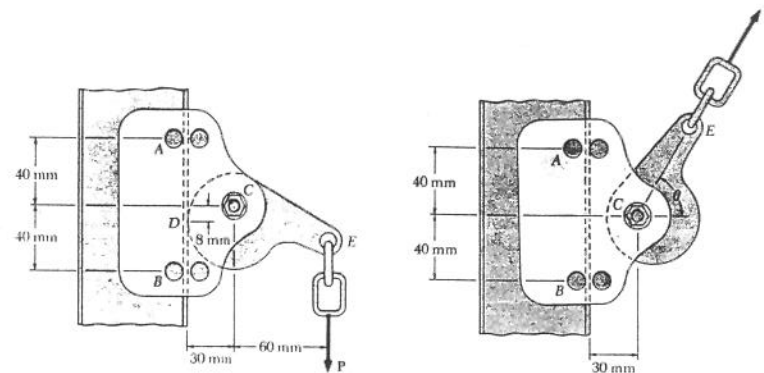
Figura P8.43

8.44 Um dispositivo de segurança, utilizado por trabalhadores que sobem escadas externas em estruturas de grande altura, consiste em um trilho preso à escada e em uma manga que pode deslizar na flange do trilho. Uma corrente prende o cinturão do trabalhador à extremidade de



um came excêntrico que pode girar em torno de um eixo preso ao ponto C da manga. Determine o menor valor possível para o coeficiente de atrito estático entre a flange e os pinos A e B e o came excêntrico, supondo que a manga não deslize quando a corrente é puxada verticalmente para baixo. Há um único coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies em contato.

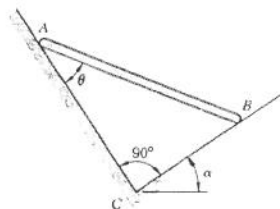
8.45 Para ser útil, a manga do dispositivo de segurança descrito no Prob. 8.44 deve deslizar livremente quando puxada para cima. Determine o maior valor possível para o coeficiente de atrito estático comum entre a flange do trilho e os pinos A e B para que a manga fique livre para deslizar quando puxada como se vê na figura, sendo (a) $\theta = 70^\circ$, (b) $\theta = 60^\circ$ e (c) $\theta = 50^\circ$.



Figuras P8.44 e P8.45

8.46 A haste uniforme AB , contida em um plano vertical, tem suas extremidades apoiadas nos planos AC e BC . Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,30 entre a haste e cada plano, determine o intervalo de valores de θ correspondentes ao equilíbrio, com: (a) $\alpha = 45^\circ$ e (b) $\alpha = 30^\circ$.

8.47 A haste uniforme AB , contida em um plano vertical, tem suas extremidades apoiadas em planos AC e BC . Determine o intervalo de valores de θ correspondentes ao equilíbrio em termos de α e do ângulo de atrito estático θ_e entre a barra e os dois planos. Estude o caso em que: (a) $\alpha > 2\theta_e$ e (b) $\alpha \leq 2\theta_e$.



Figuras P8.46 e P8.47

8.48 A haste delgada AB de comprimento $l = 300$ mm está presa a um colar em A e apoiada em uma roda que está a uma distância $a = 50$ mm acima da barra horizontal sobre a qual desliza o colar. Desprezando o atrito em C e sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o colar e o eixo horizontal é 0,25, determine o intervalo de valores de Q para os quais o sistema está em equilíbrio, com $P = 60$ N e $\theta = 20^\circ$.

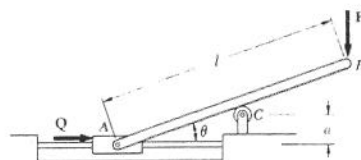


Figura P8.48

8.49 Resolva o Prob. 8.48 supondo que a roda em C esteja travada e que o coeficiente de atrito estático entre a roda e a haste AB seja também 0,25.

8.50 Uma força F de módulo $F = 100$ N está aplicada ao mecanismo da figura. Sabendo que $\theta = 25^\circ$ e que o coeficiente de atrito estático entre o colar C e a barra horizontal é 0,30, determine o intervalo de valores de Q para os quais se mantém o equilíbrio.

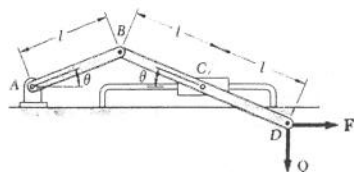


Figura P8.50

8.51 Sendo μ_e o coeficiente de atrito estático entre o colar C e a barra horizontal, determine o maior valor possível para o módulo do vetor binário M que ainda mantém o sistema em equilíbrio. Explique o que acontece se $\mu_e \leq \tan \theta$.

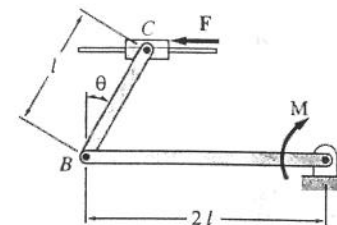


Figura P8.51

* 8.52 Duas vigas de 2,50 m estão articuladas por um pino em D e suportam duas cargas P e Q , como ilustrado. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é nulo em A e 0,25 em B e C determine o menor valor de P para o qual subsiste o equilíbrio com $Q = 550$ N. (Sugestão: Note que C desloca-se para cima quando B se move para a direita.)

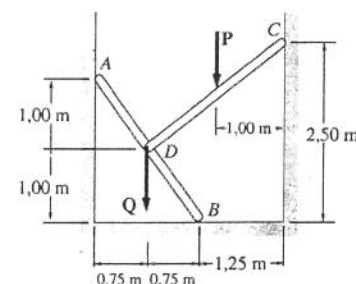
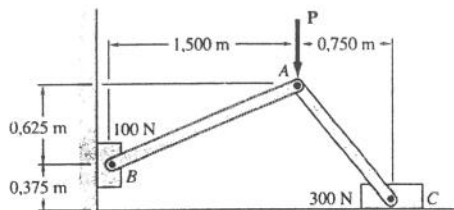


Figura P8.52

* 8.53 Resolva o Prob. 8.52 supondo que o coeficiente de atrito é 0,25 entre todas as superfícies em contato.

* 8.54 Duas hastes delgadas de peso desprezível estão articuladas por um pino em A e aos blocos B , de 100 N, e C , de 300 N, como mostra a figura. O coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies em contato é 0,60. Determine o intervalo de valores de P para os quais subsiste o equilíbrio.

* 8.55 Para um sistema análogo ao do Prob. 8.54, com $P = 1\,500\text{ N}$, determine: (a) o menor valor do coeficiente de atrito estático (em B e em C) para o qual se mantém o equilíbrio e (b) se o deslizamento é iminente.



Figuras P8.54 e P8.55

* 8.56 Resolva o Prob. 8.55 com $P = 1\,000\text{ N}$.

* 8.57 Uma tábua de 3,00 m está apoiada nos roletes A e B afastados de 1,50 m sobre um plano inclinado de 10° . O rolete A gira lentamente no sentido horário, com velocidade constante; o rolete B é livre. Inicialmente a tábua tem seu baricentro em A ($x = 0$) e sua borda C em B . Sabendo que os coeficientes de atrito entre a tábua e o rolete A são $\mu_e = 0,40$ e $\mu_c = 0,30$, (a) determine o valor de x quando a tábua começa a derrapar no rolete A e (b) descreva o que acontece depois.

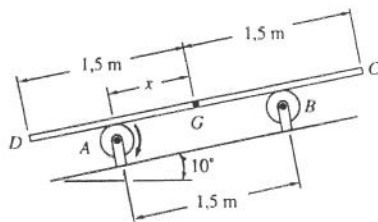


Figura P8.57

* 8.58 Resolva o Prob. 8.57 supondo que o rolete B esteja travado e que os coeficientes de atrito em A e B sejam iguais.

* 8.59 Para analisar uma certa estrutura desenvolveu-se um modelo matemático formado por blocos ligados por molas. Cada bloco pesa $P = 5\text{ N}$, cada mola tem constante $k = 20\text{ N/m}$, e o coeficiente de atrito entre a base e cada bloco é 0,40. Sabendo que a tração inicial em cada mola é nula, trace um gráfico do módulo da força F em função da posição do bloco A quando P cresce de zero a 5 N e depois decresce até o valor zero.

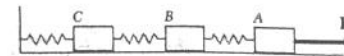


Figura P8.59

8.5. Cunhas. As cunhas são máquinas simples, usadas para erguer grandes blocos de pedra e outras cargas pesadas. Essas cargas podem ser levantadas aplicando-se à cunha uma força em geral consideravelmente menor que o peso da carga. Além disso, em virtude do atrito existente entre as superfícies em contato, uma cunha, se tiver forma apropriada, permanecerá em seu lugar após ter sido forçada por baixo da carga. Desse modo, as cunhas podem ser vantajosamente utilizadas para fazer pequenos ajustes na posição de peças pesadas de maquinaria.

Considere-se o bloco A ilustrado na Fig. 8.7a. Esse bloco repousa contra uma parede vertical B e deve ser erguido um pouquinho, forçando-se uma cunha C entre o bloco A e uma segunda cunha D . Desejamos encontrar o valor mínimo da força Q que deve ser aplicada à cunha C para mover o bloco. Suporemos que o peso P do bloco é conhecido. Ele pode ser determinado em newtons a partir da massa expressa em quilogramas.

Os diagramas de corpo livre do bloco A e da cunha C foram desenhados nas Figs. 8.7b e c. As forças atuantes no bloco incluem seu peso, as forças normais e as forças de atrito nas superfícies de contato com a parede B e a cunha C . Os módulos das forças de atrito F_1 e F_2 são iguais, respectivamente, a $\mu_e N_1$ e $\mu_e N_2$, uma vez que o bloco está parado. É importante representar as forças de atrito com seu sentido correto. Como o bloco se moverá para cima, a força F_4 exercida pela parede sobre o bloco deverá ser dirigida para baixo. Por outro lado, uma vez que a cunha C se move para a direita, o movimento de A em relação a C é para a esquerda; portanto a força F_2 exercida por C em A deve ser dirigida para a direita.

Considerando agora o corpo livre C na Fig. 8.7c observamos que as forças que atuam em C são a força aplicada Q , as forças normais e as forças de atrito nas superfícies de contato com A e D . O peso da cunha é pequeno comparado com as outras partes envolvidas, e pode ser desprezado. As forças que atuam em C são iguais e opostas às forças N_2 e F_2 que atuam em A e são designadas, respectivamente, $-N_2$ e $-F_2$; a força de atrito $-F_2$ deve, portanto, ser dirigida para a esquerda. Verificamos que a força F_3 é também dirigida para a esquerda.

O número total de incógnitas envolvidas nos dois diagramas de corpo livre pode ser reduzido a quatro, se as forças de atrito forem expressas em função das forças

normais. Considerando que o bloco *A* e a cunha *C* estão em equilíbrio, iremos obter quatro equações que poderão ser resolvidas para calcular o módulo de *Q*. Deve-se notar que, no exemplo aqui considerado, será mais conveniente substituir cada par de forças normal e de atrito por sua resultante. Cada corpo livre é, então, submetido a apenas três forças, e o problema pode ser resolvido desenhando-se os correspondentes triângulos de forças (ver Problema Resolvido 8.4).

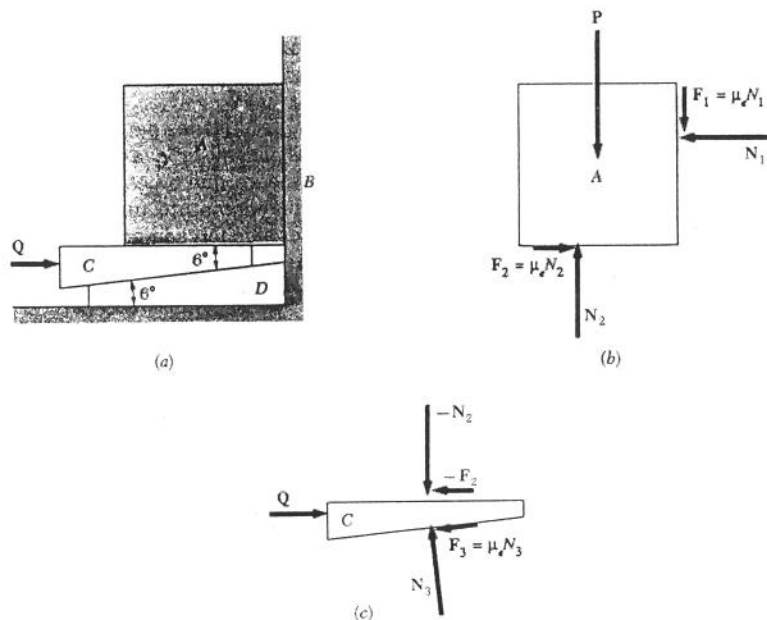


Figura 8.7

8.6. Parafusos de Rosca Quadrada. Parafusos de rosca quadrada são freqüentemente utilizados em macacos, prensas e outros mecanismos. Sua análise é semelhante à do bloco que desliza ao longo de um plano inclinado.

Consideremos o macaco mostrado na Fig. 8.8. O parafuso suporta uma carga *P* e é apoiado pela base do macaco. O contato entre o parafuso e a base é feito ao longo de uma parte de seus fios de rosca. Aplicando-se uma força *Q* no cabo, o parafuso poderá girar e elevar a carga *P*.

A rosca da base foi desenvolvida e mostrada como uma linha reta na Fig. 8.9a. A inclinação correta foi obtida representando-se horizontalmente o produto $2\pi r$, onde *r* é o raio médio da rosca, e verticalmente o avanço *L* do parafuso, isto é, a distância que

o parafuso avança em uma volta. O ângulo θ que essa linha forma com a horizontal é o *ângulo de avanço*. Como a força de atrito entre duas superfícies não depende da área em contato, as duas roscas podem ser consideradas em contato sobre uma área muito menor que a real, e o parafuso pode ser representado pelo bloco mostrado na Fig. 8.9a. Deve-se observar, no entanto, que, nessa análise do macaco, o atrito entre o cabeçote e o parafuso é desprezado.

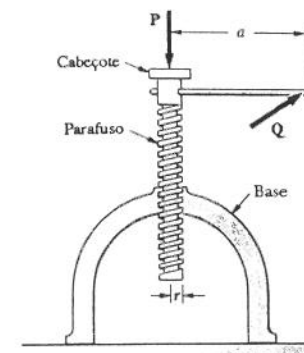
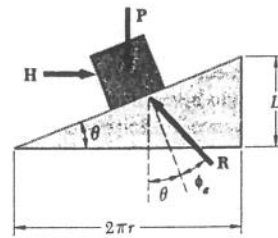


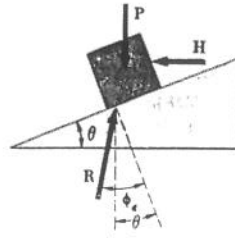
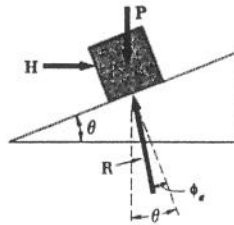
Figura 8.8

O diagrama de corpo livre do bloco deve incluir a carga *P*, a reação *R* da rosca da base e uma força horizontal *H*, que tem o mesmo efeito da força *Q* exercida no cabo. A força *H* deve ter o mesmo momento que *Q* em relação ao eixo do parafuso e seu valor deve, portanto, ser $H = Qa/r$. A força *H*, e, portanto, a força *Q* necessária para erguer a carga *P*, pode ser obtida do diagrama de corpo livre ilustrado na Fig. 8.9a. O ângulo de atrito é tomado igual a ϕ_c , uma vez que a carga será provavelmente, erguida por meio de uma série de golpes súbitos. Em mecanismos providos de rotação contínua do parafuso, é interessante fazer distinção entre a força necessária para iniciar o movimento (usando ϕ_c) e aquela necessária para manter o movimento (usando ϕ_k).

Se o ângulo de atrito ϕ_c é maior que o ângulo de avanço θ , diz-se que o parafuso é *autobloqueante*; ele permanecerá em seu lugar sob a ação da carga. Para baixar a carga, devemos então aplicar a força indicada na Fig. 8.9b. Se ϕ_c for menor que θ , o parafuso girará, descendo sob a ação da carga; será então necessário aplicar a força indicada na Fig. 8.9c para manter o equilíbrio.



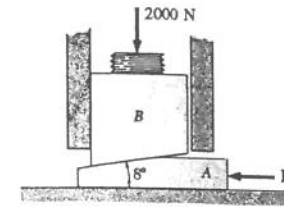
(a) Movimento ascendente iminente

(b) Movimento descendente iminente com $\phi_e > \theta$ (c) movimento descendente iminente com $\phi_e < \theta$ **Figura 8.9** Análise de um parafuso pela analogia com bloco e plano inclinado.

O avanço de um parafuso não deve ser confundido com seu *passo*. O avanço foi definido como a distância que o parafuso se desloca em uma volta; o passo é a distância medida entre duas roscas consecutivas. Embora avanço e passo sejam iguais no caso de *parafusos com rosca simples*, são diferentes no caso de *parafusos de rosca múltipla*, isto é, parafusos com várias roscas independentes. Verifica-se facilmente que, para parafusos com rosca dupla, o avanço é o dobro do passo; para parafusos com rosca tripla, é o triplo do passo etc.

Problema Resolvido 8.4

A posição do bloco B de uma máquina é ajustada movendo-se a cunha A. O coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies é 0,35. Determinar o valor da força F necessária para: (a) levantar o bloco B e (b) abaixar o bloco B.



Solução. Os diagramas de corpo livre para o bloco B e para a cunha A são traçados, assim como os triângulos de força correspondentes. Utiliza-se a lei dos senos para calcular as forças desejadas. Observa-se que, sendo $\mu_e = 0,35$, o ângulo de atrito é

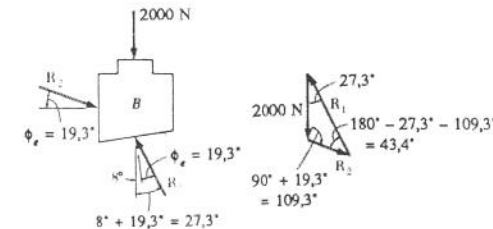
$$\phi_e = \arctg^{-1} 0,35 = 19,3^\circ$$

a) Força F para levantar o bloco

Corpo livre: Bloco B

$$\frac{R_1}{\sin 109,3^\circ} = \frac{2\,000\text{ N}}{\sin 43,4^\circ}$$

$$R_1 = 2\,745\text{ N}$$

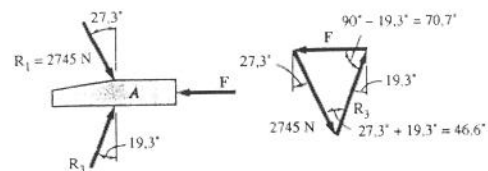


Corpo livre: Cunha A

$$\frac{F}{\sin 46,6^\circ} = \frac{2\,745\text{ N}}{\sin 70,7^\circ}$$

$$F = 2\,115\text{ N}$$

$$F = 2\,115\text{ N} \leftarrow \leftarrow$$

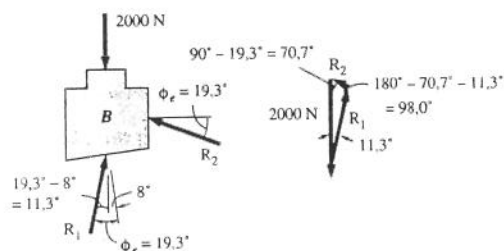


b) Força F para abaixar o bloco

Corpo livre: Bloco B

$$\frac{R_1}{\sin 70,7^\circ} = \frac{2000 \text{ N}}{\sin 98,0^\circ}$$

$$R_1 = 1905 \text{ N}$$

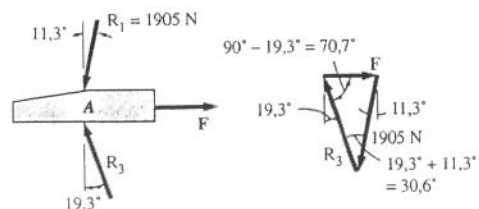


Corpo livre: Cunha A

$$\frac{F}{\sin 30,6^\circ} = \frac{1905 \text{ N}}{\sin 70,7^\circ}$$

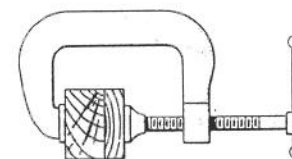
$$F = 1030 \text{ N}$$

$$F = 1030 \text{ N} \rightarrow \leftarrow$$



Problema Resolvido 8.5

Um grampo é usado para manter juntas duas peças de madeira como indicado. O grampo tem uma rosca quadrada dupla, de diâmetro médio igual a 10 mm e passo de 2 mm. O coeficiente de atrito entre as roscas é $\mu_e = 0,30$. Se um momento máximo de $40 \text{ N} \cdot \text{m}$ é aplicado no aperto do grampo, determinar: (a) a força exercida sobre as peças de madeira e (b) o momento necessário para afrouxar o grampo.



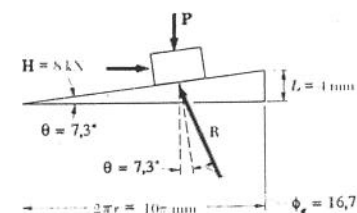
a) Força Exercida pelo grampo. O raio médio do parafuso é $r = 5 \text{ mm}$. Como o parafuso é de rosca dupla, o avanço L é igual a duas vezes o passo: $L = 2(2 \text{ mm}) = 4 \text{ mm}$. O ângulo de avanço θ e o ângulo de atrito ϕ_e são obtidos escrevendo-se

$$\tan \theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4 \text{ mm}}{10\pi \text{ mm}} = 0,13$$

$$\theta = 7,3^\circ$$

$$\tan \phi_e = \mu_e = 0,30$$

$$\phi_e = 16,7^\circ$$



A força H que deve ser aplicada ao bloco que representa o parafuso é obtida considerando-se que seu momento Hr em relação ao eixo do parafuso é igual ao momento aplicado:

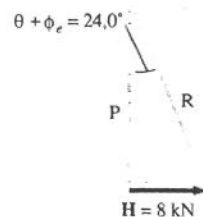
$$H(5 \text{ mm}) = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$H = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \text{ mm}} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 8 \text{ kN}$$

O diagrama de corpo livre e o correspondente triângulo de forças podem agora ser traçados para o bloco; o valor da força **P** exercida sobre as peças de madeira é obtido resolvendo-se o triângulo:

$$P = \frac{H}{\tan(\theta + \phi_e)} = \frac{8 \text{ kN}}{\tan 24,0^\circ}$$

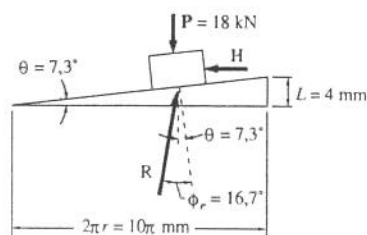
$$P = 18 \text{ kN} \quad \Leftarrow$$



b) Momento Necessário para Afrouxar o Grampo. A força **H** necessária para afrouxar o grampo e o momento necessário para afrouxar o grampo correspondente são obtidos do diagrama de corpo livre e do triângulo de forças ilustrado:

$$H = P \tan(\phi_e - \theta) = (18 \text{ kN}) \tan 9,4^\circ$$

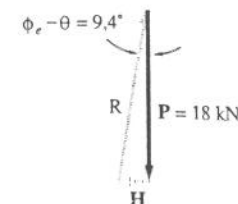
$$= 3,0 \text{ kN}$$



$$\text{Momento} = Hr = (3,0 \text{ kN})(5 \text{ mm})$$

$$= (3,0 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Momento} = 15 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \Leftarrow$$



Problemas

8.60 A peça **ABC** é suportada por uma articulação sem atrito em **B** e por uma cunha de 10° em **C**. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,20 em ambas as faces da cunha, determine: (a) a força **F** necessária para mover a cunha para a esquerda e (b) as componentes da reação correspondente em **B**.

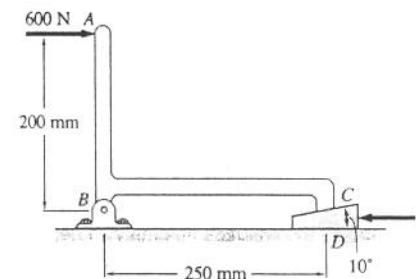


Figura P8.60

8.61 Resolva o Prob. 8.60 supondo que a cunha deve mover-se para a direita.

8.62 Um bloco de 1 000 N está apoiado em uma cunha de peso desprezível, como mostra a figura. O coeficiente de atrito é 0,30 entre todas as superfícies em contato. Determine o ângulo θ para o qual o deslizamento é iminente e calcule o correspondente valor da força normal exercida pela parede vertical sobre o bloco.

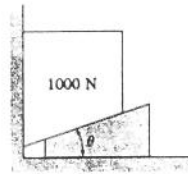
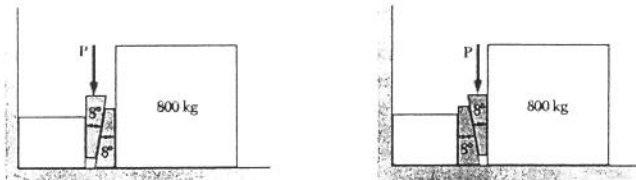


Figura P8.62

8.63 Resolva o Prob. 8.62 supondo que: (a) o coeficiente de atrito estático seja nulo entre o bloco e a parede vertical e 0,30 entre as outras superfícies em contato e (b) o coeficiente de atrito estático seja nulo entre o bloco e a cunha e 0,30 entre as outras superfícies em contato.

8.64 e 8.65 Duas cunhas de 8° e peso desprezível são utilizadas para mover e posicionar o bloco de 800 kg. O coeficiente de atrito estático é 0,25 entre todas as superfícies em contato. Determine a menor força P que deve ser aplicada a uma das cunhas, de acordo com a figura.



Figuras P8.64 e P8.65

8.66 Ajusta-se a altura da extremidade de uma viga de aço com as cunhas de aço E e F . A placa de aço CD foi soldada à flange inferior da viga. Sabe-se que a reação na ponta da viga é de 75 kN. O coeficiente de atrito estático entre duas superfícies de aço é 0,30 e entre aço e concreto é 0,60. Se o movimento horizontal da placa CD é evitado pela força Q , determine: (a) a força F necessária para erguer a viga e (b) a correspondente força Q .

8.67 Resolva o Prob. 8.66 supondo que a extremidade da viga deva ser abaixada.

8.68 Uma cunha A , de peso desprezível, deve ser cravada entre as placas B e C . O coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies em contato é 0,35. Determine o módulo da força P necessária para iniciar o movimento da cunha se: (a) as placas estão ambas soltas e (b) se a placa C está firmemente parafusada.

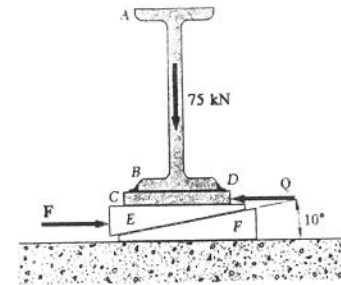
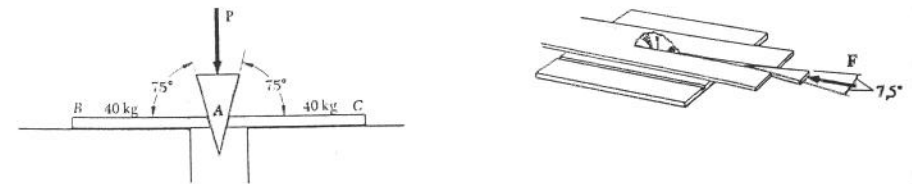


Figura P8.66

8.69 Uma cunha de 15° é forçada no corte feito por uma serra circular para evitar de travar a serra. O coeficiente de atrito estático entre a cunha e a madeira é 0,25. Sabendo que uma força horizontal F de 140 N foi utilizada para inserir a cunha, determine os módulos das forças exercidas pela cunha na tábua após sua inserção.



Figuras P8.68 e P8.69

8.70 A constante de mola de uma fechadura é 300 N/m e, na posição ilustrada, a mola exerce uma força de 2,4 N na lingüeta. O coeficiente de atrito estático entre a lingüeta e a placa de guia é 0,40. Todas as outras superfícies estão bem lubrificadas e sem atrito. Determine o módulo da força F necessária para começar a fechar a porta.

8.71 No Prob. 8.70, determine o ângulo que a face da lingüeta deveria formar com o segmento BC para que a força F necessária para fechar a porta seja a mesma tanto na posição ilustrada quanto na posição em que B está encostado na placa de guia.

8.72 Uma cunha de 5° deve ser forçada sob a base de uma máquina de 7 000 N, no ponto A . O coeficiente de atrito estático é 0,20 entre todas as superfícies. (a) Determine a força F necessária para mover a cunha. (b) Indique se a máquina irá se mover.

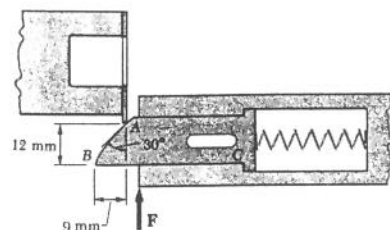


Figura P8.70

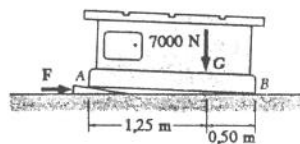


Figura P8.72

8.73 Resolva o Prob. 8.72 supondo que a cunha deva ser forçada sob a base da máquina em B em vez de em A.

8.74 O parafuso sem fim de rosca quadrada tem raio médio de 50 mm e passo de 12,5 mm. A engrenagem grande está sujeita a um momento horário constante de $1\,200\text{ N}\cdot\text{m}$. Sabendo que o coeficiente de atrito entre os dentes da engrenagem e o parafuso é 0,10, determine o momento que deve ser aplicado ao eixo AB para girar a engrenagem grande no sentido anti-horário. Despreze o atrito nos mancais A, B e C.

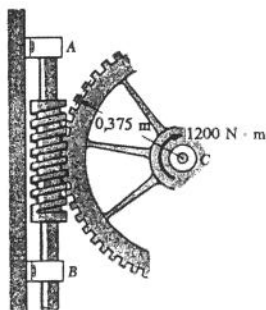


Figura P8.74

8.75 No Prob. 8.74, determine o momento que deve ser aplicado ao eixo AB para girar a engrenagem grande no sentido horário.

8.76 As principais características de um guindaste especial estão ilustradas. As distâncias AD e CD são de 9 m. A posição da lança CDE de 6 Mg é controlada pelo parafuso ABC de

rosca dupla em cada extremidade (rosca esquerda em A e rosca direita em C). Cada rosca tem um passo de 16 mm e um diâmetro médio de 200 mm. Se o coeficiente de atrito estático é 0,08, determine o módulo do momento que deve ser aplicado ao parafuso para: (a) levantar a lança e (b) abaixar a lança.

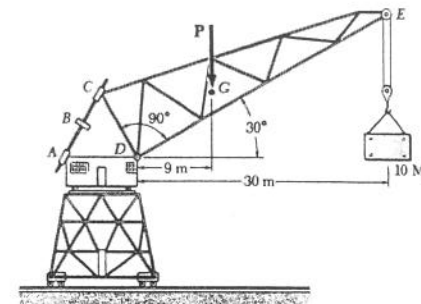


Figura P8.76

8.77 Deduza as fórmulas que relacionam a carga P e a força Q aplicada ao cubo do macaco discutido na Seção 8.6:

(a) $Q = (Pr/a) \tan(\theta + \phi_e)$, para levantar a carga, (b) $Q = (Pr/a) \tan(\phi_e - \theta)$, para abaixar a carga se o parafuso é autobloqueante e (c) $Q = (Pr/a) \tan(\theta - \phi_e)$ para segurar a carga se o parafuso não é autobloqueante

8.78 Na morsa da figura, o parafuso é de rosca simples no membro superior, passa através do membro inferior e é preso por uma arruela sem atrito. O passo do parafuso é 3 mm, seu raio médio é 12 mm, e o coeficiente de atrito estático é 0,15. Determine o módulo P das forças exercidas pelas garras quando um momento de $60\text{ N}\cdot\text{m}$ é aplicado ao parafuso.

8.79 Resolva o Prob. 8.78 supondo que o parafuso seja de rosca simples tanto em A como em B (rosca direita em A e esquerda em B).

8.80 A morsa ilustrada consiste em dois elementos unidos por dois parafusos de dupla rosca, de raio médio 5 mm e passo 1,5 mm. O elemento inferior é rosqueado em A e B ($\mu_e = 0,35$), enquanto o superior não é rosqueado. Deseja-se aplicar duas forças iguais e opostas de 500 N aos blocos mantidos entre as mandíbulas. (a) Qual o parafuso que deve ser ajustado em primeiro lugar? (b) Qual o máximo momento aplicado no aperto do segundo parafuso?

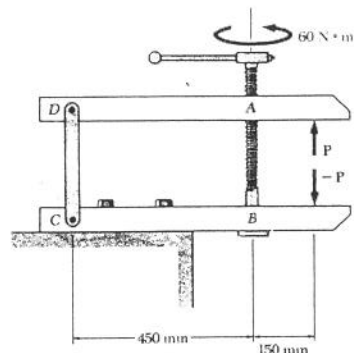


Figura P8.78

8.81 Resolva a parte (b) do Prob. 8.80 supondo que o parafuso errado seja ajustado em primeiro lugar.

8.82 Na morsa de bancada ilustrada, o mordente móvel D está rigidamente ligado à haste AB , que se ajusta frouxamente no corpo fixo da morsa. O parafuso de rosca simples é rosqueado na base fixa e tem um diâmetro médio de 15 mm e um passo de 6 mm. O coeficiente de atrito é 0,25 entre as roscas e também entre a haste e o corpo. Desprezando o atrito de mancal entre o parafuso e a cabeça móvel, determine o momento que deve ser aplicado à alavanca para produzir uma força de aperto de 4 kN.

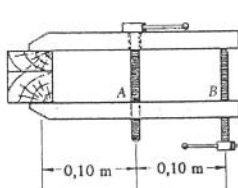


Figura P8.80

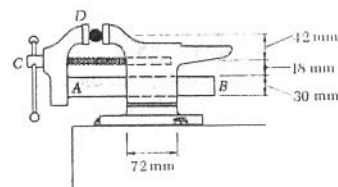


Figura P8.82

8.83 No Prob. 8.82, uma força de aperto de 4 kN foi obtida apertando-se a morsa. Determine o momento que deve ser aplicado ao parafuso para afrouxar a morsa.

* 8.7. Mancais de Deslizamento. Atrito em Eixos. Mancais de deslizamento são usados para fornecer apoio lateral a árvores e eixos em rotação. Mancais de escora, que serão estudados na próxima seção, são usados para dar apoio axial a árvores e eixos. Se o mancal de deslizamento está completamente lubrificado, a resistência devida ao atrito depende da velocidade de rotação, da folga entre eixo e mancal e da viscosidade do lubrificante. Conforme indicado na Seção 8.1, tais problemas são estudados em mecânica dos fluidos. Os métodos deste capítulo, no entanto, podem ser aplicados ao estudo do atrito axial quando o mancal não está lubrificado ou está apenas parcialmente. Podemos, então, considerar que o eixo e o mancal estão em contato direto ao longo de uma única linha reta paralela a seu eixo geométrico.

Consideremos duas rodas, cada uma de peso P , rigidamente montadas em um eixo, apoiado simetricamente por dois mancais de deslizamento (Fig. 8.10a). Se as rodas giram, verificamos que, para mantê-las girando com velocidade constante, é necessário aplicar a cada uma delas um momento M . Um diagrama de corpo livre foi desenhado na Fig. 8.10c, que representa uma das rodas e a metade do eixo correspondente, em projeção sobre um plano perpendicular ao eixo. As forças que atuam no corpo livre incluem o peso P da roda, o binário de momento M , necessário para manter seu movimento, e uma força R representando a reação do mancal. Essa força é vertical, igual e oposta a P , porém não passa pelo centro O do eixo; R está localizada à direita de O , a uma distância tal que seu momento em relação a O equilibra o momento M do binário. O contato entre o eixo e o mancal, portanto, não se realiza no ponto inferior A quando o eixo gira. Realizar-se-á em um ponto B (Fig. 8.10b), ou melhor, ao longo de uma linha reta que intercepta o plano da figura em B . Fisicamente, isto é explicado pelo fato de que, quando as rodas são postas em movimento, o eixo “sobe” nos mancais, até que ocorra deslizamento. Após escorregar ligeiramente para baixo, o eixo assenta mais ou menos na posição indicada. Essa posição é tal que o ângulo entre a reação R e a normal à superfície do mancal é igual ao ângulo de atrito cinético ϕ_c . A distância de O até a linha de ação de R é, assim, $r \sin \phi_c$, onde r é o raio do eixo. Escrevendo que $\Sigma M_O = 0$ para as forças que atuam no corpo livre considerado, obtemos o valor do momento M necessário para vencer a resistência devida ao atrito de um dos mancais:

$$M = Rr \sin \phi_c \quad (8.5)$$

Observando que, para pequenos valores do ângulo de atrito, $\sin \phi_c$ pode ser substituído por $\tan \phi_c$, isto é, por μ_c , escrevemos a fórmula aproximada.

$$M = Rr \mu_c \quad (8.6)$$

Na solução de certos problemas, pode ser mais conveniente conservar a linha de ação de R passando por O , como acontece quando o eixo não gira. Um binário de momento $-M$ de mesmo módulo M , porém de sentido oposto, deve ser adicionado à reação R (Fig. 8.10d). Esse binário representa a resistência devida ao atrito do mancal.

No caso de se preferir uma solução gráfica, a linha de ação de $\mathbf{R}$ pode ser facilmente traçada (fig. 8.10e) se observamos que ela deve ser tangente a um círculo centrado em O e de raio.

$$r_a = r \sin \phi_c = r \mu_c \quad (8.7)$$

Esse círculo, denominado *círculo de atrito* do eixo e mancal, é independente das condições de carregamento do eixo.

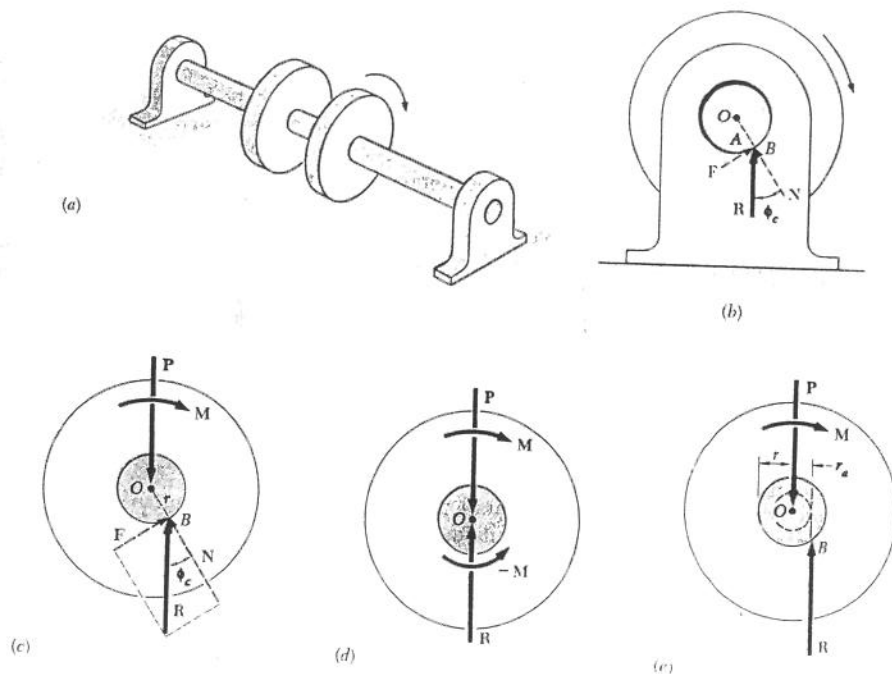


Figura 8.10

***8.8. Mancais de Escora. Atrito de Giro.** Mancais de escora são usados para fornecer apoio axial a árvores e eixos em rotação. São de dois tipos: (1) *mancais terminais* e (2) *mancais com anel de escora* (Fig. 8.11). No caso de mancais com anel de escora, as forças de atrito desenvolvem-se entre as duas superfícies anulares em contato. No caso de mancais terminais, o atrito se realiza em toda a superfície circular, ou superfícies anulares, quando a extremidade da árvore é oca. Atrito entre superfícies circulares, denominado *atrito de giro*, também ocorre em outros mecanismos, tais como *embreagens a disco*.

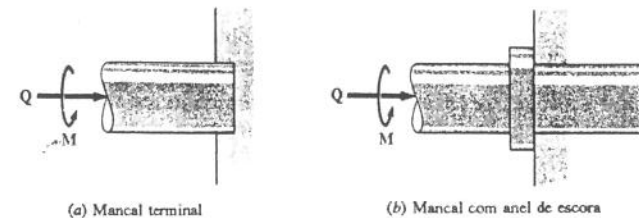


Figura 8.11

Para obter uma fórmula que seja válida no caso mais geral de atrito de giro, consideremos uma árvore oca em rotação. Um binário $\mathbf{M}$ mantém a árvore girando em velocidade constante, enquanto uma força $\mathbf{Q}$ a conserva em contato com um mancal fixo (Fig. 8.12). O contato entre a árvore e o mancal ocorre em uma superfície anular de raio interno R_1 e raio externo R_2 . Supondo que a pressão entre as duas superfícies em contato seja uniforme, encontramos que o módulo da força normal ΔN exercida sobre um elemento de área ΔA é $\Delta N = Q \Delta A / A$, onde $A = \pi (R_2^2 - R_1^2)$, e que o módulo da força de atrito ΔF agindo sobre ΔA é $\Delta F = \mu_c \Delta N$. Designando r a distância do eixo da árvore ao elemento de área ΔA , o momento ΔM de ΔF em relação ao eixo da árvore é dado por:

$$\Delta M = r \Delta F = \frac{r \mu_c Q \Delta A}{\pi (R_2^2 - R_1^2)}$$

O equilíbrio da árvore requer que o momento $\mathbf{M}$ do binário aplicado seja igual em módulo à soma dos momentos das forças de atrito ΔF .

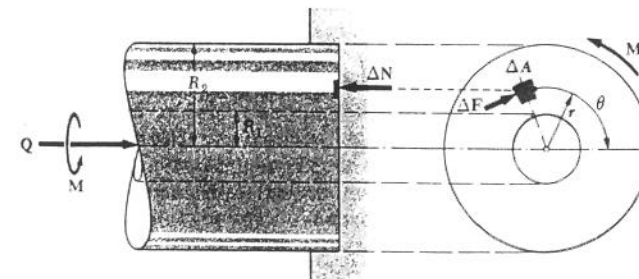


Figura 8.12

Substituindo ΔA pelo elemento infinitesimal $dA = r d\theta dr$, expresso em coordenadas polares, e integrando sobre a área de contato, obtemos a seguinte expressão para o módulo do momento M necessário para vencer a resistência devida ao atrito do mancal:

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\mu_c Q}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr d\theta \\
 &= \frac{\mu_c Q}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3) d\theta \\
 M &= \frac{2}{3} \mu_c Q \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2} \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

Quando o contato se realiza sobre um círculo de raio R , a fórmula (8.8) se reduz a

$$M = \frac{2}{3} \mu_c QR \quad (8.9)$$

O valor de M é, então, o mesmo que seria obtido se o contato entre a árvore e o mancal se realizasse em um ponto único situado a uma distância $2R/3$ do eixo da árvore.

O maior momento que pode ser transmitido por um disco de embreagem, sem deslizamento, é dado por uma fórmula semelhante à Eq. (8.9), onde μ_c é substituído pelo coeficiente de atrito estático μ_e .

*** 8.9. Atrito em Rodas. Resistência ao Rolamento.** A roda é uma das invenções mais importantes de nossa civilização. Seu uso torna possível mover cargas pesadas com esforço relativamente pequeno. Em virtude do fato de o ponto da roda em contato com o solo, em qualquer instante, não se movimentar em relação ao apoio, a roda elimina as grandes forças de atrito que apareceriam se a carga estivesse em contato direto com o solo. Na prática, entretanto, a roda não é perfeita, existindo alguma resistência a seu movimento. Essa resistência tem duas causas diferentes. É devida (1) a um efeito combinado de atrito no eixo e atrito na borda e (2) ao fato de que a roda e o solo se deformam, daí resultando que o contato entre a roda e o solo se realiza, não em um ponto único, porém sobre uma certa área.

Para entender melhor a primeira causa da resistência ao movimento da roda, consideraremos um vagão de trem apoiado por oito rodas montadas em eixos e mancais. Supõe-se que o vagão se move para a direita, com velocidade constante, sobre um trilho

reto e horizontal. O diagrama de corpo livre de uma das rodas é ilustrado na Fig. 8.13a. As forças que agem no corpo livre incluem a carga P suportada pela roda e a reação normal N do trilho. Como P passa pelo centro O do eixo, a resistência ao atrito do mancal deve ser representada por um binário de momento M , de sentido anti-horário (ver Seção 8.7). Para manter o corpo livre em equilíbrio, devemos adicionar duas forças iguais e opostas, Q e F , que formam um binário de momento $-M$, de sentido horário. A força F é a força de atrito exercida pelo trilho sobre a roda, e Q representa a força que deveria ser aplicada à roda para mantê-la girando com velocidade constante. Observe-se que as forças Q e F não existiriam se não houvesse atrito entre a roda e o trilho. O momento M que resulta do atrito no eixo seria então nulo; a roda deslizaria sobre o trilho sem girar em seu mancal.

O momento M e as forças Q e F também se reduzem a zero quando não existe atrito no eixo. Por exemplo, uma roda que não está sustentada por mancais e rola livremente com velocidade constante sobre solo horizontal (Fig. 8.13b) estará submetida a apenas duas forças: seu peso próprio P e a reação normal N do solo. Nenhuma força de atrito agirá sobre a roda, independentemente do valor do coeficiente de atrito entre a roda e o solo. Uma roda rolando livremente sobre solo horizontal deveria permanecer assim indefinidamente.

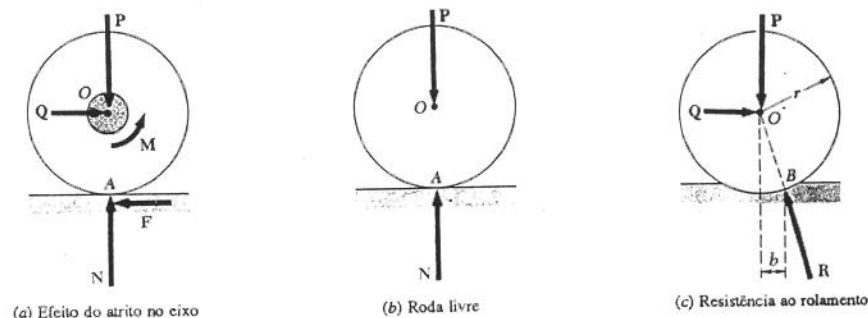


Figura 8.13

Entretanto, a experiência mostra que a roda terá uma velocidade decrescente e finalmente chegará ao repouso. Isto é devido ao segundo tipo de resistência mencionado no início desta seção, conhecida como *resistência ao rolamento*. Sob a ação do peso P , tanto a roda quanto o solo se deformam ligeiramente, fazendo com que o contato entre a roda se realize sobre uma certa superfície. A experiência mostra que a resultante das forças exercidas pelo solo sobre a roda nessa superfície é uma força R aplicada em um ponto B , que não está localizado diretamente sob o centro O da roda, porém um pouco à frente dele (Fig. 8.13c). Para equilibrar o momento de P em relação a B e manter a roda rolando à

velocidade constante, é necessário aplicar uma força horizontal Q no centro da roda. Escrevendo-se $\Sigma M_B = 0$, obtemos

$$Qr = Pb \quad (8.10)$$

onde r = raio da roda

b = projeção horizontal da distância O a B

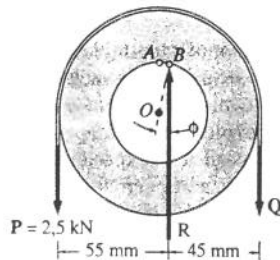
A distância b é comumente denominada *coeficiente de resistência ao rolamento*. Deve-se notar que b não é um coeficiente adimensional, visto que representa um comprimento; b é usualmente expresso em milímetros. O valor de b depende de vários parâmetros, de uma maneira que ainda não foi claramente estabelecida. Valores do coeficiente de resistência ao rolamento variam desde aproximadamente 0,25 mm, para uma roda de aço sobre um trilho também de aço, até 125 mm, para a mesma roda sobre chão macio.

Problema Resolvido 8.6

Uma polia de 100 mm de diâmetro pode girar em torno de um eixo fixo de 50 mm de diâmetro. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre a polia e o eixo são ambos supostos iguais a 0,20. Determinar: (a) a menor força vertical Q necessária para erguer uma carga de 2,5 kN, (b) a menor força vertical Q necessária para sustentar a carga e (c) a menor força horizontal Q necessária para erguer a mesma carga.

a) **Força Vertical Q Necessária para Erguer a Carga.** Quando as forças em ambas as partes da corda são iguais, o contato entre o eixo e a polia ocorre em A . Quando Q aumenta, a polia gira ligeiramente em torno do eixo, e o contato ocorre em B . Desenhamos o diagrama de corpo livre da polia quando o movimento é iminente. A distância do centro O da polia até a linha de ação de R é

$$r_a = r \sin \phi = r\mu \quad r_a = (25 \text{ mm}) 0,20 = 5,0 \text{ mm}$$



Somando os momentos em relação a B , escrevemos

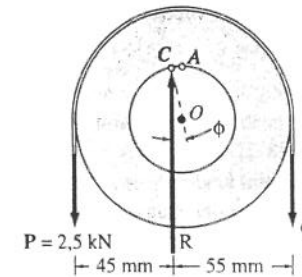
$$+ \curvearrowright \Sigma M_B = 0: \quad (55 \text{ mm})(2,5 \text{ kN}) - (45 \text{ mm})Q = 0$$

$$Q = 3,1 \text{ kN} \quad Q = 3,1 \text{ kN} \downarrow \leftarrow$$

b) **Força Vertical Q para Sustentar a Carga.** Quando a força Q decresce, a polia gira em torno do eixo e o contato ocorre em C . Considerando a polia como um corpo livre e somando os momentos em relação a C , escrevemos

$$+ \curvearrowright \Sigma M_C = 0: \quad (45 \text{ mm})(2,5 \text{ kN}) - (55 \text{ mm})Q = 0$$

$$Q = 2,0 \text{ kN} \quad Q = 2,0 \text{ kN} \downarrow \leftarrow$$



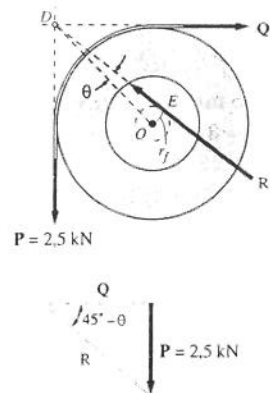
c) **Força Horizontal Q para Erguer a Carga.** Como as três forças P , Q e R não são paralelas, devem ser concorrentes. A direção de R é, então, determinada, já que sua linha de ação deve passar através do ponto de interseção D de P e Q e deve ser tangente ao círculo de atrito. Recordando que o raio do círculo de atrito é $r_a = 5,0 \text{ mm}$, escrevemos

$$\sin \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{5,0 \text{ mm}}{(50 \text{ mm}) \sqrt{2}} = 0,0707 \quad \theta = 4,1^\circ$$

Do triângulo de forças, obtemos

$$Q = P \cotg(45^\circ - \theta) = (2,5 \text{ kN}) \cotg 40,9^\circ =$$

$$= 2,9 \text{ kN} \quad Q = 2,9 \text{ kN} \rightarrow \leftarrow$$



Problemas

8.84 Um cadinho para metal fundido e seu conteúdo têm 60 Mg de massa. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre os ganchos e o eixo de suporte é 0,30, determine a tração no cabo AB necessária para iniciar o tombamento do cadinho.

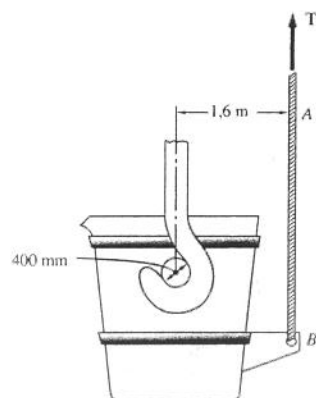


Figura P8.84

8.85 Uma alavanca de peso desprezível está encaixada frouxamente em um eixo fixo de 75 mm de diâmetro. Observa-se que a alavanca apenas inicia um movimento de rotação se uma massa de 2 kg é colocada em C. Determine o coeficiente de atrito estático entre o eixo e a alavanca.

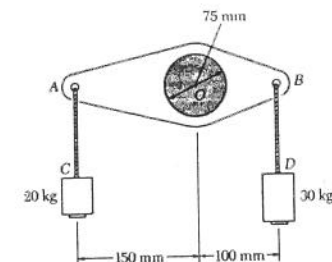


Figura P8.85

8.86 Um sarilho de 150 mm de diâmetro é utilizado para levantar ou abaixar uma carga de 500 N. Ele está apoiado em dois mancais pouco lubrificados ($\mu_e = 0,40$) que têm 50 mm de diâmetro. Determine o módulo da força F necessária para iniciar o levantamento da carga, para cada uma das duas posições ilustradas.

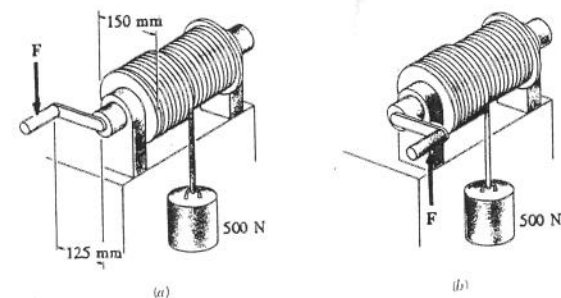


Figura P8.86

8.87 Para o sarilho do Prob. 8.86, em cada uma das duas posições ilustradas, determine o módulo da menor força F que mantém a carga no lugar.

8.88 Uma barra uniforme de 600 mm de comprimento é suportada por um eixo horizontal de 50 mm de diâmetro. O eixo está encaixado frouxamente em um furo circular feito na barra, sendo o coeficiente de atrito estático 0,40. Se $x = 150$ mm e o eixo é girado lentamente, determine o ângulo em que a barra começa a escorregar.

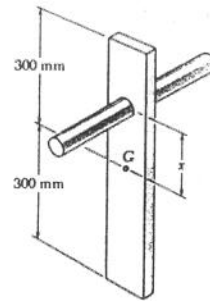


Figura P8.88

8.89 Para a barra do Prob. 8.88, determine o valor máximo de x para o qual a barra não escorregará quando o eixo for girado, lentamente, uma volta completa.

8.90 Uma bucha de 75 mm de diâmetro externo está encaixada frouxamente sobre um eixo de 50 mm de diâmetro. Se uma força F formando um ângulo de 30° com a horizontal e com 750 N de módulo é necessária para começar a erguer a carga de 500 N, determine o coeficiente de atrito estático entre o eixo e a bucha. Suponha que a corda não escorrega sobre a bucha.

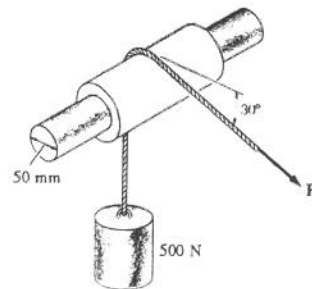


Figura P8.90

8.91 Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o eixo e a bucha do Prob. 8.90 é 0,30, determine o módulo da menor força F necessária para: (a) iniciar o levantamento da carga de 500 N e (b) manter a carga de 500 N no lugar.

8.92 Um vagão de trem carregado tem 30 Mg de massa e é suportado por oito rodas de 800 mm de diâmetro com eixos de 125 mm de diâmetro. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_e = 0,020$ e $\mu_c = 0,015$, calcule a força necessária para: (a) pôr o vagão em movimento e (b) mantê-lo em movimento com velocidade constante. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e os trilhos.

8.93 Um vagonete deve ser projetado para que possa descer uma rampa inclinada de 2% com velocidade constante. Supondo que o coeficiente de atrito cinético entre os eixos de 25 mm de diâmetro e os mancais é 0,10, determine o diâmetro necessário das rodas. Despreze a resistência ao rolamento entre as rodas e o solo.

8.94 Um momento de $100 \text{ N} \cdot \text{m}$ é necessário para iniciar a rotação do eixo vertical. Determine o coeficiente de atrito estático.

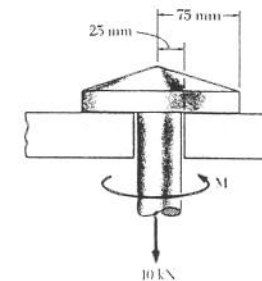
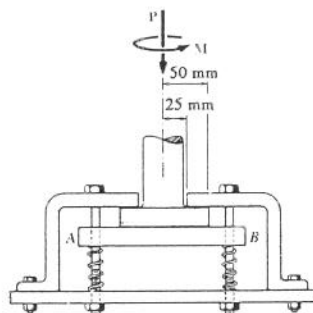
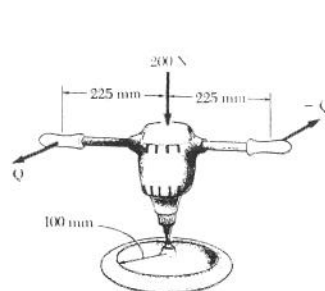


Figura P8.94

8.95 Uma força vertical de 200 N é aplicada a uma poltriz de 6 kg que opera sobre uma superfície horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,25, determine o módulo Q das forças necessárias para evitar a rotação dos cabos. Suponha que a força entre o disco e a superfície esteja uniformemente distribuída.

8.96 Quatro molas, cada uma com constante igual a 5,9 kN/m, são utilizadas para empurrar a placa AB contra o cabeçote da barra vertical. Na posição ilustrada, cada mola foi comprimida de 50 mm. A placa AB pode mover-se na direção vertical, mas não pode girar por causa de parafusos que passam por furos feitos nela. Sabendo que $P = 0$ e que o coeficiente de atrito é 0,30, determine o módulo do vetor-binário M necessário para girar a barra.



Figuras P8.95 e P8.96

8.97 No Prob. 8.96, determine o módulo da força P necessária para que a barra gire quando o módulo do vetor-binário M for $22,5 \text{ N} \cdot \text{m}$. Qual o valor do módulo da força P para que a barra gire mais facilmente?

* 8.98 Quando as superfícies de um mancal de escora e eixo se desgastam, a resistência ao atrito no mancal decresce. Em geral, supõe-se que o desgaste é diretamente proporcional à distância percorrida por um ponto qualquer da árvore e, portanto, à distância r do ponto ao eixo da árvore. Supondo, então, que a força normal por unidade de área é inversamente proporcional a r demonstre que o valor M do módulo do momento necessário para vencer a resistência ao atrito de um mancal terminal desgastado (em contato em toda a área circular) é igual a 75% do valor dado pela fórmula (8.9) para um mancal novo. *

* 8.99 Supondo que mancais com anel de escora se desgastem conforme indicado no Prob. 8.98, demonstre que o módulo M do momento necessário para vencer a resistência ao atrito de um mancal desgastado desse tipo é

$$M = \frac{1}{2} \mu_c P (R_1 + R_2)$$

* Para resolver esse problema, o estudante poderá calcular diretamente o momento de atrito de giro sobre a extremidade do eixo. Sobre o disco terminal de escora, a uma distância r do centro do eixo, a pressão é $p = k/r$ onde k é uma certa constante de proporcionalidade. A força normal em um elemento de área infinitesimal $dA = r d\theta dr$ é, pois, $dN = p dA = k d\theta dr$. A integral dessa força normal sobre toda a área deve ser igual à carga total Q axial aplicada ao eixo, isto é,

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R k d\theta dr = 2\pi k R$$

Logo, a constante k é dada por

$$k = \frac{Q}{2\pi R}$$

(continua)

onde

P = intensidade da força axial total

R_1, R_2 = raios interno e externo do colar.

* 8.100 Supondo que a pressão entre as superfícies em contato é uniforme, demonstre que o valor M do momento necessário para vencer a resistência ao atrito do pivô cônico ilustrado é

$$= \frac{2}{3} \frac{\mu_c P}{\sin \theta} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2^2 - R_1^2}$$

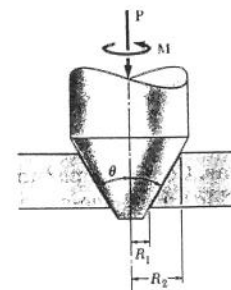


Figura P8.100

(continuação)

* A uma distância r , a força de atrito em uma área dA , que se opõe à rotação, é $dF = \mu_c dN = \mu_c p dA = \mu_c k d\theta dr$, e seu momento, em relação ao centro, é $dM = r dF = \mu_c k d\theta r dr$. O momento resistente total é, pois,

$$M' = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu_c k d\theta r dr = \mu_c \pi k R^2$$

Usando o valor já obtido para k , obtemos

$$M' = \frac{1}{2} \mu_c Q R$$

Comparando com o valor de M fornecido pela fórmula (8.9), vemos que

$$\frac{M'}{M} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

ou seja, M' é 75% de M . (Nota do R. T.)

8.101 Resolva o Prob. 8.95 supondo que entre o disco e a superfície a força normal por unidade de área varia linearmente desde um máximo no centro até zero na borda do disco.

8.102 Um disco circular de 150 mm de diâmetro rola com velocidade constante sobre um plano inclinado com 2% de declividade. Determine o coeficiente de resistência ao rolamento.

8.103 Determine a força horizontal necessária para mover um automóvel de 1 200 kg ao longo de uma estrada horizontal e a velocidade constante. Despreze todas as formas de atrito, exceto a resistência ao rolamento, supondo um coeficiente de 1,5 mm. O diâmetro de cada pneu é de 600 mm.

8.104 Resolva o Prob. 8.92, incluindo o efeito de um coeficiente de resistência ao rolamento de 0,50 mm.

8.105 Resolva o Prob. 8.93, incluindo o efeito de um coeficiente de resistência ao rolamento de 1,75 mm.

8.10. Atrito em Correias. Consideremos uma correia plana que passa sobre um tambor cilíndrico fixo (Fig. 8.14a). Propomo-nos a determinar a relação existente entre os valores T_1 e T_2 da tração nas duas partes da correia, quando esta estiver a ponto de deslizar para a direita.

Isolemos da correia um pequeno elemento PP' , subtendendo um ângulo $\Delta\theta$. Designando T a tração em P e $T + \Delta T$ a tração em P' , traçamos o diagrama de corpo livre do elemento da correia (Fig. 8.14b). Além das duas forças de tração, as forças que atuam no corpo livre são a componente normal ΔN da reação do tambor e a força de atrito ΔF . Como o movimento é suposto iminente, temos $\Delta F = \mu_e \Delta N$. Deve-se observar que se $\Delta\theta$ tende a zero, os módulos ΔN , ΔF e a diferença ΔT entre a tração em P e a tração em P' também tenderão a zero; o valor T da tração em P , no entanto, permanecerá inalterado. Essa observação auxilia o entendimento de nossa escolha de notações.

Escolhendo os eixos coordenados representados na Fig. 8.14b, escrevemos as equações de equilíbrio para o elemento PP' :

$$\Sigma F_x = 0: \quad (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_e \Delta N = 0 \quad (8.11)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Delta N - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} - T \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0 \quad (8.12)$$

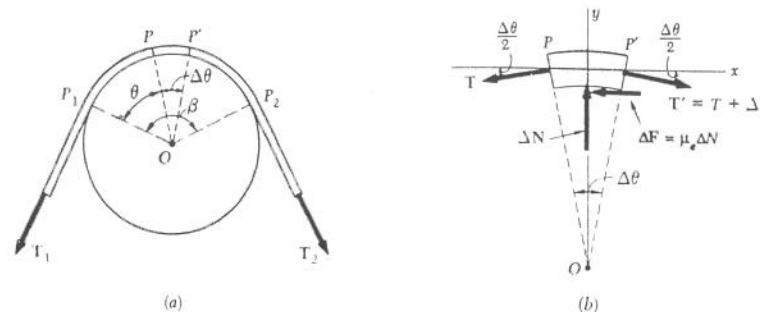


Figura 8.14

Resolvendo a Eq. (8.12) para ΔN e substituindo em (8.11), obtemos, após algumas simplificações,

$$\Delta T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_e (2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 0$$

Dividiremos agora ambos os termos por $\Delta\theta$; no que diz respeito ao primeiro termo, isto será feito simplesmente dividindo-se ΔT por $\Delta\theta$. A divisão do segundo termo é levada a efeito dividindo-se a expressão entre parênteses por 2 e o seno por $\Delta\theta/2$. Escrevemos:

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_e \left(T + \frac{\Delta T}{2} \right) \frac{\sin (\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 0$$

Se, agora, fizermos $\Delta\theta$ tender a zero, o co-seno tende a 1 e $\Delta T/2$ tende a zero, como observado acima. Por outro lado, o quociente de $\sin (\Delta\theta/2)$ por $\Delta\theta/2$ tende a 1, conforme se demonstra em todos os livros de Cálculo. Como o limite de $\Delta T/\Delta\theta$, é por definição, igual à derivada $dT/d\theta$, escrevemos

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu_e T = 0 \quad \frac{dT}{T} = \mu_e d\theta$$

Integramos, agora, ambos os membros da última equação, desde P_1 até P_2 (Fig. 8.14a). Em P_1 , temos $\theta = 0$ e $T = T_1$; em P_2 , temos $\theta = \beta$ e $T = T_2$. Integrando entre esses limites, escrevemos

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu_e d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu_e \beta$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_e \beta$$

(8.13)

Essa relação pode, também, ser escrita na forma

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_e \beta}$$

(8.14)

As fórmulas que deduzimos aplicam-se tanto a problemas que envolvem correias planas passando sobre tambores cilíndricos fixos quanto a problemas que envolvem cordas enroladas em postes ou cabrestantes. Podem, também, ser utilizadas para resolver problemas que envolvem freios de cinta. Em tais problemas, é o tambor que está a ponto de girar, enquanto a cinta permanece fixa. As fórmulas podem também ser aplicadas a problemas que envolvem correias de transmissão. Nesses problemas, tanto a polia quanto a correia giram; nosso objetivo é, então, decidir se a correia deslizará, isto é, se ela irá mover-se *em relação* à polia.

As fórmulas (8.13) e (8.14) devem ser usadas somente se a correia, corda ou freio estiverem *a ponto de deslizar*. A fórmula (8.14) será usada se T_1 ou T_2 for procurada; a fórmula (8.13) será preferida quando se quiser calcular μ_e ou o ângulo de contato α . Devemos observar que T_2 é sempre maior que T_1 ; T_2 representa, portanto, a tração na parte que *resiste*. Devemos, também, observar que o ângulo de contato β deve ser expresso em *radianos*. O ângulo β pode ser maior que 2π ; por exemplo, se uma corda é enrolada n vezes em torno de um poste, β é igual a $2\pi n$.

*Edmarksen,
Ferreira*

Se a correia, corda ou freio estão realmente deslizando, fórmulas semelhantes a (8.13) e (8.14), porém envolvendo o coeficiente de atrito cinético μ_c , devem ser usadas. Se a correia, corda ou freio não deslizam e não estão na iminência de deslizamento, nenhuma dessas fórmulas poderá ser usada.

As correias usadas em transmissão têm geralmente a forma em V. Uma tal correia, denominada *correia em V*, está ilustrada na Fig. 8.15a. Observa-se que o contato entre a correia e a polia se realiza ao longo dos lados do sulco. A relação existente entre os valores T_1 e T_2 da tração nas duas partes da correia, quando ela está a ponto de deslizar, pode, novamente, ser obtida desenhando-se o diagrama de corpo livre de um elemento da correia (Fig. 8.15b e c). Equações semelhantes a (8.11) e (8.12) são deduzidas. Entretanto, o módulo da força total de atrito no elemento é agora $2\Delta F$, e a soma das componentes y das forças normais é $2\Delta N \sin(\alpha/2)$.

Procedendo como acima, obtemos

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_e \beta / \sin(\alpha/2)} \quad (8.15)$$

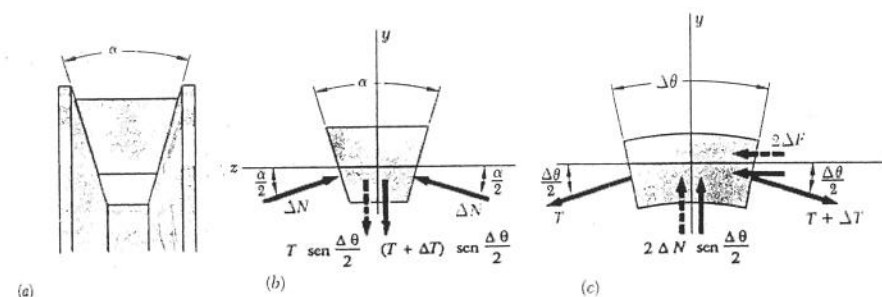
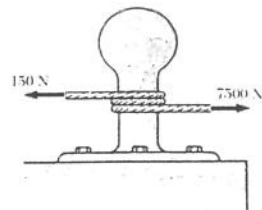


Figura 8.15

Problema Resolvido 8.7

Uma amarra, lançada de um navio para o cais, é enrolada duas voltas completas em torno de um cabrestante. A tração na amarra é 7 500 N; exercendo uma força de 150 N em sua extremidade livre, um estivador pode manter a amarra na

iminência do deslizamento. (a) Determinar o coeficiente de atrito entre a amarra e o cabrestante. (b) Determinar a tração na amarra que poderia ser suportada por uma força de 150 N, quando a amarra estivesse enrolada três voltas completas em torno do cabrestante.



a) **Coeficiente de Atrito.** Como o deslizamento da amarra é iminente, usamos a Eq. (8.13):

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_e \beta$$

Como a amarra está enrolada duas voltas completas em torno do cabrestante, temos

$$\beta = 2(2\pi \text{ rad}) = 12,6 \text{ rad}$$

$$T_1 = 150 \text{ N} \quad T_2 = 7500 \text{ N}$$

Portanto

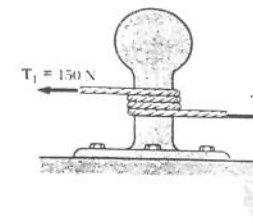
$$\mu_e \beta = \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\mu_e (12,6 \text{ rad}) = \ln \frac{7500 \text{ N}}{150 \text{ N}} = \ln 50 = 3,91 \quad \mu_e = 0,31 \leftarrow$$

b) **Amarra Enrolada Três Voltas em Torno do Cabrestante.** Usando o valor de μ_e obtido no item (a), temos

$$\beta = 3(2\pi \text{ rad}) = 18,9 \text{ rad}$$

$$T_1 = 150 \text{ N} \quad \mu_e = 0,31$$



Substituindo esses valores na Eq. (8.14), obtemos

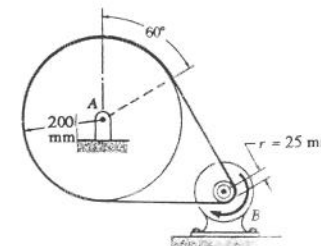
$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_e \beta}$$

$$\frac{T_2}{150 \text{ N}} = e^{(0,31)(18,9)} = e^{5,86} = 350$$

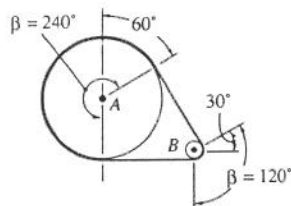
$$T_2 = 52,5 \times 10^3 \text{ N} \quad T_2 = 52,5 \text{ kN} \leftarrow$$

Problema Resolvido 8.8

Uma correia plana liga a polia A, que aciona uma máquina-ferramenta à polia B, que é acionada por um motor elétrico. Os coeficientes de atrito entre ambas as polias e a correia são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$. Sabendo que a maior tração permitida na correia é 3 000 N, determinar o maior torque que pode ser exercido pela correia na polia A.



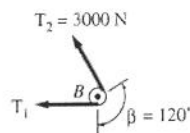
Solução. Como a resistência ao escorregamento depende do ângulo β de contato entre a polia e a correia e do coeficiente de atrito estático μ_e e sendo μ_e o mesmo para as duas polias, o escorregamento ocorrerá antes na polia β , para a qual β é menor.



Polia B. Utilizando a Eq. (8.14) com $T_1 = 3\,000\text{ N}$, $\mu_e = 0,25$ e $\beta = 120^\circ = 2\pi/3\text{ rad}$, escrevemos:

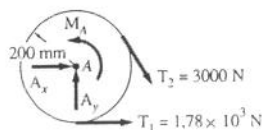
$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_e \beta} \quad \frac{3\,000\text{ N}}{T_1} = e^{0,25(2\pi/3)} = 1,69$$

$$T_1 = \frac{3\,000\text{ N}}{1,69} = 1,78 \times 10^3\text{ N}$$



Polia A. Traçamos o diagrama de corpo livre da polia A. O vetor-binário M_A é aplicado à polia pela máquina-ferramenta à qual ela está presa. M_A é igual, mas com sentido contrário, ao momento aplicado pela correia. Escrevemos:

$$\begin{aligned} + \circlearrowleft \Sigma M_A &= 0: & M_A - (3\,000\text{ N})(0,200\text{ m}) + (1,78 \times 10^3\text{ N})(0,200\text{ m}) &= 0 \\ & & M_A &= 244\text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



Nota. Podemos verificar que a correia não escorrega na polia A calculando o valor de μ_e necessário para evitar o escorregamento em A e verificando se ele é menor que o valor real de μ_e . Da Eq. (8.13) temos:

$$\mu_e \beta = \ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \frac{3\,000\text{ N}}{1,78 \times 10^3\text{ N}} = 0,522$$

e, sendo $\beta = 240^\circ = 4\pi/3\text{ rad}$,

$$\frac{4\pi}{3} \mu_e = 0,522 \quad \mu_e = 0,125 < 0,25$$

Problemas

8.106 Uma amarra está enrolada duas voltas completas em torno de um cabrestante. Aplicando uma força de 800 N na ponta livre da amarra, um marinheiro pode resistir a uma força de 60 kN aplicada na outra ponta da amarra. Determine: (a) o coeficiente de atrito estático e (b) o número de voltas da amarra no cabrestante para que a mesma força de 800 N resista a uma força de 200 kN.

8.107 Uma corda com densidade linear de 0,8 kg/m está enrolada 2 1/2 voltas em torno de uma barra horizontal. Que comprimento mínimo x da corda deve ser deixado pendente para que uma carga de 50 kg seja suportada?

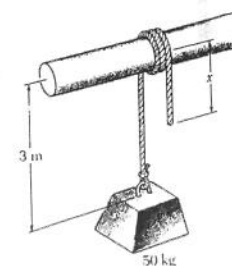


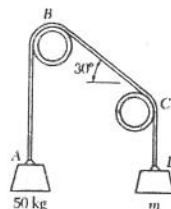
Figura P8.107

8.108 Suponha que a bucha do Prob. 8.90 esteja colada ao eixo e não possa girar sobre ele. Determine o coeficiente de atrito estático entre a bucha e a corda se uma força F de 750 N é necessária para começar a erguer uma carga de 500 N.

8.109 Suponha que a bucha do Prob. 8.90 esteja colada ao eixo e não possa girar sobre ele. Se o coeficiente de atrito estático entre a bucha e a corda é 0,30, determine o módulo da menor força F necessária para: (a) iniciar o levantamento da carga de 500 N e (b) manter a carga de 500 N no lugar.

8.110 Uma corda $ABCD$ está apoiada em dois canos, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,25, determine: (a) o menor valor da massa m para o qual o equilíbrio é possível e (b) a correspondente tração na parte BC da corda.

8.111 Uma corda $ABCD$ está apoiada em dois canos, como mostra a figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,25, determine: (a) o maior valor da massa m para o qual o equilíbrio é possível e (b) a correspondente tração na parte BC da corda.

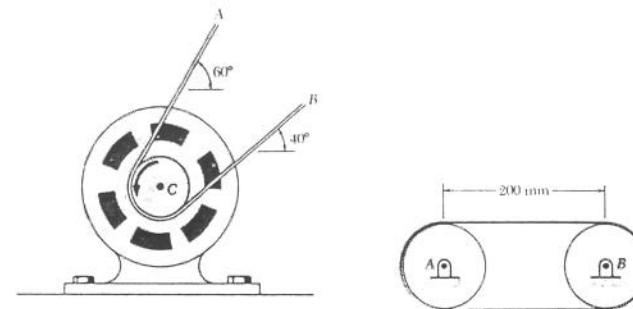


Figuras P8.110 e P8.111

8.112 Uma correia plana é utilizada para transmitir um momento de $37,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ produzido por um motor elétrico. O tambor em contato com a correia tem 150 mm de diâmetro, sendo 0,30 o coeficiente de atrito estático entre a correia e o tambor. Sabendo que a correia não deve escorregar, determine o menor valor possível para a tração em cada parte da correia.

8.113 Uma correia plana é utilizada para transmitir momento da polia A para a polia B. O raio de cada polia é 50 mm, e o coeficiente de atrito estático é 0,30. Determine o maior momento que pode ser transmitido se a tração máxima é 3 kN.

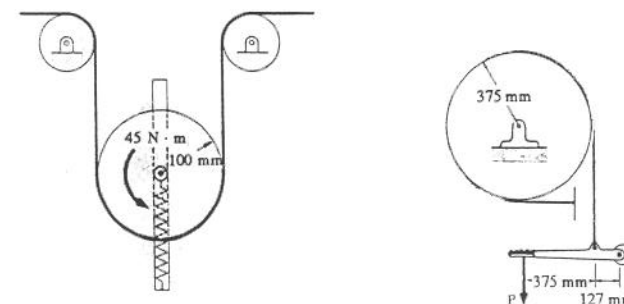
8.114 Resolva o Prob. 8.113 supondo que a correia esteja colocada nas polias na forma de um 8.



Figuras P8.112 e P8.113

8.115 Uma correia plana passa sobre duas polias intermediárias e sob um tambor rotativo de 200 mm de diâmetro. O eixo do tambor tem liberdade para mover-se verticalmente em uma fenda, e uma mola mantém o tambor em contato com a correia. Qual a mínima força que deve ser exercida pela mola para que não ocorra deslizamento quando um momento de $45 \text{ N} \cdot \text{m}$ for aplicado ao tambor? O coeficiente de atrito estático entre a correia e o tambor é 0,25.

8.116 Um freio de cinta é utilizado para controlar a velocidade de um volante, conforme mostra a figura. Os coeficientes de atrito são $\mu_e = 0,30$ e $\mu_c = 0,25$. Que momento deve ser aplicado ao volante para mantê-lo girando, no sentido horário, com velocidade angular constante quando $P = 50 \text{ N}$?



Figuras P8.115 e P8.116

8.117 Resolva o Prob. 8.116 supondo que o volante gira no sentido anti-horário.

8.118 A montagem ilustrada é utilizada para medir a potência útil de uma pequena turbina. O coeficiente de atrito cinético é 0,15. Quando o volante está em repouso, cada balança de mola indica 75 N. Qual a indicação de cada balança quando o volante gira no sentido horário? Suponha que o comprimento da correia seja constante.

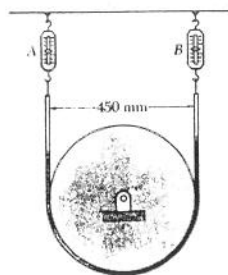
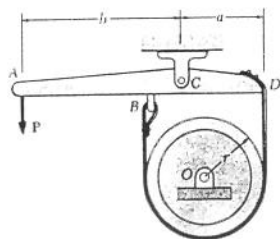


Figura P8.118

8.119 Um tambor de freio de raio $r = 125$ mm está girando no sentido anti-horário quando uma força P de 50 N é aplicada em A. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,40, determine o momento em relação a O das forças de atrito aplicadas ao tambor quando $a = 200$ mm e $b = 250$ mm.

8.120 Sabendo que $r = 125$ mm e $a = 200$ mm, determine o valor máximo do coeficiente de atrito cinético para o qual o freio não é autobloqueante quando o tambor gira no sentido anti-horário.

8.121 Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,40, determine o valor mínimo da razão a/r para o qual o freio não é autobloqueante. Suponha que $a > r$ e que o tambor gire no sentido anti-horário.



Figuras P8.119, P8.120 e P8.121

8.122 Um cabo está colocado em torno de três tubos, cada um com 100 mm de diâmetro externo, localizados no mesmo plano horizontal. Dois dos tubos estão fixos e, portanto, não giram; o terceiro tubo é girado lentamente. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_e = 0,30$ e $\mu_c = 0,25$ para cada tubo, determine o maior peso P que pode ser erguido se apenas pode ser girado o tubo: (a) A, (b) B e (c) C.

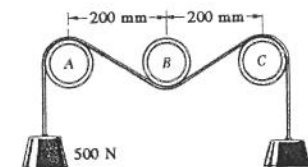


Figura P8.122

8.123 Um cordel é colocado sobre dois cilindros, com 75 mm de diâmetro cada. Os coeficientes de atrito são $\mu_e = 0,25$ e $\mu_c = 0,20$. Determine o maior peso P que pode ser erguido quando o cilindro B é girado lentamente enquanto o cilindro A permanece fixo.

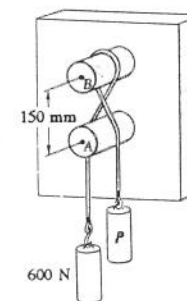
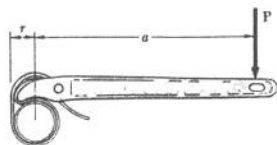


Figura P8.123

8.124 A chave de cinta ilustrada é utilizada para abraçar firmemente um tubo sem danificar sua superfície externa. Sabendo que $a = 250$ mm e $r = 50$ mm, determine o menor coeficiente de atrito para o qual a chave será autotravante.

8.125 Sendo μ_e o coeficiente de atrito estático entre a cinta e o tubo, determine o valor mínimo da razão a/r para o qual a chave de cinta será autotravante.



Figuras P8.124 e P8.125

8.126 Prove que as Eqs. (8.13) e (8.14) são válidas qualquer que seja a forma da superfície, desde que o coeficiente de atrito seja o mesmo em todos os pontos de contato.

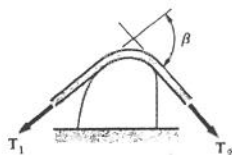


Figura P8.126

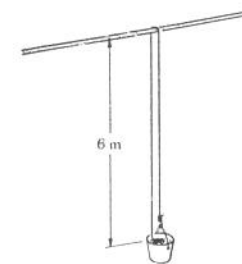
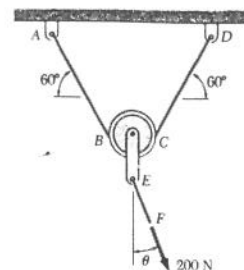
8.127 Complete a dedução da Eq. (8.15) que relaciona a tração nas duas partes de uma correia em V.

8.128 Resolva o Prob. 8.112 substituindo a correia plana e a polia por uma correia em V e uma polia em V com $\alpha = 28^\circ$. (O ângulo α é mostrado na Fig. 8.15a.)

Problemas de Recapitulação

8.129 O eixo de uma polia ficou grudado nela e não pode girar. O coeficiente de atrito estático entre o cabo ABCD e a polia é 0,30. Determine: (a) o maior valor de θ compatível com o equilíbrio e (b) as reações correspondentes em A e D. (Suponha que os segmentos retilíneos do cabo encontram-se no ponto E.)

8.130 Uma corda de 15 m passa sobre um pequeno eixo horizontal; uma extremidade da corda está amarrada a um balde de 2,4 kg, sendo que o excesso de corda está enrolado dentro do balde. O coeficiente de atrito estático entre a corda e o eixo é 0,30, e a corda tem densidade linear de massa 0,80 kg/m. Se o eixo é girado lentamente, determine até onde o balde pode: (a) ser içado antes que a corda deslize sobre o eixo e (b) ser abaixado antes que ocorra deslizamento.



Figuras P8.129 e P8.130

8.131 A placa ABCD de 250 N está presa a colares, em A e D, que podem deslizar sobre uma barra vertical. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre os colares e a barra é 0,40, determine se a placa está em equilíbrio na posição ilustrada quando a força vertical aplicada em E tem módulo: (a) $F = 0$ e (b) $F = 100$ N.

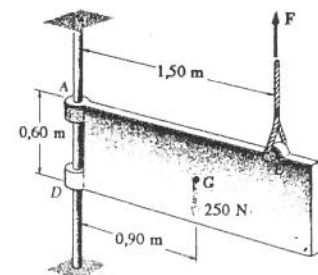
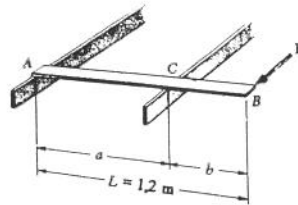


Figura P8.131

8.132 No Prob. 8.131, determine o intervalo de valores do módulo F , da força vertical aplicada em E, para os quais a placa movimenta-se para baixo.

8.133 Sabendo que o coeficiente de atrito entre os sarrafos e a tábua AB é 0,30, determine a menor distância a para a qual a tábua deslizará em C.

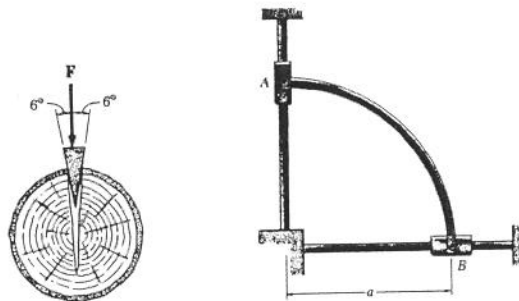
8.134 Uma tábua de 1,20 m e de 3 kg de massa está apoiada em dois sarrafos. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a tábua e os sarrafos é 0,30, determine o módulo da força horizontal necessária para mover a tábua quando: (a) $a = 750$ mm e (b) $a = 900$ mm.



Figuras P8.133 e P8.134

8.135 Uma cunha de 12° é utilizada para rachar uma tora. O coeficiente de atrito entre a cunha e a madeira é 0,35. Sabendo que uma força F de 2,50 kN de módulo foi necessária para cravar a cunha, determine o módulo das forças exercidas pela tora na cunha depois que ela foi cravada.

8.136 A barra uniforme AB de raio a e peso P está articulada a colares, em A e B, que podem deslizar sobre as hastes ilustradas. O coeficiente de atrito estático entre as hastes e os colares é μ_e . Determine o menor valor de μ_e para que a barra permaneça em equilíbrio na posição ilustrada.



Figuras P8.135 e P8.136

8.137 A figura mostra dois blocos, A e B, ligados por um cabo. Desprezando o atrito nas polias e sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as outras superfícies em contato é 0,30, determine o módulo F da menor força necessária para movimentar os blocos.

8.138 Resolva o Prob. 8.137 supondo que a força F é aplicada ao bloco B seja horizontal e aponte para a direita.

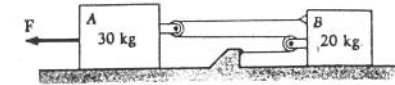
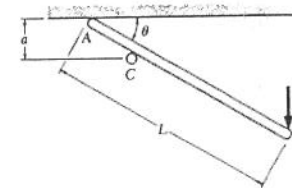


Figura P8.137

8.139 Uma barra delgada de comprimento L , que está apoiada no pino C e no teto horizontal, suporta uma carga P em sua extremidade B. Sabendo que $\theta = 30^\circ$ e que o coeficiente de atrito estático é 0,30 para A e C, encontre a amplitude dos valores da razão L/a para o qual o equilíbrio é mantido.

8.140 Uma barra delgada de comprimento L , que está apoiada no pino C e no teto horizontal, suporta uma carga P em sua extremidade B. Sabendo que $L = 8a$, $\theta = 15^\circ$ e que os coeficientes de atrito são $\mu_e = 0,60$ e $\mu_c = 0,50$ em A e ambos nulos em C, verifique se a barra está em equilíbrio e calcule o valor da força de atrito em A.



Figuras P8.139 e P8.140

Recapitulação e Sumário

Este capítulo foi dedicado ao estudo do *atrito seco*, isto é, a problemas envolvendo corpos rígidos que estão em contato com *superfícies não lubrificadas*.

Atrito estático e atrito cinético

Considerando um bloco apoiado sobre uma superfície horizontal [Seção 8.2] e aplicando a ele uma força horizontal Q , nota-se que inicialmente o bloco não se move. Isto indica que deve haver uma *força de atrito* F para equilibrar Q (Fig. 8.16). A medida que aumenta o módulo de Q também aumenta o módulo de F até atingir um valor máximo F_m . Se o módulo de Q é aumentado, ainda, o bloco começa a deslizar e o módulo

de F diminui de F_m para um valor menor F_c . A experiência mostra que F_m e F_c são proporcionais à componente normal N da reação da superfície. Temos

$$F_m = \mu_e N \quad F_c = \mu_c N \quad (8.1, 8.2)$$

onde μ_e e μ_c são, respectivamente, os coeficientes de atrito estático e cinético. Estes coeficientes dependem da natureza e da condição das superfícies em contato. Valores aproximados dos coeficientes de atrito estático constam da Tabela 8.1.

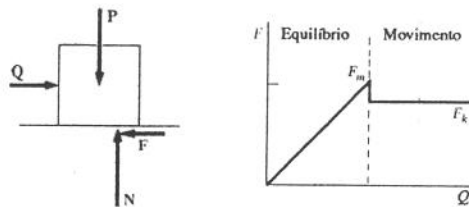


Figura 8.16

Ângulos de atrito

Às vezes é conveniente substituir a força normal N e a força de atrito F pela sua resultante R (Fig. 8.17). À medida que a força de atrito estático aumenta e atinge seu valor máximo $F_m = \mu_e N$, o ângulo ϕ que R forma com a normal à superfície aumenta e atinge um valor máximo ϕ_e , denominado *ângulo de atrito estático*. Se há movimento o módulo de F diminui para o valor F_c , de maneira análoga ϕ diminui para um valor menor ϕ_c denominado *ângulo de atrito cinético*. Na Seção 8.3 viu-se que

$$\operatorname{tg} \phi_e = \mu_e \quad \operatorname{tg} \phi_c = \mu_c \quad (8.3, 8.4)$$

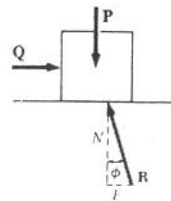


Figura 8.17

Problemas envolvendo atrito

Quando se resolvem problemas de equilíbrio envolvendo atrito é necessário ter presente que o módulo F da força de atrito é igual a $F_m = \mu_e N$ somente se o corpo está na iminência de deslizar [Seção 8.4]. Se o movimento não é iminente, F e N devem ser consideradas incógnitas independentes a determinar pelas condições de equilíbrio (Fig. 8.18 a). Deve-se também verificar se o valor de F necessário para o equilíbrio não é maior do que F_m ; se for, o corpo se movimentará e a força de atrito terá módulo igual a $F_c = \mu_c N$ [Problema Resolvido 8.1]. Se é sabido que o movimento é iminente, então F atingiu seu valor máximo $F_m = \mu_e N$ (Fig. 8.18 b) que deve substituir F nas equações de equilíbrio [Problema Resolvido 8.3]. Quando há apenas três forças no diagrama de corpo livre, incluindo a reação R da superfície em contato com o corpo, é, frequentemente, mais conveniente resolver o problema desenhando o triângulo de forças [Problema Resolvido 8.2].

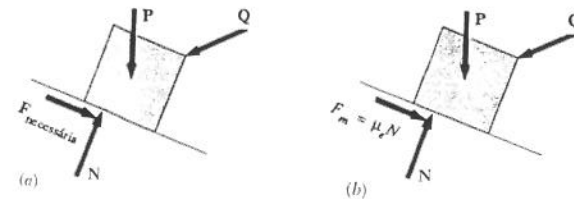


Figura 8.18

Quando um problema envolve a análise de forças mútuas exercidas por dois corpos A e B é importante indicar as forças de atrito com seus sentidos corretos. O sentido correto da força de atrito exercida por B sobre A , por exemplo, é contrário ao movimento (ou movimento iminente) de A em relação a B [Fig. 8.6 da Seção 8.4].

Cunhas e parafusos

Na segunda parte do capítulo consideramos algumas aplicações específicas à engenharia nas quais o atrito seco tem um papel importante. No caso de *cunhas*, que são máquinas simples usadas para levantar cargas pesadas [Seção 8.5], desenharam-se dois ou mais diagramas de corpo livre e cada força de atrito foi cuidadosamente indicada com o seu sentido correto [Problema Resolvido 8.4]. Os *parafusos de rosca quadrada*, frequentemente utilizados em macacos, prensas e outros mecanismos, foram analisados reduzindo-se o problema ao de um corpo que desliza sobre um plano inclinado. Isto foi

conseguido desenvolvendo-se a rosca do parafuso até obter uma linha reta [Seção 8.6]. Isto é novamente apresentado na Fig. 8.19, onde r é o *raio médio* da rosca; L o *avanço* do parafuso, isto é, a distância que o parafuso avança em uma volta; P a carga e Qr é o momento aplicado ao parafuso. Foi observado que no caso de parafusos de rosca múltiplas; o avanço L do parafuso *não* é igual ao passo que é a distância medida entre duas rosca consecutivas.

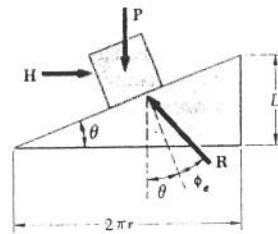


Figura 8.19

Outras aplicações

Outras aplicações à engenharia consideradas neste capítulo foram: *mancais de deslizamento e atrito em eixos* [Seção 8.7], *mancais de escora e atrito de giro* [Seção 8.8], *atrito em rodas e resistência ao rolamento* [Seção 8.9] e *atrito em correias* [Seção 8.10].

Ao resolver um problema envolvendo uma *correia plana* que passa sobre um cilindro, é importante determinar inicialmente para que lado a correia escorrega ou está prestes a escorregar. Se o cilindro está girando, o movimento, ou movimento iminente, da correia deve ser determinado em relação ao cilindro girante. Por exemplo, se a correia da Fig. 8.20 está na iminência de escorregar para a direita em relação ao cilindro, as forças de atrito exercidas pelo cilindro sobre a correia apontam para a esquerda fazendo com que a tração seja maior na parte direita da correia. Sendo T_2 a tração maior, T_1 a menor, μ_e o coeficiente de atrito estático e β o ângulo (em radianos) subtendido pela correia, na Seção 8.10 foram deduzidas as expressões

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_e \beta \quad (8.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_e \beta} \quad (8.14)$$

que foram utilizadas na resolução dos Problemas Resolvidos 8.7 e 8.8. Se a correia efetivamente deslizar sobre o cilindro, o coeficiente de atrito estático μ_e deve ser substituído pelo coeficiente de atrito cinético μ_c nas duas expressões anteriores.

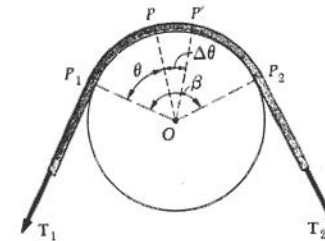


Figura 8.20

Capítulo 9

Forças Distribuídas: Momentos de Inércia

9.1. Introdução. No Cap. 5 analisamos vários sistemas de forças distribuídas sobre superfícies ou sólidos. Os três principais tipos de força que consideramos foram: 1) pesos de placas homogêneas de espessura uniforme (Seções 5.3 a 5.6), 2) cargas distribuídas em vigas e forças hidrostáticas (Seções 5.8 e 5.9) e 3) pesos de corpos homogêneos tridimensionais (Seções 5.10 e 5.11). No caso de placas homogêneas, o módulo ΔP do peso de um elemento de placa era proporcional à área ΔA do elemento. No caso de cargas distribuídas em vigas, o módulo ΔP de cada peso elementar era representado por um elemento de área $\Delta A = \Delta P$ sob a curva de carregamento; no caso de forças hidrostáticas que atuam sobre superfícies retangulares submersas, foi seguido um procedimento semelhante. No caso de corpos homogêneos tridimensionais, o módulo ΔP do peso de um elemento do corpo era proporcional ao volume ΔV do elemento. Assim, em todos os casos considerados no Cap. 5, as forças distribuídas eram proporcionais às áreas ou volumes elementares a elas associados. A resultante dessas forças pode, pois, ser obtida somando-se as correspondentes áreas e volumes, e o momento da resultante em relação a qualquer eixo dado pode ser determinado calculando os momentos de primeira ordem das superfícies em relação àquele eixo.

Na primeira parte deste capítulo consideraremos forças distribuídas ΔF cujos módulos dependem da área ΔA do elemento de superfície em que atuam e da distância desse elemento a um dado eixo. Mais precisamente, o módulo da força por unidade de área, $\Delta F/\Delta A$, variará linearmente com a distância ao eixo. Como veremos na próxima seção, forças desse tipo são encontradas no estudo da flexão de vigas e em problemas que envolvem superfícies submersas não-retangulares. Supondo que as forças elementares estejam distribuídas sobre uma superfície de área A e que variem linearmente com a distância y ao eixo x , verificaremos que, embora o módulo da resultante R dependa do momento de primeira ordem $Q_x = \int y dA$ da superfície de área A , a localização do ponto de aplicação de R depende do momento de segunda ordem ou momento de inércia,

$I_x = \int y^2 dA$, da mesma superfície, com relação ao eixo x . Aprenderemos a calcular os momentos de inércia de várias superfícies com relação a eixos x e y dados. Definiremos o momento de inércia polar, $J_O = \int r^2 dA$, de uma superfície, sendo r a distância do elemento de área dA ao ponto O . Para facilitar os cálculos vamos estabelecer uma relação entre o momento de inércia I_x de uma superfície de área A com relação a um eixo x dado e seu momento de inércia $I_{x'}$ com relação a um eixo paralelo x' que passa pelo centróide (teorema dos eixos paralelos). Estudaremos ainda a transformação dos momentos de inércia de uma dada superfície pela rotação dos eixos coordenados (Seções 9.9 e 9.10).

Na segunda parte do capítulo calcularemos os momentos de inércia de vários corpos com relação a um eixo dado. Veremos na Seção 9.11 que o momento de inércia de um dado corpo em relação a um eixo AA' é definido pela integral $T = \int r^2 dm$, onde r é a distância do eixo AA' ao elemento do corpo de massa dm . Momentos de inércia de corpos são encontrados em Dinâmica em problemas que envolvem a rotação de um corpo rígido. Para facilitar o cálculo de momentos de inércia de corpos, demonstraremos o teorema dos eixos paralelos (Seção 9.12) e analisaremos a transformação dos momentos de inércia pela rotação dos eixos coordenados (Seções 9.16 e 9.17).

Momentos de Inércia de Superfícies*

9.2. Momentos de Segunda Ordem ou Momento de Inércia de uma Superfície. Na primeira parte deste capítulo consideraremos forças distribuídas ΔF de módulo ΔF proporcional ao elemento de área ΔA na qual elas agem e que variam linearmente com a distância de ΔA a um certo eixo polar.

Consideremos, por exemplo, uma viga de seção reta uniforme, submetida a dois binários iguais e opostos, aplicados a cada extremidade da viga. Diz-se que tal viga está em *flexão pura* e demonstra-se em Resistência dos Materiais que as forças internas em qualquer seção da viga são forças distribuídas, cujos módulos $\Delta F = ky\Delta A$ variam linearmente com a distância y a partir de um eixo passando pelo centróide da seção. Esse eixo, representado pelo eixo x na Fig. 9.1, é conhecido como *eixo neutro* da seção. As forças de um lado do eixo neutro são forças de compressão e, do outro lado, forças de tração; no eixo neutro, as forças são nulas.

O módulo da resultante R das forças elementares ΔF sobre a seção inteira é

$$R = \int ky dA = k \int y dA$$

* No presente capítulo, o nome *superfície* aplica-se a *superfícies planas*, salvo indicação em contrário. (N. do R. T.)

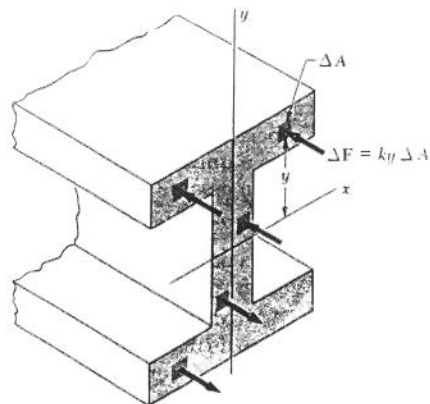


Figura 9.1

A última integral obtida é conhecida como o *momento de primeira ordem* Q_x da seção em relação ao eixo x ; é igual a $\bar{y}A$ e é nula, visto que o centróide da seção está localizado sobre o eixo x . Assim, o sistema de forças ΔF reduz-se a um binário. O módulo M desse binário (momento fletor) deve ser igual à soma dos momentos $\Delta M_x = y \Delta F = k y^2 \Delta A$ das forças elementares. Integrando sobre a seção inteira, obtemos;

$$M = \int k y^2 dA = k \int y^2 dA$$

A última integral é conhecida como *momento de segunda ordem* ou *momento de inércia** da seção da viga em relação ao eixo x e é representada por I_x . É obtida multiplicando-se cada elemento de área dA pelo *quadrado de sua distância* ao eixo x e integrando sobre a seção da viga. Como cada produto $y^2 dA$ é positivo, seja y positivo ou negativo (ou zero, se y for zero), a integral I_x será sempre positiva.

Outro exemplo de momento de segunda ordem ou momento de inércia de uma superfície é dado pelo seguinte problema de hidrostática: uma comporta circular vertical, usada para fechar a saída de um grande reservatório, está submersa na água, como ilustrado na Fig. 9.2. Qual a resultante das forças exercidas pela água sobre a comporta e qual o momento da resultante em relação à linha de interseção do plano da comporta com a superfície da água (eixo x)?

* A expressão momento de segunda ordem é mais apropriada que momento de inércia, uma vez que a última deveria ser usada somente para designar integrais de massa (ver Seção 9.11). No entanto, na prática comum da Engenharia, momento de inércia é usado tanto para áreas quanto para massas.

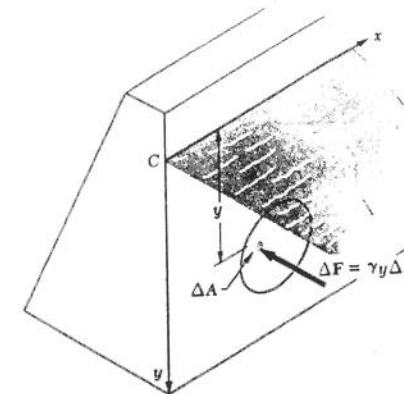


Figura 9.2

Se a comporta fosse retangular, a resultante das forças de pressão poderia ser determinada a partir da curva de pressão, como foi feito na Seção 5.9. Entretanto, como a comporta é circular, um método mais geral deve ser usado. Seja y a profundidade de um elemento da área ΔA e γ o peso específico da água; a pressão no elemento é $p = \gamma y$, e o módulo da força elementar exercida sobre o elemento de área ΔA é $\Delta F = p \Delta A = \gamma y \Delta A$. O módulo da resultante das forças elementares é, então,

$$R = \int \gamma y dA = \gamma \int y dA$$

e pode ser obtido calculando-se o momento de primeira ordem da superfície da comporta em relação ao eixo x . O momento M_x da resultante deve ser igual à soma dos momentos $\Delta M_x = y \Delta F = \gamma y^2 \Delta A$ das forças elementares. Integrando sobre a área da comporta, temos

$$M_x = \int \gamma y^2 dA = \gamma \int y^2 dA$$

Aqui, novamente, a integral obtida representa o momento de segunda ordem ou momento de inércia I_x da superfície em relação ao eixo x .

9.3. Determinação do Momento de Inércia de uma Superfície por Integração. Definimos, na seção precedente, o momento de segunda ordem ou momento

de inércia de uma superfície de área A em relação a um eixo x . Definindo de modo semelhante o momento de inércia I_y de uma superfície de área A em relação ao eixo y , escrevemos (Fig. 9.3a):

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (9.1)$$

Essas integrais, conhecidas como os *momentos axiais de inércia* da superfície de área A , podem ser facilmente calculadas se escolhermos para dA uma faixa estreita, paralela a um dos eixos coordenados. Para calcular I_x , é escolhida a faixa paralela ao eixo x , de tal forma que todos os pontos que formam a faixa estejam à mesma distância y do eixo x (Fig. 9.3b); o momento de inércia dI_x da faixa é então obtido multiplicando-se a área dA da faixa por y^2 . Para calcular I_y , é escolhida a faixa paralela ao eixo y , de tal forma que todos os pontos fiquem à mesma distância x do eixo y (Fig. 9.3c); o momento de inércia dI_y da faixa é $x^2 dA$.

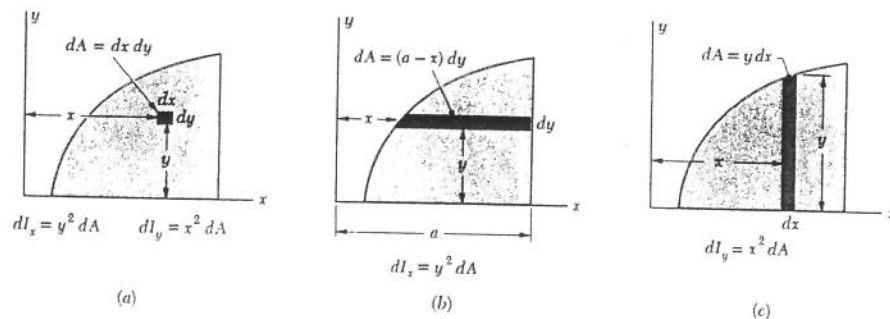


Figura 9.3

Momento de Inércia de uma Superfície Retangular. Como exemplo, determinaremos o momento de inércia de um retângulo em relação a sua base (Fig. 9.4). Dividindo o retângulo em faixas paralelas ao eixo x , obtemos

$$dA = b dy \quad dI_x = y^2 b dy \quad I_x = \int_0^h by^2 dy = \frac{1}{3} bh^3 \quad (9.2)$$

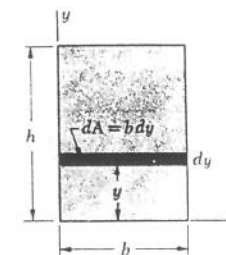


Figura 9.4

Cálculo de I_x e I_y a partir da mesma Faixa Elementar. A fórmula que acabamos de deduzir pode ser usada para determinar o momento de inércia dI_x em relação ao eixo x de uma faixa retangular paralela ao eixo y , semelhante à representada na Fig. 9.3. Fazendo $b = dx$ e $h = y$ na fórmula (9.2), escrevemos

$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx$$

Por outro lado, temos

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y dx$$

O mesmo elemento pode, assim, ser utilizado para calcular os momentos de inércia I_x e I_y de uma dada superfície (Fig. 9.5).

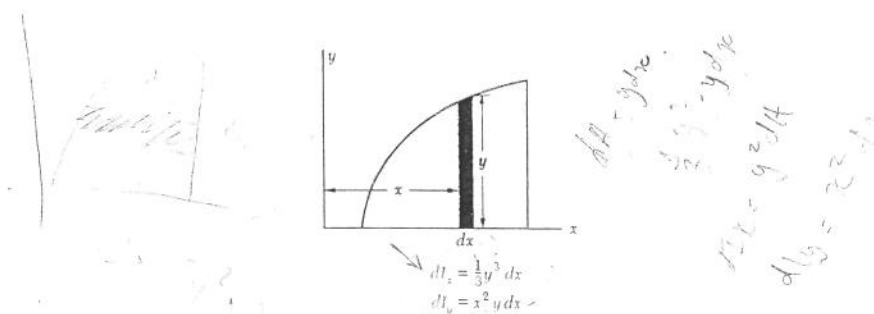


Figura 9.5

9.4. Momento Polar de Inércia. Uma integral de grande importância, em problemas relativos à torção de eixos cilíndricos e em problemas referentes à rotação de placas, é

$$J_0 = \int r^2 dA \quad (9.3)$$

onde r é a distância do elemento de área dA ao pólo O (Fig. 9.6). Essa integral é o *momento polar de inércia* da superfície de área A em relação a O .

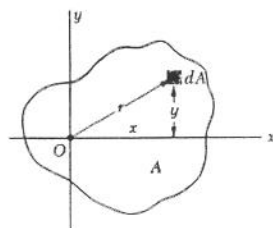


Figura 9.6

O momento polar de inércia de uma dada superfície pode ser calculado a partir de seus momentos axiais de inércia I_x e I_y , se essas integrais já forem conhecidas. Com efeito, observando que $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos

$$J_0 = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA$$

isto é,

$$J_0 = I_x + I_y \quad (9.4)$$

9.5. Raio de Giração de uma Superfície. Consideremos uma superfície de área A , que tem um momento de inércia I_x em relação ao eixo x (Fig. 9.7a). Imaginemos

que concentramos esta área em uma faixa estreita, paralela ao eixo x (Fig. 9.7b). Se a área A , assim concentrada, deve ter o mesmo momento de inércia em relação ao eixo x , a faixa deve estar colocada a uma distância k_x desse eixo, definida pela relação

$$I_x = k_x^2 A$$

Resolvendo para k_x , obtemos

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (9.5)$$

A distância k_x é denominada *raio de giração** da superfície em relação ao eixo x . Podemos definir de modo semelhante os raios de giração k_y e k_0 (Fig. 9.7c e d), escrevendo

$$I_y = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (9.6)$$

$$J_0 = k_0^2 A \quad k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}} \quad (9.7)$$

Substituindo J_0 , I_x e I_y em função dos raios de giração na relação (9.4), observamos que

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (9.8)$$

Exemplo. Calculemos, como exemplo, o raio de giração k_x do retângulo ilustrado na Fig. 9.8. Usando as fórmulas (9.5) e (9.2), obtemos

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{3}bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \quad k_x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

* O raio de giração é também chamado comumente de *raio de inércia*. (N. do R. T.)

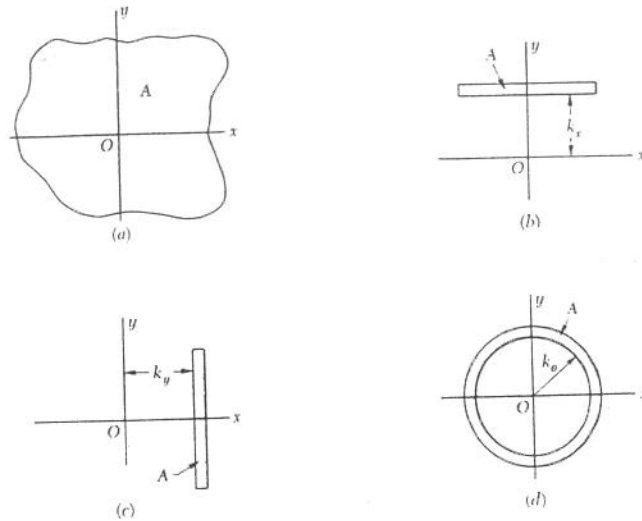


Figura 9.7

O raio de giração k_x do retângulo está representado na Fig. 9.8. Não deve ser confundido com a ordenada $\bar{y} = h/2$ do centróide da área. Enquanto k_x depende do momento de segunda ordem ou momento de inércia da superfície, a ordenada $\bar{y}$ está relacionada com o momento de primeira ordem da superfície.

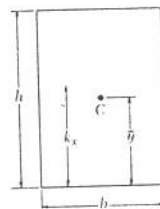


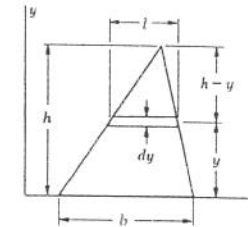
Figura 9.8

Problema Resolvido 9.1

Determinar o momento de inércia de um triângulo em relação a sua base.

Solução. Um triângulo de base b e altura h é desenhado; o eixo x é escolhido de forma a coincidir com a base. Escolhe-se uma faixa diferencial paralela ao eixo x . Como todos os pontos da faixa estão à mesma distância do eixo x , escrevemos

$$dI_x = y^2 dA \quad dA = l dy$$



Dos triângulos semelhantes, temos

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \quad l = b \frac{h-y}{h} \quad dA = b \frac{h-y}{h} dy$$

Integrando dI_x de $y = 0$ a $y = h$, obtemos

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy$$

$$= \frac{b}{h} \left[h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h \quad I_x = \frac{bh^3}{12} \Leftarrow$$

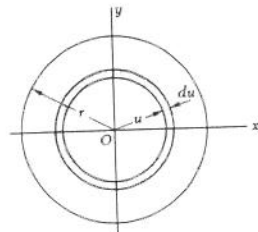
Problema Resolvido 9.2

(a) Determinar o momento polar de inércia em relação ao centróide de uma superfície circular, por integração direta. (b) Utilizando o resultado do item (a), determinar o momento de inércia de uma superfície circular em relação ao diâmetro.

a) **Momento Polar de Inércia.** Um elemento anular diferencial é escolhido. Como todas as partes desse elemento de área diferencial estão à mesma distância da origem, escrevemos

$$dJ_0 = u^2 dA \quad dA = 2\pi u du$$

$$J_0 = \int dJ_0 = \int_0^r u^2 (2\pi u du) = 2\pi \int_0^r u^3 du \quad J_0 = \frac{\pi}{2} r^4 \leftarrow$$



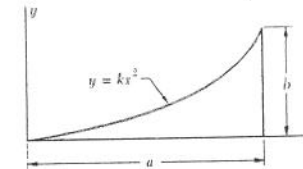
b) **Momento de Inércia.** Em virtude da simetria da superfície circular, temos $I_x = I_y$. Escrevemos, então,

$$J_0 = I_x + I_y = 2I_x \quad \frac{\pi}{2} r^4 = 2I_x \quad I_{\text{diâmetro}} = I_x = \frac{\pi}{4} r^4 \leftarrow$$

Problema Resolvido 9.3

(a) Determinar o momento de inércia da superfície sombreada ilustrada em relação a cada um dos eixos coordenados. Essa superfície já foi considerada no Problema

Resolvido 5.4. (b) Utilizando os resultados do item (a), determinar o raio de giração da superfície sombreada em relação a cada um dos eixos coordenados.



Solução. Recorrendo ao Problema Resolvido 5.4, obtemos as seguintes expressões para a equação da curva e para a área total:

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \quad A = \frac{1}{3} ab$$

Momento de Inércia I_x . Um elemento diferencial vertical de superfície é escolhido. Como todas as partes desse elemento não estão à mesma distância do eixo x, devemos tratar o elemento como um retângulo fino. O momento de inércia do elemento em relação ao eixo x é

$$dI_x = \frac{1}{3} y^3 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^3 dx = \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6} x^6 dx$$

$$I_x = \int dI_x = \int_0^a \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6} x^6 dx = \left[\frac{1}{3} \frac{b^3}{a^6} \frac{x^7}{7} \right]_0^a$$

$$I_x = \frac{ab^3}{21} \leftarrow$$

Momento de Inércia I_y . Usamos o mesmo elemento diferencial vertical de superfície. Como todas as partes do elemento estão à mesma distância do eixo y, escrevemos

$$dI_y = x^2 dA = x^2 (y dx) = x^2 \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right) dx = \frac{b}{a^2} x^4 dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^4 dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^5}{5} \right]_0^a$$

$$I_y = \frac{a^3 b}{5} \leftarrow$$

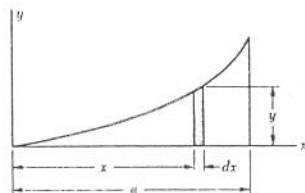
Raios de Giração k_x e k_y :

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{ab^3/21}{ab/3} = \frac{b^2}{7}$$

$$k_x = b \sqrt{\frac{1}{7}} \leftarrow$$

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{a^3 b/5}{ab/3} = \frac{3}{5} a^2$$

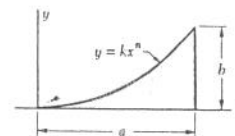
$$k_y = a \sqrt{\frac{3}{5}} \leftarrow$$



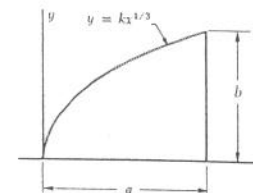
Problemas

9.1 a 9.4 Determine, por integração direta, o momento de inércia da superfície sombreada, em relação ao eixo y .

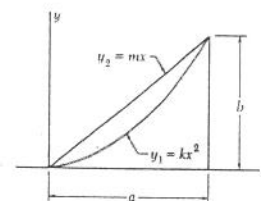
9.5 a 9.8 Determine, por integração direta, o momento de inércia da superfície sombreada, em relação ao eixo x .



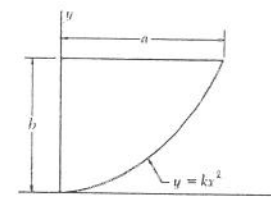
Figuras P9.1 e P9.5



Figuras P9.2 e P9.6

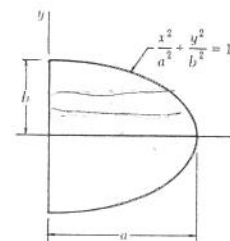


Figuras P9.3 e P9.7

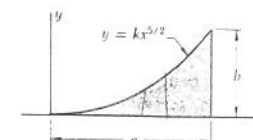


Figuras P9.4 e P9.8

9.9 e 9.10 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada ilustrada, em relação ao eixo x .



Figuras P9.9 e P9.11

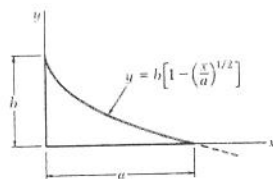


Figuras P9.10 e P9.12

9.11 e 9.12 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada ilustrada, em relação ao eixo y .

9.13 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada da figura, em relação ao eixo x .

9.14 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada da figura, em relação ao eixo y .



Figuras P9.13 e P9.14

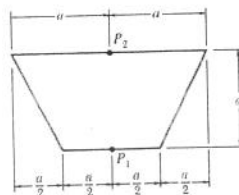
9.15 Determine o momento polar de inércia e o raio de giração polar do retângulo ilustrado, em relação ao ponto médio de um de seus (a) maiores lados (b) menores lados.



Figura P9.15

9.16 Determine o momento polar de inércia e o raio polar de giração do trapézio ilustrado, em relação ao ponto P_1 .

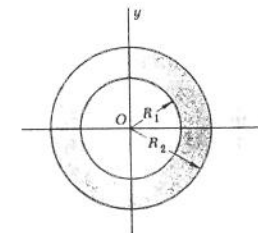
9.17 Determine o momento polar de inércia e o raio polar de giração do trapézio ilustrado, em relação ao ponto P_2 .



Figuras P9.16 e P9.17

9.18 (a) Determine, por integração direta, o momento polar de inércia da superfície anular ilustrada. (b) Utilizando os resultados da parte (a), determine o momento de inércia da superfície dada em relação ao eixo x .

9.19 (a) Mostre que o raio de giração polar k_O da superfície anular ilustrada é aproximadamente igual ao raio médio $R_m = (R_1 + R_2)/2$ para pequenos valores da espessura $t = R_2 - R_1$. (b) Determine o erro percentual introduzido pelo uso de R_m em lugar de k_O para valores de t/R_m respectivamente iguais a $1/2$ e $1/10$.



Figuras P9.18 e P9.19

*9.20 Prove que o momento polar de inércia em relação ao centróide de uma dada superfície A não pode ser menor que $A^2/2\pi$. (Sugestão: Compare o momento de inércia de um círculo de mesma área e mesmo centróide.)

9.6. Teorema dos Eixos Paralelos. Consideremos o momento de inércia I de uma superfície de área A em relação a um eixo AA' (Fig. 9.9). Seja y a distância de um elemento de área dA a AA' . Escrevemos

$$I = \int y^2 dA$$

Tracemos, agora, um eixo BB' paralelo a AA' , que passa pelo baricentro C da superfície; esse eixo é denominado *eixo baricêntrico*.

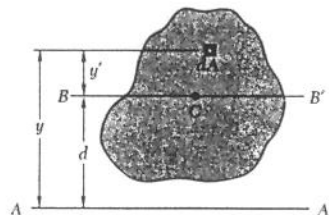


Figura 9.9

Sendo y' a distância do elemento dA a BB' , temos $y = y' + d$, onde d é a distância entre os eixos AA' e BB' . Substituindo y na integral representativa de I , escrevemos

$$\begin{aligned} I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

A primeira integral representa o momento de inércia I da superfície em relação ao eixo baricêntrico BB' . A segunda integral representa o momento de primeira ordem da superfície em relação a BB' ; como o baricentro C da superfície está localizado nesse eixo, a segunda integral deve ser nula. Finalmente, observamos que a última integral é igual à área total A . Obtemos, portanto,

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

Essa fórmula mostra que o momento de inércia I de uma superfície em relação a qualquer eixo dado AA' é igual ao momento de inércia $\bar{I}$ da superfície em relação ao eixo baricêntrico BB' , paralelo a AA' , mais o produto Ad^2 da área A pelo quadrado da distância d entre os dois eixos. Esse teorema é conhecido como o *teorema dos eixos paralelos*.^{*} Substituindo I por k^2A e $\bar{I}$ por $\bar{k}^2A$, o teorema pode, também, ser expresso do seguinte modo:

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.10)$$

^{*} Também conhecido como teorema de Steiner. (N. do R. T.)

Um teorema semelhante pode ser usado para relacionar o momento polar de inércia J_O de uma superfície em relação a um ponto O e o momento polar de inércia $\bar{J}_C$ da mesma superfície em relação a seu baricentro C . Sendo d a distância entre O e C , escrevemos

$$J_O = \bar{J}_C + Ad^2 \quad \text{ou} \quad k_O^2 = \bar{k}_C^2 + d^2 \quad (9.11)$$

Exemplo 1. Como uma aplicação do teorema dos eixos paralelos, determinaremos o momento de inércia I_T de um círculo em relação a uma tangente ao círculo (Fig. 9.10). Encontramos, no Problema Resolvido 9.2, que o momento de inércia de um círculo em relação a um eixo baricêntrico é $\bar{I} = \frac{1}{4} \pi r^4$. Podemos, portanto, escrever

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \frac{1}{4} \pi r^4 + \pi r^2 r^2 = \frac{5}{4} \pi r^4$$

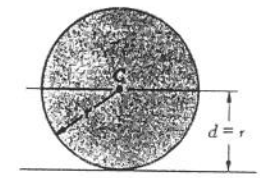


Figura 9.10

Exemplo 2. O teorema dos eixos paralelos pode, também, ser usado para determinar o momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo baricêntrico quando o momento de inércia dessa superfície em relação a algum outro eixo paralelo é conhecido. Consideremos, por exemplo, uma superfície triangular (Fig. 9.11). Encontramos, no Problema Resolvido 9.1, que o momento de inércia de um triângulo em relação à sua base AA' é igual a $\frac{1}{12}bh^3$. Utilizando o teorema dos eixos paralelos, obtemos

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$

$$\bar{I}_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{2}bh \left(\frac{1}{3}h \right)^2 = \frac{1}{36}bh^3$$

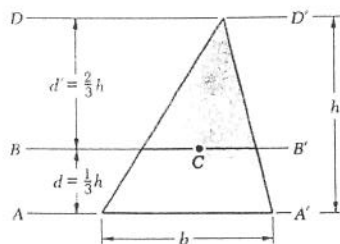


Figura 9.11

Deve-se observar que o produto Ad^2 foi *subtraído* do momento de inércia dado para obter-se o momento de inércia baricêntrico do triângulo. Enquanto esse produto é *somado* ao transferir de um eixo baricêntrico para um eixo paralelo, deve ser *subtraído* no processo inverso. Em outras palavras, o momento de inércia de uma superfície é sempre menor em relação a um eixo baricêntrico do que em relação a qualquer outro eixo paralelo.

Voltando à Fig. 9.11, observamos que o momento de inércia do triângulo em relação a uma reta DD' que passa por um vértice pode ser obtido escrevendo-se

$$I_{DD'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{2}bh\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{4}bh^3$$

Note-se que $I_{DD'}$ não poderia ter sido obtido diretamente de $I_{AA'}$. O teorema dos eixos paralelos somente poderá ser aplicado se um dos eixos paralelos passar pelo baricentro da superfície.

9.7. Momentos de Inércia de Superfícies Compostas. Consideremos uma superfície composta A formada de vários componentes A_1, A_2 etc. Como a integral que representa o momento de inércia de A pode ser subdividida em integrais calculadas sobre A_1, A_2 etc., o momento de inércia de A , em relação a um eixo dado, poderá ser obtido somando-se os momentos de inércia das superfícies A_1, A_2 etc., em relação ao mesmo eixo. O momento de inércia de uma superfície formada por várias das formas comuns ilustradas na Fig. 9.12 pode, assim, ser obtido das fórmulas fornecidas naquela figura. Antes de somar os momentos de inércia das superfícies componentes, entretanto, o teorema dos eixos paralelos deve ser usado para transferir cada momento de inércia para o eixo desejado. Damos exemplo disto nos Problemas Resolvidos 9.4 e 9.5.

Retângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $\bar{J}_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $\bar{J}_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo		$I_x = \bar{I}_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quadrante		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $\bar{J}_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Figura 9.12 Momentos de inércia de figuras geométricas comuns.

Forma	Diagrama	Dimensão nominal, mm	Peso / m, N/m	Área, cm ²	I_x , cm ⁴	k_x , cm	$\bar{y}$, cm	I_y , cm ⁴	k_y , cm	$\bar{x}$, cm
Perfil I		220 x 220 180 x 180 140 x 140	718 529 350	93,3 67,5 45,5	8 105 3 856 1 534	9,30 7,56 5,80		2 929 1 410 572	5,60 4,56 3,55	...
Perfil duplo T		380 x 149 300 x 125 160 x 74	824 531 176	107 69,1 22,8	24 010 9 800 935	15 11,9 6,40		975 451 54,7	3,02 2,56 1,55	...
Perfil U		250 x 80 200 x 75 160 x 75	333 248 184	42,5 32,2 24	3 770 1 910 925	9,40 7,70 6,21		238 148 85,3	2,36 2,14 1,89	2,14 2,01 1,84
Perfil angular		100 x 70 x 10* 60 x 60 x 10 80 x 60 x 10 100 x 100 x 12	125 85 108 175	16,2 11,07 13,00 22,7	156 34,9 80,8 207	3,10 1,78 2,49 3,02	3,28 1,85 2,65 2,90	66,3 34,9 38,8 207	2,00 1,78 1,73 3,02	1,85 1,85 1,65 2,90

* O último número representa a espessura.

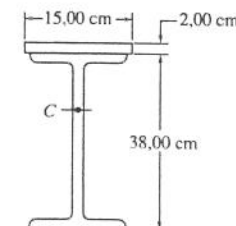
Figura 9.13 Propriedades de perfis estruturais.

As propriedades das seções retas de várias formas estruturais são dadas na Fig. 9.13. Conforme observado na Seção 9.1, o momento de inércia de uma seção de viga em relação a seu eixo neutro está intimamente relacionado ao valor das forças internas. A determinação dos momentos de inércia é, portanto, um pré-requisito para a análise e o projeto dos elementos estruturais.

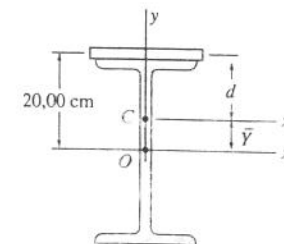
Deve-se notar que o raio de giração de uma superfície composta *não* é igual à soma dos raios de giração das superfícies componentes. Para determinar o raio de giração de uma superfície composta é necessário, em primeiro lugar, calcular o momento de inércia de tal superfície.

Problema Resolvido 9.4

A resistência de um perfil duplo T de 380 mm x 149 mm é aumentada prendendo-se a seu flange superior uma chapa de 150 mm x 20 mm, conforme esquematizado na figura. Determinar o momento de inércia e o raio de giração da seção composta em relação a um eixo passando por seu centróide C e paralelo à chapa.



Solução. A origem O das coordenadas é colocada no centro de gravidade do perfil, e a distância $\bar{Y}$ do centróide da seção composta é calculada pelos métodos do Cap. 5. A área da seção do perfil é obtida recorrendo-se à Fig. 9.13.



Seção	Área, cm^2	$\bar{y}$, cm	$\bar{y}A$, cm^3
Chapa	30,0	20,00	600
Perfil	107,0	0	0
	$\Sigma A = 137,0$	...	$\Sigma \bar{y}A = 600$
	$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y}A$	$\bar{Y} (137) = 600$	$\bar{Y} = 4,38 \text{ cm}$

Momento de Inércia. O teorema dos eixos paralelos é utilizado para determinar os momentos de inércia do perfil e da chapa em relação ao eixo x' . Este é um eixo baricêntrico para a seção composta, porém não o é para os elementos considerados separadamente. O valor $\bar{I}_x$ para a seção do perfil é obtido na Fig. 9.13.

Para a seção do perfil:

$$I_{x'} = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2 = 24\,010 + (107)(4,38)^2 = 26,06 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

Para a chapa

$$I_{x'} = \bar{I}_x + Ad^2 = \left(\frac{1}{12}\right)(15,00)(2,00)^3 + (30,00)(20,00 - 4,38)^2 = 7,33 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

Para a seção composta

$$I_{x'} = 26,06 \times 10^3 + 7,33 \times 10^3 = 33,39 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

$$I_{x'} = 33,39 \times 10^3 \text{ cm}^4 \Leftarrow$$

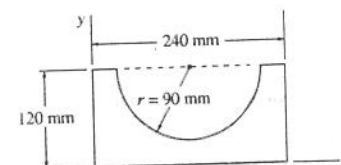
Raio de Giração

$$k_{x'}^2 = \frac{I_{x'}}{A} = \frac{33,39 \times 10^3 \text{ cm}^4}{137 \text{ cm}^2}$$

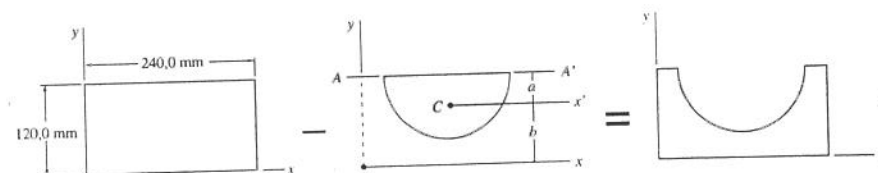
$$k_{x'} = 15,61 \text{ cm} \Leftarrow$$

Problema Resolvido 9.5

Determine o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo x .



Solução. A superfície dada pode ser obtida tirando um semicírculo de um retângulo. Os momentos de inércia do retângulo e do semicírculo serão calculados separadamente.



I_x para o Retângulo. Da Fig. 9.12, obtemos:

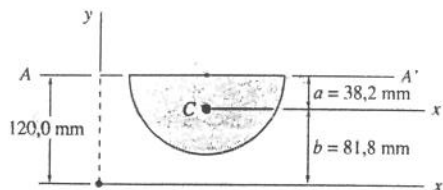
$$I_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(240,0 \text{ mm})(120,0 \text{ mm})^3 = 138,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

I_x para o Semicírculo. Com o auxílio da Fig. 5.8 localizamos o centróide C do semicírculo relativamente ao diâmetro AA' :

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90,0 \text{ mm})}{3\pi} = 38,2 \text{ mm}$$

A distância b do centróide C ao eixo x é:

$$b = 120,0 \text{ mm} - a = 120,0 \text{ mm} - 38,2 \text{ mm} = 81,8 \text{ mm}$$



Utilizando a Fig. 9.12, calculamos o momento de inércia do semicírculo em relação ao diâmetro AA' ; calculamos, ainda, a área do semicírculo:

$$I_{AA'} = \frac{1}{8} \pi r^4 = \frac{1}{8} \pi (90,0 \text{ mm})^4 = 25,8 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \pi (90,0 \text{ mm})^2 = 12,7 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

O teorema dos eixos paralelos permite obter o valor de $\bar{I}_x$:

$$I_{AA'} = \bar{I}_x + Aa^2$$

$$25,8 \times 10^6 \text{ mm}^4 = \bar{I}_x + (12,72 \times 10^3 \text{ mm}^2)(38,2 \text{ mm})^2$$

$$\bar{I}_x = 7,20 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Usando novamente o teorema dos eixos paralelos obtemos o valor de $\bar{I}_x$:

$$I_x = \bar{I}_x + Ab^2 = 7,20 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (12,72 \times 10^3 \text{ mm}^2)(81,8 \text{ mm})^2 = 92,3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

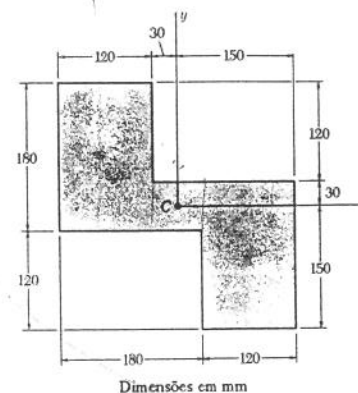
I_x para a Superfície Dada. Subtraindo o momento de inércia do semicírculo do momento de inércia do retângulo, obtemos:

$$I_x = 138,2 \times 10^6 \text{ mm}^4 - 92,3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

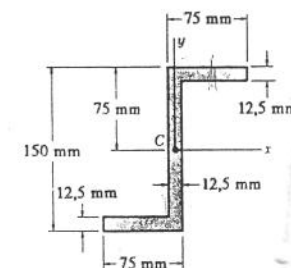
$$I_x = 45,9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Problemas

9.21 e 9.23 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada em relação ao eixo x .



Figuras P9.21 e P9.22



Figuras P9.23 e P9.24

9.22 e 9.24 Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada em relação ao eixo y .

9.25 e 9.26 Determine os momentos de inércia da superfície sombreada em relação aos eixos x e y , com $a = 20 \text{ mm}$.

9.27 Determine a área da superfície sombreada e seu momento de inércia em relação a um eixo baricêntrico paralelo a AA' , sabendo que seus momentos de inércia em relação a AA' são, respectivamente, $4,1 \times 10^6 \text{ mm}^4$ e $6,9 \times 10^6 \text{ mm}^4$ e que $d_1 = 30 \text{ mm}$ e $d_2 = 10 \text{ mm}$.

9.28 Sabendo que a área da parte sombreada é igual a $7,5 \times 10^3 \text{ mm}^2$ e que seu momento de inércia em relação a AA' é $31 \times 10^6 \text{ mm}^4$, determine seu momento de inércia em relação a BB' , com $d_1 = 60 \text{ mm}$ e $d_2 = 15 \text{ mm}$.

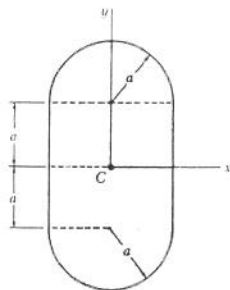


Figura P9.25

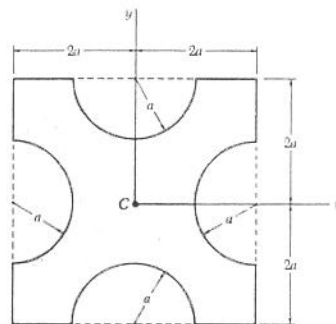
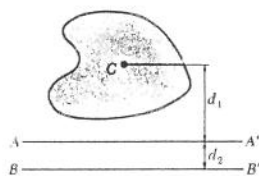


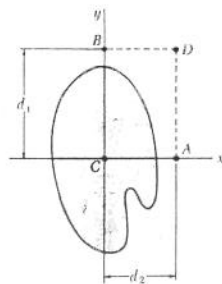
Figura P9.26



Figuras P9.27 e P9.28

9.29 A área da figura sombreada é igual a 125 cm^2 , e, para $d_1 = 15,0 \text{ cm}$, o momento polar de inércia em relação ao ponto B é $J_B = 31,3 \times 10^3 \text{ cm}^4$. Sabendo que $\bar{I}_x = 4 \bar{I}_y$, determine (a) $\bar{I}_x$ e (b) J_A para $d_2 = 12,5 \text{ cm}$.

9.30 Determine o momento polar de inércia em relação ao ponto D, para a figura sombreada, sabendo que os momentos polares de inércia em relação aos pontos A e B são, respectivamente, $J_A = 156 \times 10^3 \text{ cm}^4$ e $J_B = 244 \times 10^3 \text{ cm}^4$ e que $d_1 = 20 \text{ cm}$ e $d_2 = 15 \text{ cm}$.



Figuras P9.29 e P9.30

9.31 e 9.32 Determine os momentos de inércia $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$ da superfície ilustrada, em relação aos eixos baricêntricos, respectivamente, paralelo e perpendicular ao lado AB.

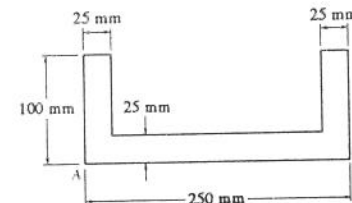


Figura P9.31

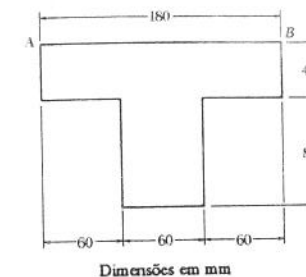
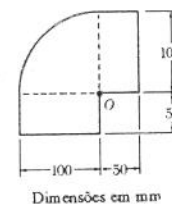


Figura P9.32

9.33 e 9.34 Determine o momento polar da superfície ilustrada em relação ao: (a) ponto O e (b) centróide da superfície.



Dimensões em mm

Figura P9.33

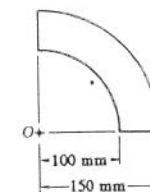


Figura P9.34

9.35 Dois perfis U de $250 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ e uma chapa de $350 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ são usados para formar a coluna de seção ilustrada. Para $b = 175 \text{ mm}$, determine os momentos de inércia e raios de giração da seção total em relação aos eixos baricêntricos.

9.36 A seção de uma viga composta, de alma cheia, consiste em uma chapa de $787,5 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$ e quatro perfis angulares de $100 \text{ mm} \times 70 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$. Determine os momentos de inércia da seção em relação aos eixos baricêntricos indicados.

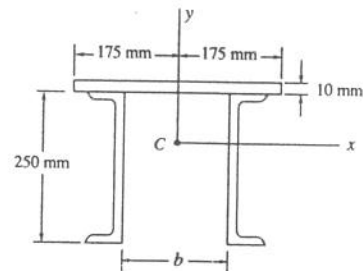


Figura P9.35

9.37 Dois perfis angulares de $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$ são soldados a uma chapa de aço de $250 \text{ mm} \times 12 \text{ mm}$, conforme ilustrado. Determine os momentos de inércia e os raios de giração da seção combinada em relação aos eixos baricêntricos, respectivamente, paralelo e perpendicular à chapa.

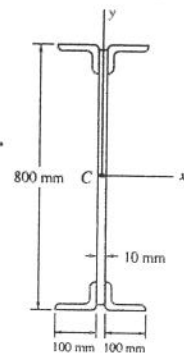


Figura P9.36

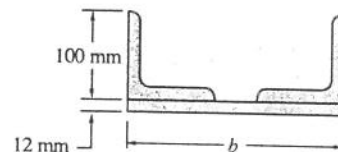


Figura P9.37

9.38 e 9.39 O painel representado forma a extremidade de um canal cheio de água até a linha AA' . Recorrendo à Seção 9.2, determine a profundidade do ponto de aplicação da resultante das forças hidrostáticas que atuam no painel (centro de pressão).

9.40 O centro de uma comporta vertical, de $1,6 \text{ m}$ de diâmetro, está localizado $2,4 \text{ m}$ abaixo da superfície da água. A comporta é fixada por três parafusos igualmente espaçados, conforme ilustrado. Determine a força em cada parafuso.

9.41 Resolva o Probl. 9.40 supondo que o centro da comporta está 2 m abaixo da superfície da água.



Figura P9.38

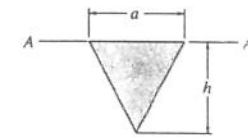


Figura P9.39

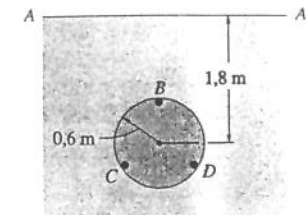


Figura P9.40

9.42 Uma comporta circular de raio r está articulada em torno de seu diâmetro $C'C''$. Sendo γ o peso específico da água, determine: (a) a reação em cada articulação e (b) o momento do binário necessário para manter a comporta fechada.

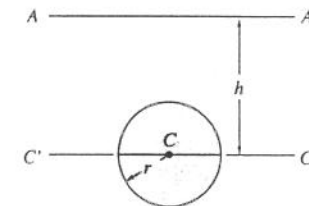


Figura P9.42

***9.43** Determine a coordenada x do centróide do sólido ilustrado; esse sólido foi obtido interceptando-se um cilindro circular por um plano oblíquo. (Sugestão: A altura do sólido é proporcional à coordenada x ; considere uma analogia entre essa altura e a pressão da água sobre uma superfície submersa.)

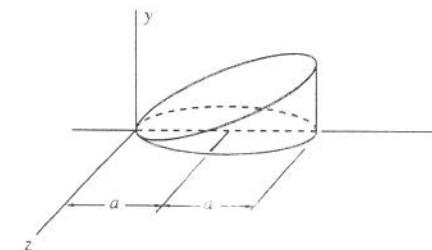


Figura P9.43

*9.44 Determine a coordenada x do centróide do sólido ilustrado. (Veja sugestão do Prob. 9.43.)

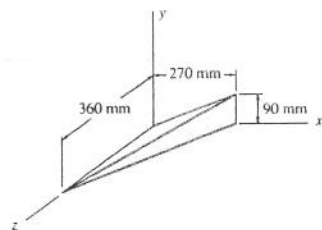


Figura P9.44

*9.45 Mostre que o sistema de forças hidrostáticas que atua sobre uma superfície plana submersa A pode ser reduzido a uma força $\mathbf{P}$ aplicada no centróide C da superfície e a dois binários. A força $\mathbf{P}$ é perpendicular à superfície e de módulo $P = \gamma \bar{A} \bar{y} \sin \theta$, onde γ é o peso específico do líquido, e os momentos dos binários são representados por vetores dirigidos, conforme indicado, e de módulo $M_{x'} = \gamma \bar{I}_{x'} \sin \theta$ e $M_{y'} = \gamma \bar{I}_{y'} \sin \theta$, onde $\bar{I}_{x'} = \int x'^2 dA$ (ver Seção 9.8). Observe que os binários são independentes da profundidade em que a superfície está submersa.

*9.46 Mostre que a resultante das forças hidrostáticas que atuam sobre uma superfície plana submersa A é uma força $\mathbf{P}$ perpendicular à superfície e de módulo $P = \gamma \bar{A} \bar{y} \sin \theta = \bar{p}A$, onde γ é o peso específico do líquido e $\bar{p}$ a pressão no centróide C da superfície. Mostre que $\mathbf{P}$ está aplicado a um ponto C_p , denominado centro de pressão, de coordenadas $x_p = P_{xy} / A \bar{y}$ e $y_p = I_x / A \bar{y}$, onde $P_{xy} = \int xy dA$ (ver Seção 9.8). Mostre, também, que a diferença de ordenadas $y_p - \bar{y}$ é igual a $\bar{I}_{x'} / \bar{y}$ e, assim, depende da profundidade em que a superfície se encontra submersa.

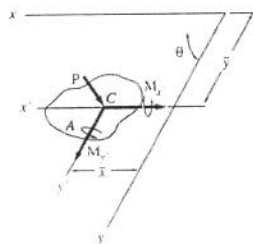


Figura P9.45

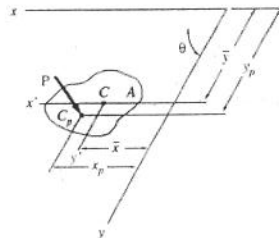


Figura P9.46

*9.8. Produto de Inércia. A integral

$$P_{xy} = \int xy dA \quad (9.12)$$

obtida multiplicando-se cada elemento dA de uma superfície A por suas coordenadas x e y e integrando sobre a superfície (Fig. 9.14) é conhecida como *produto de inércia* da superfície A em relação aos eixos x e y . Ao contrário dos momentos de inércia I_x e I_y , o produto de inércia P_{xy} tanto pode ser positivo quanto negativo.

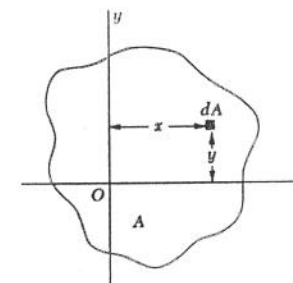


Figura 9.14

Quando um ou ambos os eixos x e y são eixos de simetria da superfície A , o produto de inércia P_{xy} é zero. Consideremos, por exemplo, a seção reta representada na Fig. 9.15. Como essa seção é simétrica em relação ao eixo x , podemos associar a cada elemento dA de coordenada x e y um elemento dA' de coordenadas x e $-y$. Evidentemente, a contribuição de cada par de elementos escolhidos desse modo se cancela mutuamente, e a integral (9.12) reduz-se a zero.

Um teorema de eixos paralelos, semelhante àquele estabelecido na Seção 9.6 para momentos de inércia, pode ser provado para produtos de inércia. Consideremos uma superfície A e um sistema de coordenadas cartesianas x e y (Fig. 9.16). Pelo baricentro C dessa superfície, de coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, traçamos dois eixos *baricêntricos* x' e y' paralelos, respectivamente, aos eixos x e y . Sendo x e y as coordenadas de um elemento de área dA em relação aos eixos originais, e x' e y' as coordenadas do mesmo elemento em relação aos eixos baricêntricos, temos $x = x' + \bar{x}$ e $y = y' + \bar{y}$. Substituindo em (9.12), obtemos a seguinte expressão para o produto de inércia P_{xy} :

$$P_{xy} = \int xy \, dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) \, dA$$

$$= \int x'y' \, dA + \bar{y} \int x' \, dA + \bar{x} \int y' \, dA + \bar{x}\bar{y} \int dA$$

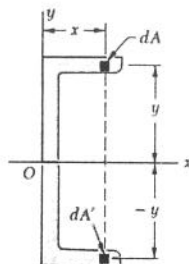


Figura 9.15

A primeira integral representa o produto de inércia $\bar{P}_{x'y'}$ da superfície A em relação aos eixos baricêntricos x' e y' . As duas integrais seguintes representam os momentos de primeira ordem da superfície em relação aos eixos baricêntricos; elas reduzem-se a zero, visto que o baricentro C está localizado sobre esses eixos. Finalmente, observamos que a última integral é igual à área total A. Obtemos, portanto,

$$P_{xy} = \bar{P}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \quad (9.13)$$

9.9. Eixos e Momentos Principais de Inércia. Consideremos a superfície A e os eixos coordenados x e y (Fig. 9.17). Supomos que os momentos e o produto de inércia

$$I_x = \int y^2 \, dA \quad I_y = \int x^2 \, dA \quad P_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.14)$$

da superfície A são conhecidos e propomo-nos a determinar os momentos e o produto de inércia I_u , I_v e P_{uv} de A em relação a novos eixos u e v , obtidos pela rotação dos eixos originais, em torno da origem de um ângulo θ .

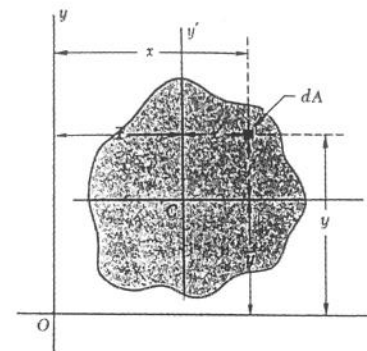


Figura 9.16

Inicialmente, observemos as seguintes relações entre as coordenadas u , v e x , y de um elemento de superfície dA :

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta \quad v = y \cos \theta - x \sin \theta$$

Substituindo v na expressão para I_u , temos

$$I_u = \int v^2 \, dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 \, dA$$

$$= \cos^2 \theta \int y^2 \, dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy \, dA + \sin^2 \theta \int x^2 \, dA$$

Levando em conta as relações (9.14), temos

$$I_u = I_x \cos^2 \theta - 2P_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta \quad (9.15)$$

Analogamente, obtemos para I_v e P_{uv} as relações

$$I_v = I_x \sin^2 \theta + 2P_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \quad (9.16)$$

$$P_{uv} = I_x \sin \theta \cos \theta + P_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - I_y \sin \theta \cos \theta \quad (9.17)$$

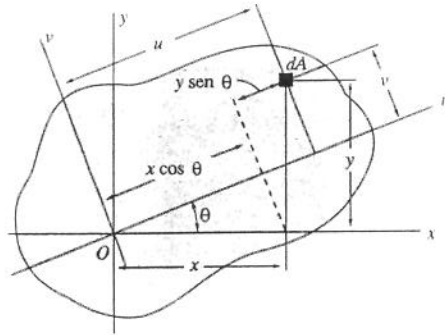


Figura 9.17

Recordando as relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta & \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos 2\theta}{2} & \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned}$$

podemos escrever as Eqs. (9.15), (9.16) e (9.17) como se segue

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - P_{xy} \sin 2\theta \quad (9.18)$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + P_{xy} \sin 2\theta \quad (9.19)$$

$$P_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + P_{xy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

Somando as Eqs. (9.13) e (9.19) membro a membro obtemos

$$I_u + I_v = I_x + I_y \quad (9.21)$$

Esse resultado poderia ter sido previsto, já que os dois membros da Eq. (9.21) são iguais ao momento polar de inércia J_O

As Eqs. (9.18) e (9.20) são as equações paramétricas de uma circunferência. Isto significa que, se escolhermos um par de eixos cartesianos e tomarmos um ponto M de abscissa I_u e ordenada P_{uv} para qualquer valor dado do parâmetro θ , o lugar geométrico de todos os pontos assim obtidos será uma circunferência. Para estabelecer essa propriedade, devemos eliminar θ das Eqs. (9.18) e (9.20); isto é feito transpondo-se $(I_x + I_y)/2$ na Eq. (9.18), elevando ao quadrado ambos os membros das Eqs. (9.18) e (9.20) e somando. Temos

$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + P_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + P_{xy}^2 \quad (9.22)$$

Fazendo

$$I_{\text{méd}} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \text{e} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + P_{xy}^2} \quad (9.23)$$

escrevemos a identidade (9.22) na forma

$$(I_u - I_{\text{méd}})^2 + P_{uv}^2 = R^2 \quad (9.24)$$

que é a equação de uma circunferência de raio R e centro no ponto C de abscissa $I_{\text{méd}}$ e ordenada O (Fig. 9.18a). As Eqs. (9.19) e (9.20) são equações paramétricas da mesma circunferência. Ainda mais, sendo o eixo horizontal um eixo de simetria da circunferência, ela pode ser obtida como o lugar geométrico dos pontos N de abscissa I_v e ordenada $-P_{uv}$ (Fig. 9.18b). Essa propriedade será utilizada na Seção 9.10.

Os dois pontos A e B onde a circunferência obtida intercepta o eixo das abscissas são de interesse especial: o ponto A corresponde ao valor máximo do momento de inércia I_u , enquanto o ponto B corresponde a seu valor mínimo. Além disso, os dois pontos correspondem a um valor zero do produto de inércia P_{uv} . Assim, os valores θ_m do parâmetro θ que correspondem aos pontos A e B podem ser obtidos fazendo-se $P_{uv} = 0$ na Eq. (9.20). Obtemos*

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2P_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

* Essa relação pode também ser obtida derivando-se I_u na Eq. (9.18) e fazendo-se $dI_u/d\theta = 0$.

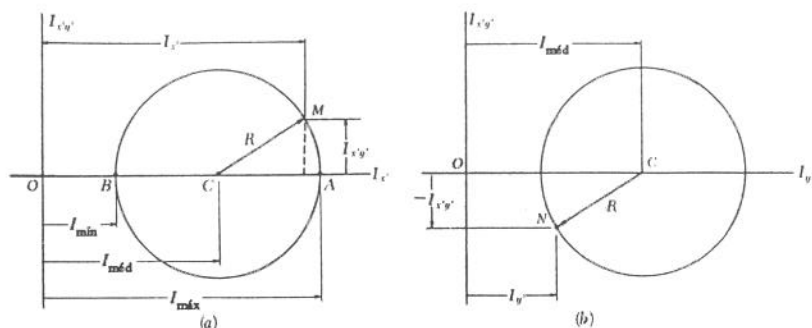


Figura 9.18

Essa equação define dois valores $2\theta_m$ que diferem de 180° e, assim, dois valores θ_m defasados de 90° . Um deles corresponde ao ponto A na Fig. 9.18 e a um eixo que passa por O na Fig. 9.17, em relação ao qual o momento de inércia da superfície dada é máximo; o outro valor corresponde ao ponto B e a um eixo que passa por O, em relação ao qual o momento de inércia da superfície é mínimo. Os dois eixos assim definidos, perpendiculares entre si, são denominados *eixos principais da superfície em relação a O*, e os valores correspondentes $I_{\max}$ e $I_{\min}$ do momento de inércia são chamados *momentos principais de inércia da superfície em relação a O*. Comprovamos da Fig. 9.18 que

$$I_{\max} = I_{\text{méd}} + R \quad \text{e} \quad I_{\min} = I_{\text{méd}} - R \quad (9.26)$$

Substituindo $I_{\text{méd}}$ e R por seus valores das fórmulas (9.23), escrevemos

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2} \quad (9.27)$$

Como os dois valores θ_m , definidos pela Eq. (9.25), foram obtidos fazendo-se $P_{uv} = 0$ na Eq. (9.20), é claro que o produto de inércia da superfície dada em relação a seus eixos principais é zero. Reportando-nos à Seção 9.8, notamos que, se uma superfície possui um eixo de simetria que passa por um ponto O, este deve ser um eixo principal da superfície em relação a O. Por outro lado, um eixo principal não necessita ser de

simetria; possuindo ou não propriedades de simetria, uma superfície terá dois eixos principais de inércia em relação a um ponto O qualquer. Quando não é possível dizer por inspeção qual dos dois eixos principais de inércia corresponde a $I_{\max}$ e qual corresponde a $I_{\min}$, substituem-se os valores de θ_m na Eq. (9.18) para determinar qual dos dois corresponde ao valor máximo do momento de inércia da superfície em relação a O.

As propriedades aqui estabelecidas são válidas para qualquer ponto O localizado dentro ou fora da superfície dada. Se o ponto O for escolhido de forma a coincidir com o baricentro da superfície, qualquer eixo que passe por O será um eixo baricêntrico; os dois eixos principais da superfície em relação a seu centróide são designados como *eixos principais baricêntricos* ou *eixos centrais de inércia** da superfície.

***9.10. Círculo de Mohr para Momentos e Produtos de Inércia.** O círculo utilizado na seção precedente para ilustrar as relações existentes entre os momentos e os produtos de inércia de uma superfície dada, em relação a eixos que passam por um ponto fixo O, foi introduzido pela primeira vez pelo engenheiro alemão Otto Mohr (1835-1918) e é conhecido como *círculo de Mohr*. Veremos que, se os momentos e o produto de inércia de uma superfície A em relação a dois eixos cartesianos x e y de origem em um ponto O são conhecidos, o círculo de Mohr pode ser utilizado para determinar graficamente (a) os eixos principais e os momentos principais de inércia da superfície em relação a O, ou (b) os momentos e o produto de inércia da superfície em relação a qualquer outro par de eixos ortogonais u e v que passam por O.

Consideremos uma superfície dada A e dois eixos coordenados ortogonais x e y (Fig. 9.19a). Suponhamos conhecidos os momentos de inércia I_x e I_y e o produto de inércia P_{xy} , os quais serão representados num diagrama de tal forma que o ponto X tenha coordenadas I_x e P_{xy} e o ponto Y, coordenadas I_y e $-P_{xy}$ (Fig. 9.19b). Se P_{xy} é positivo, que é o caso da Fig. 9.19a, o ponto X fica acima do eixo horizontal e o ponto Y abaixo, como se vê na Fig. 9.19b. Se P_{xy} é negativo, X fica abaixo do eixo horizontal e Y, acima.

Unindo X e Y por uma linha reta, definimos o ponto C como a interseção da linha XY com o eixo horizontal e traçamos a circunferência de centro C e diâmetro XY. Observando que a abscissa de C e o raio do círculo são, respectivamente, iguais a $I_{\text{méd}}$ e R , definidas pelas fórmulas (9.23), concluímos que o círculo obtido é o círculo de Mohr para a superfície dada, em relação ao ponto O. Assim, as abscissas dos pontos A e B, onde o círculo intercepta o eixo, representam, respectivamente, os momentos principais de inércia $I_{\max}$ e $I_{\min}$ da superfície.

* Este segundo nome é o de uso corrente nos cursos de Engenharia no Brasil. (N. do R. T.)

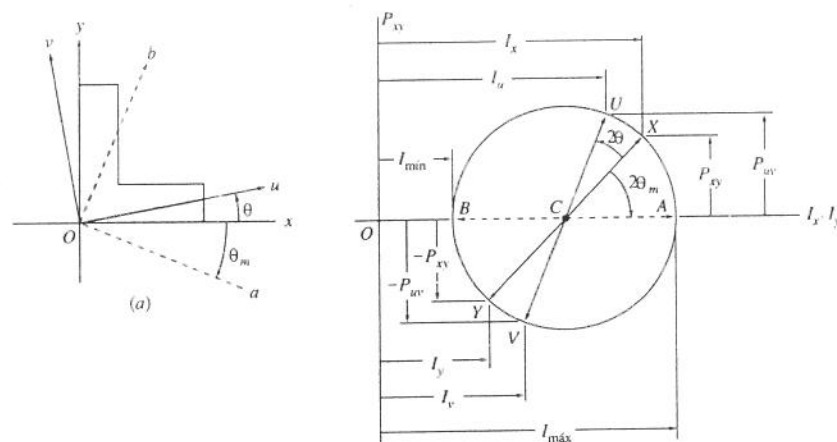


Figura 9.19

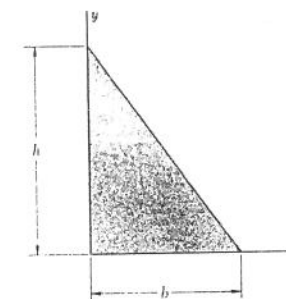
Observamos também que, como $\tan(XCA) = 2P_{xy}/(I_x - I_y)$, o ângulo XCA é igual em valor a um dos ângulo $2\theta_m$ que satisfazem a Eq. (9.25); assim, o ângulo θ_m , que define na Fig. 9.19a o eixo principal Oa , correspondente ao ponto A na Fig. 9.19b, pode ser obtido dividindo-se ao meio o ângulo XCA medido no círculo de Mohr. Observamos, além disso, que, se $I_x > I_y$ e $P_{xy} > 0$, como no caso aqui considerado, a rotação que traz CX até CA é de sentido horário. Nesse caso, o ângulo θ_m , obtido a partir da Eq. (9.25) e que define o eixo principal Oa , na Fig. 9.19a, é negativo; assim, a rotação que traz Ox até Oa é também de sentido horário. Concluímos que os sentidos de rotação em ambas as partes da Fig. 9.19 são os mesmos; se uma rotação em sentido horário de valor $2\theta_m$ for necessária para trazer CX até CA no círculo de Mohr, uma rotação horária de valor θ_m trará Ox até o eixo principal correspondente Oa na Fig. 9.19a.

Como o círculo de Mohr é univocamente definido, o mesmo círculo pode ser obtido considerando-se os momentos e produtos de inércia da superfície A em relação a eixos ortogonais u e v (Fig. 9.19a). O ponto U , de coordenadas I_u e P_{uv} , e o ponto V , de coordenadas I_v e $-P_{uv}$, estão, portanto, localizados sobre o círculo de Mohr, e o ângulo UCA na Fig. 9.19b deve ser igual a duas vezes o ângulo uOa na Fig. 9.19a. Conforme se observou anteriormente, como o ângulo XCA é duas vezes o ângulo xOa , segue-se que o ângulo XCU na Fig. 9.19b é duas vezes o ângulo xOu na Fig. 9.19a. Assim, o diâmetro UV que define os momentos e o produto de inércia I_u , I_v e P_{uv} da superfície dada, em relação aos eixos ortogonais u e v , que formam um ângulo θ com os eixos x e y , pode ser obtido girando-se de um ângulo 2θ o diâmetro XY , correspondente aos momentos e ao produto de inércia I_x , I_y e P_{xy} . Observamos que a rotação que traz o diâmetro XY para o diâmetro UV na Fig. 9.19b tem o mesmo sentido da rotação que traz os eixos xy para os eixos uv na Fig. 9.19a.

Deve ser observado que o uso do círculo de Mohr não está limitado a soluções gráficas, isto é, soluções baseadas no traçado e nas medidas cuidadosas dos vários parâmetros envolvidos. Simplesmente traçando o círculo de Mohr e usando trigonometria, pode-se deduzir facilmente as várias relações necessárias à solução numérica de um dado problema. Cálculos numéricos podem, então, ser efetuados em uma calculadora (ver Problema Resolvido 9.8).

Problema Resolvido 9.6

Determinar o produto de inércia do triângulo retângulo ilustrado (a) em relação aos eixos x e y e (b) em relação aos eixos baricêntricos paralelos aos eixos x e y .



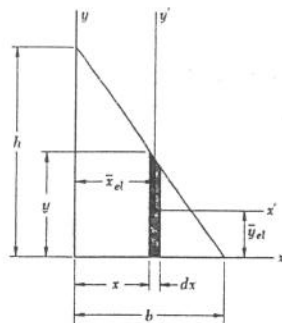
a) **Produto de Inércia P_{xy}** Uma faixa retangular vertical é escolhida como elemento diferencial de área. Usando o teorema dos eixos paralelos, temos

$$dP_{xy} = dP_{x'y'} + \bar{x}_{el} \bar{y}_{el} dA$$

Como o elemento é simétrico em relação aos eixos x' e y' , observamos que $dP_{x'y'} = 0$. Das propriedades geométricas do triângulo, obtemos

$$y = h \left(1 - \frac{x}{b} \right) \quad dA = y dx = h \left(1 - \frac{x}{b} \right) dx$$

$$\bar{x}_{el} = x \quad \bar{y}_{el} = \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} h \left(1 - \frac{x}{b} \right)$$



Integrando dP_{xy} de $x = 0$, até $x = b$, obtemos

$$\begin{aligned}
 P_{xy} &= \int dP_{xy} = \int \bar{x}_{el} \bar{y}_{el} dA = \int_0^b x \left(\frac{1}{2} \right) h^2 \left(1 - \frac{x}{b} \right)^2 dx \\
 &= h^2 \int_0^b \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{2b^2} \right) dx = h^2 \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3b} + \frac{x^4}{8b^2} \right]_0^b \\
 P_{xy} &= \frac{1}{24} b^2 h^2 \leftarrow
 \end{aligned}$$

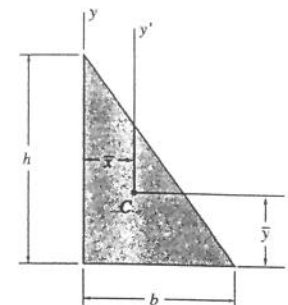
b) **Produto de Inércia $\bar{P}_{x'y'}$.** As coordenadas do baricentro do triângulo são

$$\bar{x} = \frac{1}{3} b \quad \bar{y} = \frac{1}{3} h$$

Utilizando a expressão para P_{xy} obtida no item (a), aplicamos o teorema dos eixos paralelos e escrevemos

$$\begin{aligned}
 P_{xy} &= \bar{P}_{x'y'} + \bar{x} \bar{y} A \\
 \frac{1}{24} b^2 h^2 &= \bar{P}_{x'y'} + \left(\frac{1}{3} b \right) \left(\frac{1}{3} h \right) \left(\frac{1}{2} bh \right) \\
 \bar{P}_{x'y'} &= \frac{1}{24} b^2 h^2 - \frac{1}{18} b^2 h^2
 \end{aligned}$$

$$\bar{P}_{x'y'} = -\frac{1}{72} b^2 h^2 \leftarrow$$

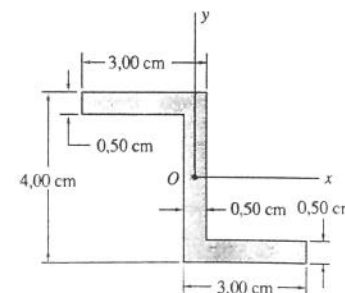


Problema Resolvido 9.7

Para a seção representada, foram calculados os momentos de inércia com relação aos eixos x e y , que são

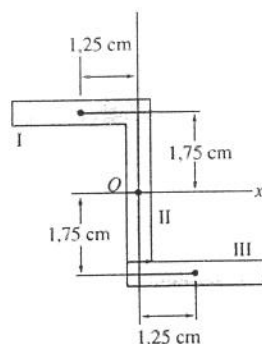
$$I_x = 10,4 \text{ cm}^4 \quad I_y = 6,97 \text{ cm}^4$$

Determinar: (a) os eixos principais da seção em relação a O e (b) os valores dos momentos principais de inércia da seção em relação a O .



Solução. Em primeiro lugar, calculamos o produto de inércia em relação aos eixos x e y . A área é dividida em três retângulos, como ilustrado. Observamos que o produto de inércia $\bar{P}_{x'y'}$ em relação aos eixos baricêntricos paralelos aos eixos x e y é zero

para cada retângulo. Usando o teorema dos eixos paralelos $P_{xy} = \bar{P}_{x'y'} + \bar{x}'\bar{y}'A$, verificamos que, para cada retângulo, P_{xy} reduz-se a $\bar{x}\bar{y}A$.



Retângulo	Área, cm ²	$\bar{x}$, cm	$\bar{y}$, cm	$\bar{x}\bar{y}A$, cm ⁴
I	1,50	-1,25	+1,75	-3,28
II	1,50	0	0	0
III	1,50	+1,25	-1,75	-3,28
				$\Sigma \bar{x}\bar{y}A = -6,56$

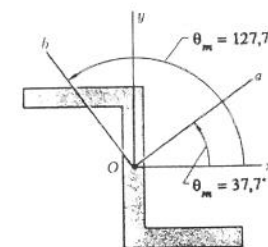
$$P_{xy} = \Sigma \bar{x}\bar{y}A = -6,56 \text{ cm}^4$$

a) **Eixos Principais.** Como os valores de I_x , I_y e P_{xy} são conhecidos, usamos a Eq. (9.25) para determinar os valores de θ_m :

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2P_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6,56)}{10,4 - 6,97} = +3,85$$

$$2\theta_m = 75,4^\circ \quad \text{e} \quad 255,4^\circ$$

$$\theta_m = 37,7^\circ \quad \text{e} \quad \theta_m = 127,7^\circ \leftarrow$$



b) **Momentos Principais de Inércia.** Usando a Eq. (9.27), escrevemos

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2}$$

$$= \frac{10,4 + 6,97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10,4 - 6,97}{2}\right)^2 + (-6,56)^2}$$

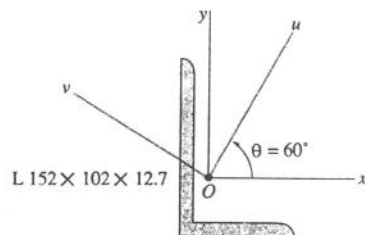
$$I_{\max} = 15,5 \text{ cm}^4 \qquad I_{\min} = 1,90 \text{ cm}^4$$

$$I_{\max} = 15,5 \times 10^4 \text{ mm}^4 \qquad I_{\min} = 1,90 \times 10^4 \text{ mm}^4 \leftarrow$$

Observando que a superfície está mais afastada do eixo a do que do eixo b, concluímos que $I_a = I_{\max} = 15,5 \times 10^4 \text{ mm}^4$ e $I_b = I_{\min} = 1,90 \times 10^4 \text{ mm}^4$. Essa conclusão pode ser verificada substituindo-se $\theta = 37,7^\circ$ nas Eqs. (9.18) e (9.19).

Problema Resolvido 9.8

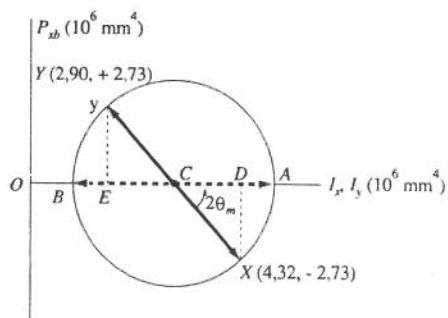
Para a seção ilustrada, os momentos e o produto de inércia em relação aos eixos x e y foram calculados, sendo seus valores $I_x = 4,32 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_y = 2,90 \times 10^6 \text{ mm}^4$ e $P_{xy} = -2,73 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Utilizando o círculo de Mohr, determinar: (a) os eixos principais da seção em relação a O, (b) os valores dos momentos principais de inércia da seção em relação a O e (c) os momentos e o produto de inércia da seção em relação aos eixos u e v, que formam um ângulo de 60° com os eixos x e y. (Nota: Essa seção é a mesma do Problema Resolvido 9.7.)



Solução. Em primeiro lugar, representamos o ponto X, de coordenadas $I_x = 4,32$, $P_{xy} = -2,73$, e o ponto Y, de coordenadas $I_y = 2,90$, $-P_{xy} = +2,73$. Unindo X e Y por uma linha reta, definimos o centro C do círculo de Mohr. A abscissa de C, que representa $I_{méd}$ e o raio R do círculo podem ser medidos diretamente ou calculados como se segue:

$$I_{méd} = OC = \frac{1}{2} (I_x + I_y) = \frac{1}{2} (4,32 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 2,90 \times 10^6 \text{ mm}^4) = 3,61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

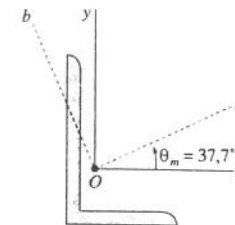
$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = \sqrt{(0,71 \times 10^6 \text{ mm}^4)^2 + (2,73 \times 10^6 \text{ mm}^4)^2} = 2,82 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



a) **Eixos Principais.** Os eixos principais da seção correspondem aos pontos A e B no círculo de Mohr, e o ângulo que devemos girar CX para trazê-lo em CA define $2\theta_m$. Temos

$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = \frac{2,73}{0,71} = 3,85 \quad 2\theta_m = 75,4^\circ \quad \theta_m = 37,7^\circ \quad \Leftarrow$$

Assim, o eixo principal Oa, correspondente ao valor máximo do momento de inércia, é obtido girando-se o eixo x de um ângulo de $37,7^\circ$ no sentido anti-horário; o eixo principal correspondente ao mínimo valor do momento de inércia pode ser obtido girando-se o eixo y do mesmo ângulo.



b) **Momentos Principais de Inércia.** Os momentos principais de inércia são representados pelas abscissas de A e B. Temos

$$I_{máx} = OA = OC + CA = I_{méd} + R = (3,61 + 2,82)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{máx} = 6,43 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Leftarrow$$

$$I_{mín} = OB = OC - BC = I_{méd} - R = (3,61 - 2,82)10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{mín} = 0,79 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Leftarrow$$

c) **Momentos e Produto de Inércia em Relação aos Eixos uv.** Os pontos U e V no círculo de Mohr, que correspondem aos eixos u e v, são obtidos girando-se CX e CY de um ângulo $2\theta = 2(60^\circ) = 120^\circ$ no sentido anti-horário. As coordenadas de U e V fornecem os momentos e o produto de inércia procurados. Observando que o ângulo que UC forma com o eixo I é $\phi = 120^\circ - 75,4^\circ = 44,6^\circ$, temos

$$I_u = OF = OC + CF = 3,61 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (2,82 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 44,6^\circ$$

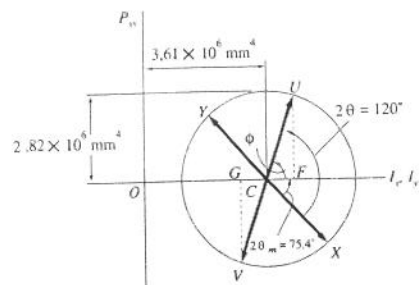
$$I_u = 5,62 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Leftarrow$$

$$I_v = OG = OC - GC = 3,61 \times 10^6 \text{ mm}^4 - (2,82 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 44,6^\circ$$

$$I_v = 1,60 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Leftarrow$$

$$P_{uv} = FU = (2,82 \times 10^6 \text{ mm}^4) \sin 44,6^\circ$$

$$P_{uv} = +1,98 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad \Leftarrow$$



Problemas

9.47 a 9.50 Determine por integração direta o produto de inércia da superfície dada em relação aos eixos x e y .

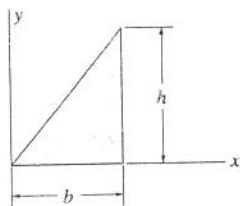


Figura P9.47

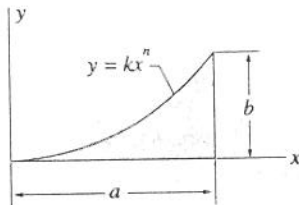


Figura P9.48

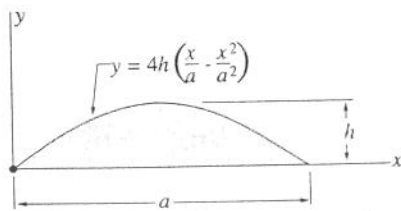


Figura P9.49

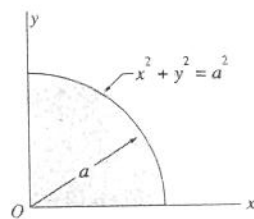
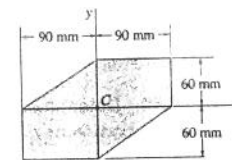
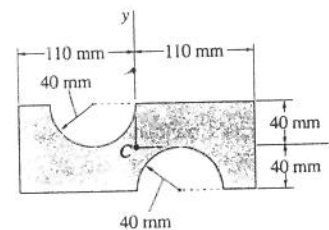


Figura P9.50

9.51 a 9.55 Usando o teorema dos eixos paralelos, determine o produto de inércia da superfície ilustrada em relação aos eixos baricêntricos x e y .



Figuras P9.51 e P9.52

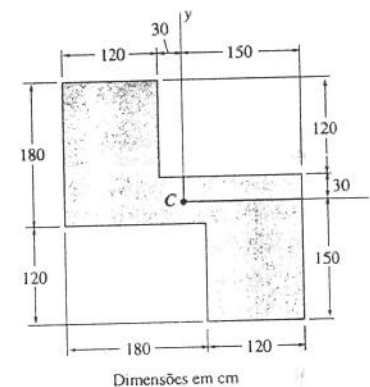
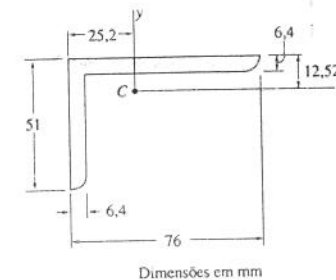
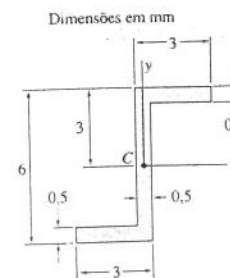


Figura P9.53



Figuras P9.54 e P9.55

9.56 Determine os momentos de inércia e os produtos de inércia da superfície do Prob. 9.54 em relação a novos eixos, baricêntricos, obtidos pela rotação anti-horária de 30° dos eixos x e y .

9.57 Determine os momentos de inércia e o produto de inércia do quarto de círculo do Prob. 9.50 em relação a novos eixos obtidos pela rotação dos eixos x e y em torno de O , (a) de 30° no sentido anti-horário e (b) de 45° no sentido anti-horário.

9.58 a 9.60 Determine a orientação dos eixos principais baricêntricos e os correspondentes valores dos momentos de inércia para as superfícies indicadas:

9.58 Superfície do Prob. 9.52.

9.59 Superfície do Prob. 9.53.

9.60 Superfície do Prob. 9.54.

9.61 Determine a orientação dos eixos principais baricêntricos e os valores correspondentes dos momentos de inércia para a seção reta ilustrada. Despreze os efeitos dos arredondamentos no cálculo de P_{xy} . (Os momentos de inércia I_x e I_y do perfil angular são dados na Fig. 9.13.)

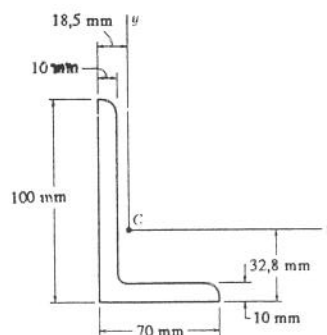


Figura P9.61

9.62 Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia e o produto de inércia do quarto de círculo do Prob. 9.50 em relação aos novos eixos obtidos pela rotação dos eixos x e y em torno de O , (a) de um ângulo de 30° no sentido anti-horário e (b) de um ângulo de 45° no sentido anti-horário.

9.63 Usando o círculo de Mohr, determine os momentos de inércia e o produto de inércia da superfície do Prob. 9.54 em relação a novos eixos baricêntricos obtidos pela rotação dos eixos x e y de um ângulo de 30° , no sentido anti-horário.

9.64 Determine a orientação dos eixos principais baricêntricos e os correspondentes valores dos momentos de inércia da superfície do Prob. 9.51 utilizando o círculo de Mohr. (São dados $I_x = 6,16 \times 10^6 \text{ mm}^4$ e $I_y = 60,9 \times 10^6 \text{ mm}^4$.)

9.65 a 9.68 Utilizando o círculo de Mohr, determine a orientação dos eixos principais baricêntricos e os correspondentes valores dos momentos de inércia para as superfícies indicadas:

9.65 Superfície do Prob. 9.52.

9.66 Superfície do Prob. 9.53.

9.67 Superfície do Prob. 9.54.

9.68 Usando o círculo de Mohr, mostre que para qualquer polígono regular (tal como um pentágono) (a) o momento de inércia em relação a todos os eixos que passam pelo baricentro é o mesmo e (b) o produto de inércia em relação a qualquer par de eixos que passam pelo baricentro é zero.

***9.69** Prove que a expressão $I_u I_v - P_{uv}^2$ onde I_u , I_v e P_{uv} representam, respectivamente, os momentos e o produto de inércia de uma superfície dada em relação a dois eixos retangulares u e v que passam por um ponto O , é independente da orientação dos eixos u e v . Considerando o caso particular em que os eixos u e v correspondem ao máximo valor de P_{uv} , mostre que a expressão dada representa o quadrado do segmento da tangente ao círculo de Mohr, traçada a partir da origem das coordenadas.

***9.70** Utilizando a propriedade da invariância estabelecida no problema precedente, expresse o produto de inércia P_{xy} de uma superfície A em relação a dois eixos retangulares que passam por O em função dos momentos de inércia I_x e I_y de A e dos momentos principais de inércia I_{min} e I_{max} de A em relação a O . Aplique a fórmula obtida para calcular o produto de inércia P_{xy} da seção reta de um perfil angular de $100 \times 70 \times 10 \text{ mm}$ indicada na Fig. 9.13, sabendo que seu momento de inércia mínimo é $36,97 \text{ cm}^4$.

Momentos de Inércia de Corpos

9.11. Momento de Inércia de um Corpo. Consideremos uma pequena massa Δm presa a uma haste de massa desprezível que pode girar livremente em torno de um eixo AA' (Fig. 9.20a). Se for aplicado um binário ao sistema, a haste e a massa, consideradas inicialmente em repouso, começarão a girar em torno de AA' . Os detalhes desse movimento serão estudados, mais tarde, em Dinâmica. No momento desejamos somente indicar que o tempo necessário para o sistema alcançar uma certa velocidade de rotação é proporcional à massa Δm e ao quadrado da distância r . O produto $r^2 \Delta m$ fornece, portanto, uma medida da *inércia* do sistema, isto é, da resistência que o sistema oferece quando tentamos colocá-lo em movimento. Por essa razão, o produto $r^2 \Delta m$ é denominado *momento de inércia* da massa Δm em relação ao eixo AA' .

Consideremos agora um corpo de massa m que deve girar em torno de um eixo AA' (Fig. 9.20b). Dividindo o corpo em elementos de massa $\Delta m_1, \Delta m_2$ etc., verificamos que a resistência oferecida pelo corpo é medida pela soma $r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots$. Essa soma define, portanto, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo AA' . Aumentando o número de elementos, verificamos que o momento de inércia no limite é igual à integral

$$I = \int r^2 dm \quad (9.28)$$

O *raio de giração* k^* do corpo em relação ao eixo AA' é definido pela relação

$$I = k^2 m \quad \text{ou} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (9.29)$$

* Também comumente chamado *raio de inércia*. (N. do R. T.)

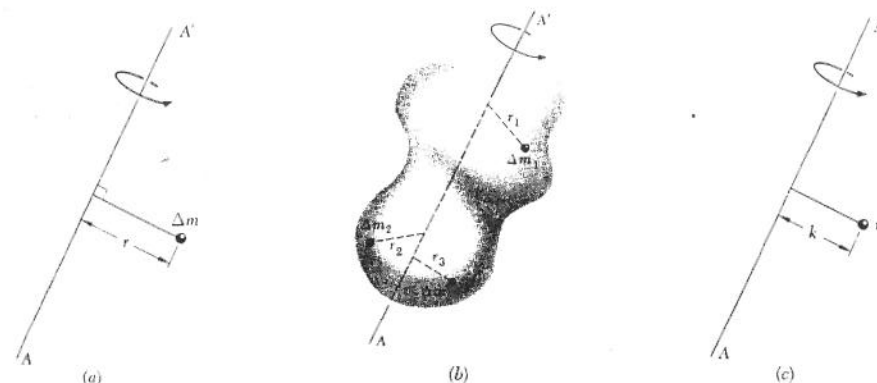


Figura 9.20

O raio de giração k representa, portanto, a distância à qual a massa do corpo deve se concentrar para que seu momento de inércia, em relação ao eixo AA' , permaneça constante (Fig. 9.20c). Se for conservada em sua forma original (Fig. 9.20b) ou se for concentrada conforme indicado na Fig. 9.20c, a massa m reagirá sempre do mesmo modo a uma rotação ou *giração* em torno de AA' .

No SI de unidades, o raio de giração k é expresso em metros e a massa, em quilogramas. O momento de inércia de uma massa, portanto, será expresso em $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo coordenado pode facilmente ser expresso em termos das coordenadas x, y, z do elemento de massa dm (Fig. 9.21). Observando, por exemplo, que o quadrado da distância r do elemento dm ao eixo y é $z^2 + x^2$, exprimimos o momento de inércia do corpo em relação ao eixo y por

$$I_y = \int r^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm$$

Expressões semelhantes podem ser obtidas para os momentos de inércia em relação aos eixos x e z . Temos, assim,

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (9.30)$$

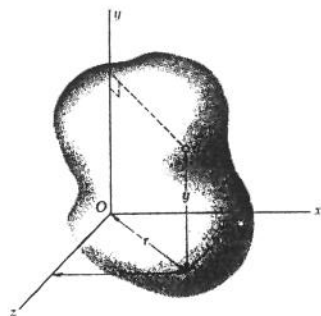


Figura 9.21

9.12. Teorema dos Eixos Paralelos. Consideremos um corpo de massa m . Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas cartesianas com origem num ponto arbitrário O , e $Gx'y'z'$ um sistema de eixos *baricêntricos* paralelos, isto é, um sistema com origem no baricentro G do corpo* e com eixos x', y', z' respectivamente paralelos a x, y e z (Fig. 9.22). Sejam $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ as coordenadas de G em relação a $Oxyz$. Escrevemos as seguintes relações entre as coordenadas x, y, z do elemento dm em relação a $Oxyz$ e suas coordenadas x', y', z' em relação aos eixos baricêntricos $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \quad y = y' + \bar{y} \quad z = z' + \bar{z} \quad (9.31)$$

Recorrendo às Eqs. (9.30), podemos exprimir o momento de inércia de um corpo em relação ao eixo x como se segue:

* Observe que o termo *baricêntrico* é usado para definir um eixo que passa pelo baricentro G do corpo, mesmo que G não coincida com o centróide (ou centro geométrico) do sólido geométrico definido pelo corpo.

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm = \int (y'^2 + z'^2) dm + \\ &+ 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

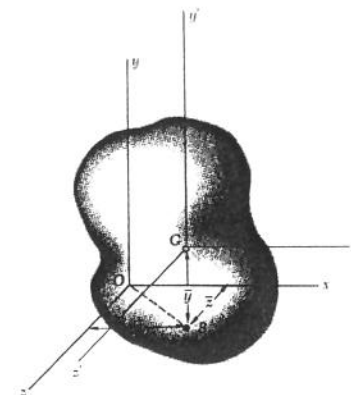


Figura 9.22

A primeira integral na expressão obtida representa o momento de inércia $\bar{I}_x$ do corpo em relação ao eixo baricêntrico x' ; as segunda e terceira integrais representam os momentos de primeira ordem do corpo em relação aos planos $z'x'$ e $x'y'$, respectivamente, e, como ambos os planos contêm G , as duas integrais são nulas; a última integral é igual à massa total m do corpo. Temos, portanto,

$$I_x = \bar{I}_x + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \quad (9.32)$$

e, analogamente,

$$I_y = \bar{I}_y + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \quad I_z = \bar{I}_z + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (9.32')$$

Podemos verificar facilmente da Fig. 9.22 que a soma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa o quadrado da distância OB entre os eixos y e y' . Analogamente, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ e $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representam os quadrados das distâncias entre os eixos x e x' e os eixos z e z' , respectivamente. Sendo d a distância entre um eixo arbitrário AA' e um eixo baricêntrico paralelo BB' (Fig. 9.23), podemos, portanto, escrever a seguinte relação geral entre o momento de inércia I de um corpo em relação a AA' e seu momento de inércia $\bar{I}$ em relação a BB' :

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

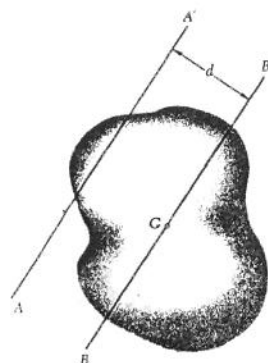


Figura 9.23

Expressando os momentos de inércia em termos dos correspondentes raios de giração, podemos também escrever

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (9.34)$$

onde k e $\bar{k}$ representam os raios de giração em relação a AA' e BB' , respectivamente.

9.13. Momentos de Inércia de Placas Delgadas. Consideremos uma placa fina de espessura uniforme t , feita de um material homogêneo de massa específica ρ (massa específica = massa por unidade de volume). O momento de inércia da placa em relação a um eixo AA' contido no plano da placa (Fig. 9.24a) é

$$I_{AA'} = \int r^2 dm$$

Como $dm = \rho t dA$, escrevemos:

$$I_{AA'} = \rho t \int r^2 dA$$

Porém, r representa a distância do elemento de área dA ao eixo AA' ; a integral é, portanto, igual ao momento de inércia da superfície da placa em relação a AA' . Temos

$$I_{AA', \text{ corpo}} = \rho t I_{AA', \text{ superfície}} \quad (9.35)$$

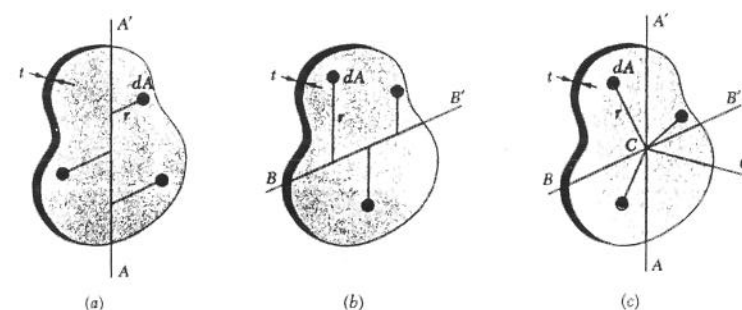


Figura 9.24

Analogamente, em relação a um eixo BB' , perpendicular a AA' (Fig. 9.24b), temos

$$I_{BB', \text{ corpo}} = \rho t I_{BB', \text{ superfície}} \quad (9.36)$$

Considerando, agora, o eixo CC' , perpendicular à placa, e que passa pelo ponto C de interseção de AA' e BB' (Fig. 9.24c), temos

$$I_{CC', \text{ corpo}} = \rho t J_C, \text{ superfície} \quad (9.37)$$

onde J_C é o momento polar de inércia da superfície da placa em relação ao ponto C .

Recordando a relação $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ existente entre os momentos de inércia polar e retangular de uma superfície, escrevemos a seguinte relação entre os momentos de inércia de uma placa fina:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \quad (9.38)$$

Placa Retangular. No caso de uma placa retangular de lados a e b (Fig. 9.25), obtemos os seguintes momentos de inércia em relação a eixos que passam pelo baricentro da placa:

$$I_{AA', \text{ corpo}} = \rho t I_{AA', \text{ superfície}} = \rho t \left(\frac{1}{12} a^3 b \right)$$

$$I_{BB', \text{ corpo}} = \rho t I_{BB', \text{ superfície}} = \rho t \left(\frac{1}{12} a b^3 \right)$$

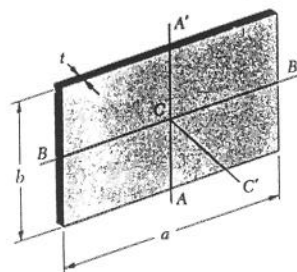


Figura 9.25

Observando que o produto $pabt$ é igual à massa m da placa, escrevemos os momentos de inércia de uma placa retangular fina como se segue:

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12} mb^2 \quad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

Placa Circular. No caso de uma placa circular, ou disco, de raio r (Fig. 9.26), escrevemos

$$I_{AA', \text{ corpo}} = \rho t I_{AA', \text{ superfície}} = \rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^4 \right)$$

Observando que o produto $\rho \pi r^2 t$ é igual à massa m da placa e que $I_{AA'} = I_{BB'}$, escrevemos o momento de inércia de uma placa circular como se segue:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4} mr^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2} mr^2 \quad (9.42)$$

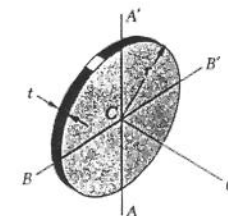


Figura 9.26

9.14. Determinação do Momento de Inércia de um Corpo Tridimensional por Integração. O momento de inércia de um corpo tridimensional é obtido calculando-se a integral $I = \int r^2 dm$. Se o corpo é feito de um material homogêneo de massa específica ρ , temos $dm = \rho dV$ e escrevemos $I = \rho \int r^2 dV$. Essa integral depende somente da forma do corpo. Para calculá-la, será geralmente necessário realizar uma integração tripla, ou pelo menos dupla.

No entanto, se o corpo possui dois planos de simetria, geralmente é possível determinar seu momento de inércia por meio de uma integração simples, escolhendo como elemento de massa dm a massa de uma fatia fina, perpendicular aos planos de simetria. No caso de corpos de revolução, por exemplo, o elemento de massa deve ser um disco fino (Fig. 9.27). Usando a fórmula (9.42), o momento de inércia do disco, em

relação ao eixo de revolução, pode ser facilmente calculado, conforme indica a Fig. 9.27. Seu momento de inércia em relação a cada um dos outros dois eixos coordenados será obtido usando-se a fórmula (9.41) e o teorema dos eixos paralelos. A integração das expressões obtidas fornecerá os momentos de inércia desejados do corpo de revolução.

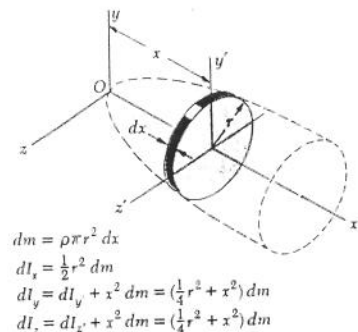


Figura 9.27 Determinação do momento de inércia de um corpo de revolução.

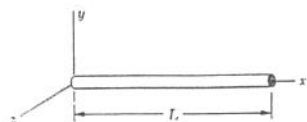
9.15. Momentos de Inércia de Corpos Compostos. Os momentos de inércia de algumas formas comuns são dados na Fig. 9.28. O momento de inércia, em relação a um certo eixo, de um corpo formado por várias dessas formas simples pode ser obtido calculando-se os momentos de inércia de suas partes componentes em relação ao eixo desejado e somando-as em seguida. Deve-se observar, como já havíamos feito para o caso de superfícies, que o raio de giração do corpo composto *não pode* ser obtido adicionando-se os raios de giração de suas partes componentes.

Problema Resolvido 9.9

Determinar o momento de inércia de uma haste delgada de comprimento L e massa m em relação a um eixo perpendicular à haste e passando por uma de suas extremidades.

Haste delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa retangular fina		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma retangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco fino		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cone circular		$I_x = \frac{3}{8} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{32} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfere		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

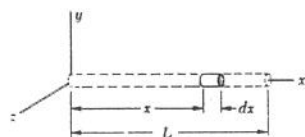
Figura 9.28 Momentos de inércia de sólidos de formas geométricas comuns.



Solução. Escolhendo o elemento diferencial de massa indicado, escrevemos

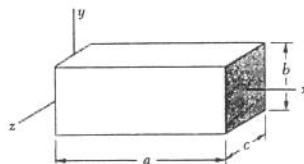
$$dm = \frac{m}{L} dx$$

$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \left[\frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \right]_0^L \quad I_y = \frac{mL^2}{3} \Leftarrow$$



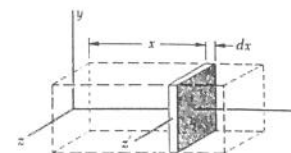
Problema Resolvido 9.10

Determinar o momento de inércia do prisma retangular homogêneo ilustrado em relação ao eixo x .



Solução. Escolhemos como elemento diferencial de massa a fatia delgada ilustrada, para a qual

$$dm = \rho b c dx$$



Reportando-nos à Seção 9.13, encontramos que o momento de inércia do elemento em relação ao eixo z' é

$$dI_{z'} = \frac{1}{12} b^2 dm$$

Aplicando o teorema dos eixos paralelos, obtemos o momento de inércia da fatia em relação ao eixo z é

$$dI_z = dI_{z'} + x^2 dm = \frac{1}{12} b^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho b c dx$$

Integrando de $x = 0$ a $x = a$, obtemos

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a \left(\frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho b c dx = \rho a b c \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} a^2 \right)$$

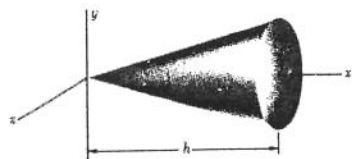
Como a massa total do prisma é $m = \rho a b c$, podemos escrever

$$I_z = m \left(\frac{1}{12} b^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) \quad I_z = \frac{1}{12} m (4a^2 + b^2) \Leftarrow$$

Observamos que, se o prisma é delgado, b é pequeno comparado com a e a expressão para I_z reduz-se a $ma^2/3$, que é o resultado obtido no Problema Resolvido 9.9 quando $L = a$.

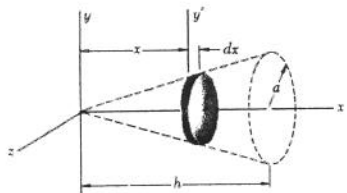
Problema Resolvido 9.11

Determinar o momento de inércia de um cone circular reto em relação a: (a) seu eixo longitudinal, (b) um eixo que passa pelo vértice do cone e é perpendicular a seu eixo longitudinal e (c) um eixo que passa pelo baricentro do cone e é perpendicular a seu eixo longitudinal.



Solução. Escolhemos o elemento diferencial de massa ilustrado:

$$r = a \frac{x}{h} \quad dm = \rho \pi r^2 dx = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx$$



a) **Momento de Inércia I_x .** Usando a expressão derivada na Seção 9.13 para um disco fino, calculamos o momento de inércia do elemento diferencial em relação ao eixo x:

$$dI_x = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \left(a \frac{x}{h}\right)^2 \left(\rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx\right) = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} x^4 dx$$

Integrando de $x = 0$ a $x = h$, obtemos

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} x^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{1}{10} \rho \pi a^4 h$$

Como a massa total do cone é $m = \frac{1}{3} \rho \pi a^2 h$, podemos escrever

$$I_x = \frac{1}{10} \rho \pi a^4 h = \frac{3}{10} a^2 \left(\frac{1}{3} \rho \pi a^2 h\right) = \frac{3}{10} m a^2 \quad I_x = \frac{3}{10} m a^2 \Leftarrow$$

b) **Momento de Inércia I_y .** O mesmo elemento diferencial será usado. Aplicando o teorema dos eixos paralelos e usando a expressão deduzida na Seção 9.13 para um disco fino, escrevemos

$$dI_y = dI_{y'} + x^2 dm = \frac{1}{4} r^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2\right) dm$$

Substituindo r e dm por seus valores obtemos

$$dI_y = \left(\frac{1}{4} \frac{a^2}{h^2} x^2 + x^2\right) \left(\rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx\right) = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right) x^4 dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right) x^4 dx = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right) \frac{h^5}{5}$$

Introduzindo a massa total m do cone, reescrevemos I_y como se segue:

$$I_y = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2\right) \frac{1}{3} \rho \pi a^2 h \quad I_y = \frac{3}{5} m \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2\right) \Leftarrow$$

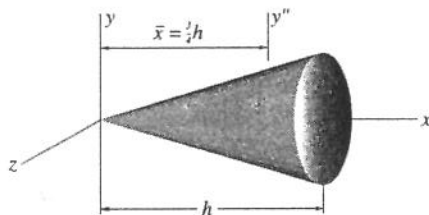
c) **Momento de Inércia I_y .** Aplicamos o teorema dos eixos paralelos e escrevemos

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m \bar{x}^2$$

Resolvendo para $\bar{I}_{y''}$ e recordando que $\bar{x} = \frac{3}{4}h$, temos

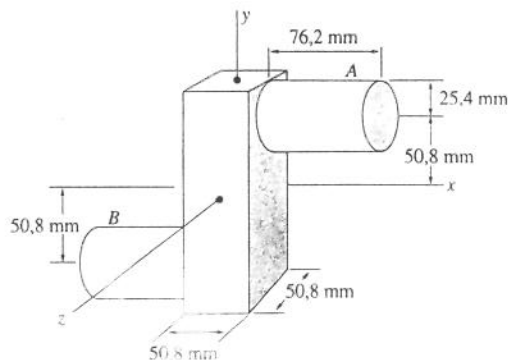
$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \frac{3}{5}m \left(\frac{1}{4}a^2 + h^2 \right) - m \left(\frac{3}{4}h \right)^2$$

$$\bar{I}_{y''} = \frac{3}{20}m \left(a^2 + \frac{1}{4}h^2 \right) \leftarrow$$



Problema Resolvido 9.12

Um forjado de aço consiste em um prisma retangular de 152,4 mm $\times$ 50,8 mm $\times$ 50,8 mm e em dois cilindros de 50,8 mm de diâmetro e 76,2 mm de comprimento, como ilustrado. Determinar o momento de inércia em relação aos eixos coordenados. (Massa específica do aço: $\rho = 7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)



Cálculo das Massas

Prisma. $V = (50,8 \text{ mm})^2 (152,4 \text{ mm}) = 0,393 \times 10^6 \text{ mm}^3$ ou, como $1 \text{ mm}^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3$,

$$V = 0,393 \times 10^6 \times 10^{-9} \text{ m}^3 = 0,393 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$m = \rho V = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (0,393 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 3,09 \text{ kg}$$

Cada Cilindro

$$V = \pi r^2 h = \pi (25,4 \text{ mm})^2 (76,2 \text{ mm}) = 0,154 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$= 0,154 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$m = \rho V = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (0,154 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 1,21 \text{ kg}$$

Momentos de Inércia. Os momentos de inércia de cada componente são calculados a partir da Fig. 9.28, usando quando necessário o teorema dos eixos paralelos.

Prisma

$$I_x = I_z = \frac{1}{12} (3,09 \text{ kg}) [(152,4 \text{ mm})^2 + (50,8 \text{ mm})^2] = 6,64 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} (3,09 \text{ kg}) [(50,8 \text{ mm})^2 + (50,8 \text{ mm})^2] = 1,33 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Cada Cilindro

$$I_x = \frac{1}{2} m a^2 + m \bar{y}^2 = \frac{1}{2} (1,21 \text{ kg}) (25,4 \text{ mm})^2 +$$

$$+ (1,21 \text{ kg}) (50,8 \text{ mm})^2 = 3,52 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \frac{1}{12}(1,21 \text{ kg}) [3(25,4 \text{ mm})^2 + (76,2 \text{ mm})^2] + (1,21 \text{ kg})(63,5 \text{ mm})^2 = 5,67 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \frac{1}{12}(1,21 \text{ kg}) [3(25,4 \text{ mm})^2 + (76,2 \text{ mm})^2] + (1,21 \text{ kg}) (63,5 \text{ mm})^2 + (50,8 \text{ mm})^2 = 8,78 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

Corpo Inteiro. Somando os valores obtidos, e observando que $1 \text{ mm}^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$, temos

$$I_x = 6,64 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 + 2(3,52 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2) = 13,68 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

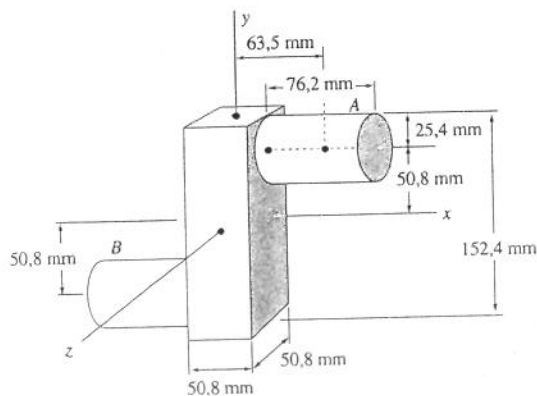
$$I_x = 13,68 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \Leftarrow$$

$$I_y = 1,33 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 + 2(5,67 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2) = 12,67 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_y = 12,67 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \Leftarrow$$

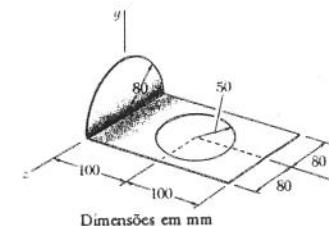
$$I_z = 6,64 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2 + 2(8,78 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2) = 24,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$$

$$I_z = 24,2 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \Leftarrow$$



Problema Resolvido 9.13

Uma peça de uma máquina é feita de uma chapa de aço de 4 mm. Sabendo que a massa específica do aço é $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine o momento de inércia da peça em relação aos eixos coordenados da figura.



Solução. A peça é formada por uma placa semicircular mais uma placa retangular menos uma placa circular.

Cálculo das Massas

Placa semicircular

$$V_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 t = \frac{1}{2} \pi (0,080 \text{ m})^2 (0,004 \text{ m}) = 40 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_1 = \rho V_1 = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(40 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0,32 \text{ kg}$$

Placa retangular

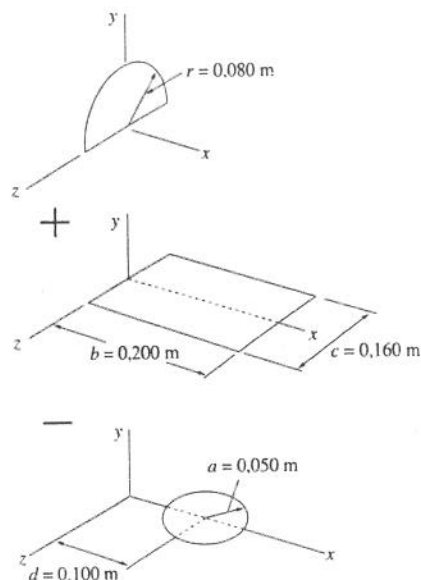
$$V_2 = (0,200 \text{ m})(0,160 \text{ m})(0,004 \text{ m}) = 0,13 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$m_2 = \rho V_2 = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(0,13 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = 1,02 \text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi (0,050 \text{ m})^2 (0,004 \text{ m}) = 31 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_3 = \rho V_3 = (7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (31 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0,247 \text{ kg}$$



Momentos de Inércia. Utilizando o método exposto na Seção 9.13, calculamos o momento de inércia de cada componente.

Placa semicircular. Da Fig. 9.28 temos, para uma placa circular de massa m e raio r :

$$I_x = \frac{1}{2} m r^2 \quad I_y = I_z = \frac{1}{4} m r^2$$

Por causa da simetria temos, para uma placa semicircular,

$$I_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \quad I_y = I_z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} m r^2 \right)$$

Sendo a massa da placa semicircular $m_1 = \frac{1}{2} m$, resulta

$$I_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) = \frac{1}{2} (0,32 \text{ kg}) (0,080 \text{ m})^2 = 1,01 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) = \frac{1}{4} m_1 r^2 = \frac{1}{4} (0,32 \text{ kg}) (0,080 \text{ m})^2 = 0,51 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa retangular

$$I_x = \frac{1}{12} m_2 c^2 = \frac{1}{12} (1,02 \text{ kg}) (0,160 \text{ m})^2 = 2,18 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{3} m_2 b^2 = \frac{1}{3} (1,02 \text{ kg}) (0,200 \text{ m})^2 = 13,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_x + I_z = (2,18 + 13,6) (10^{-3}) = 15,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \frac{1}{4} m_3 a^2 = \frac{1}{4} (0,247 \text{ kg}) (0,050 \text{ m})^2 = 0,154 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\begin{aligned} I_y = \frac{1}{2} m_3 a^2 + m_3 d^2 &= \frac{1}{2} (0,247 \text{ kg}) (0,050 \text{ m})^2 + (0,247 \text{ kg}) (0,100 \text{ m})^2 = \\ &= 2,78 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z = \frac{1}{4} m_3 a^2 + m_3 d^2 &= \frac{1}{4} (0,247 \text{ kg}) (0,050 \text{ m})^2 + (0,247 \text{ kg}) (0,100 \text{ m})^2 = \\ &= 2,62 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Peça inteira

$$I_x = (1,01 + 2,18 - 0,154)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_x = 3,04 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Leftarrow$$

$$I_y = (0,51 + 15,8 - 2,78)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = 13,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Leftarrow$$

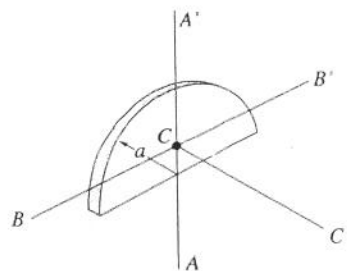
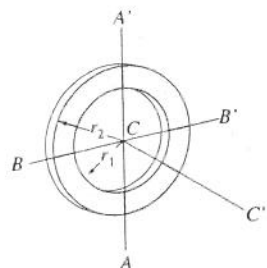
$$I_z = (0,51 + 13,6 - 2,62)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = 11,5 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Leftarrow$$

Problemas

9.72 Determine o momento de inércia de um anel de massa m , cortado de uma placa fina e uniforme, em relação (a) ao diâmetro AA' do anel e (b) ao eixo CC' perpendicular ao plano do anel.

9.73 Uma placa semicircular fina tem raio a e massa m . Determine o momento de inércia da placa em relação ao eixo baricêntrico: (a) BB' e (b) CC' .



Figuras P9.72 e P9.73

9.74 Uma placa fina de massa m tem a forma de um triângulo equilátero de lado a . Determine o momento de inércia da placa em relação aos eixos DD' e EE' paralelos aos eixos baricêntricos BB' e CC' , respectivamente.

9.75 Determine o momento de inércia da placa do Prob. 9.74 em relação aos eixos baricêntricos: (a) AA' e BB' contidos no plano da placa e (b) CC' perpendicular à placa.

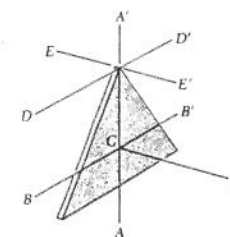


Figura P9.74

9.76 O paralelogramo da figura é feito de uma chapa fina de massa m . Determine o momento de inércia do paralelogramo em relação aos eixos: (a) y e (b) AA' perpendicular ao paralelogramo.

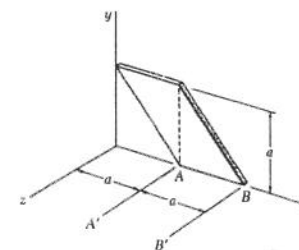


Figura P9.76

9.77 Determine o momento de inércia do paralelogramo do Prob. 9.76 em relação aos eixos: (a) x e (b) BB' perpendicular ao paralelogramo.

9.78 Determine, por integração direta, o momento de inércia, em relação ao eixo y , do cilindro circular reto mostrado, supondo a massa específica uniforme e uma massa m .

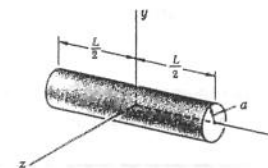


Figura P9.78

9.79 A superfície ilustrada é girada em torno do eixo x para formar um sólido homogêneo de revolução, de massa m . Determine o momento de inércia do sólido, em relação ao eixo x , em termos de m , a e n . A expressão obtida pode ser usada para verificar o valor dado na Fig. 9.28 para o cone (com $n = 1$).

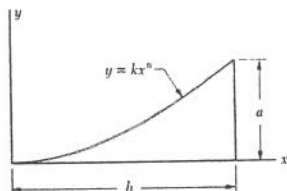
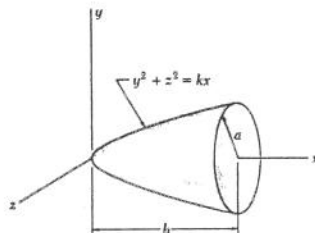


Figura P9.79

9.80 Determine, por integração direta, o momento de inércia e o raio de giração, em relação ao eixo y , do parabolóide ilustrado, supondo a massa específica uniforme e uma massa m .

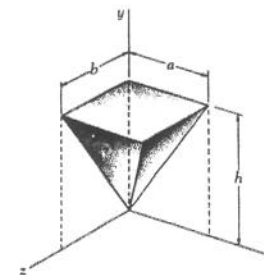
9.81 Determine, por integração direta, o momento de inércia e o raio de giração, em relação ao eixo x do parabolóide ilustrado, supondo a massa específica uniforme e uma massa m .



Figuras P9.80 e P9.81

9.82 Determine, por integração direta, o momento de inércia, em relação ao eixo y , da pirâmide ilustrada, supondo a massa específica uniforme e uma massa m .

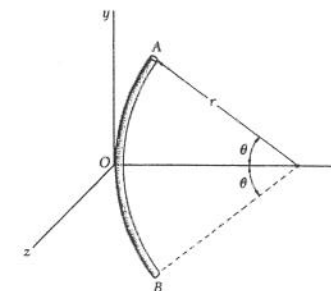
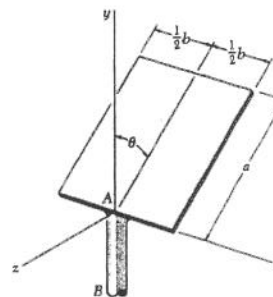
9.83 Determine, por integração direta, o momento de inércia, em relação ao eixo x , da pirâmide ilustrada, supondo a massa específica uniforme e uma massa m .



Figuras P9.82 e P9.83

9.84 Uma placa fina retangular de massa m está soldada a um eixo vertical AB com o qual forma um ângulo θ . Determine, por integração direta, o momento de inércia da placa em relação aos eixos (a) y e (b) z .

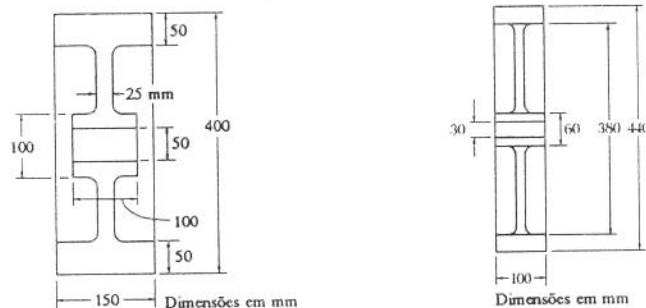
9.85 Um arame delgado de aço tem a forma de um arco de circunferência, como mostra a figura. Sendo m' a massa por unidade de comprimento do arame, determine os momentos de inércia do arco em relação aos eixos coordenados.



Figuras P9.84 e P9.85

9.86 Determine o momento de inércia e o raio de giração do volante de aço ilustrado, em relação ao eixo de rotação. Os raios do volante foram substituídos por uma chapa de 25 mm de espessura. (Massa específica do aço = $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)

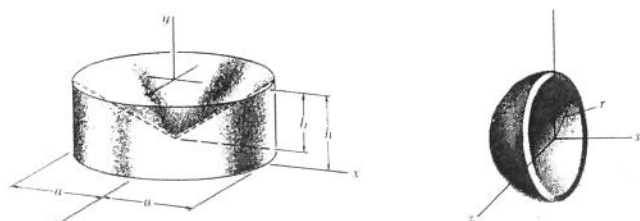
9.87 A seção reta de um pequeno volante é ilustrada. O aro e o cubo são acoplados por oito raios (dois dos quais estão mostrados na seção reta). Cada raio tem uma área de seção reta de 160 mm^2 . Determine o momento de inércia e o raio de giração do volante em relação ao eixo de rotação. (Massa específica do aço = $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)



Figuras P9.86 e P9.87

9.88 A peça da figura foi feita usando-se uma superfície cônica em um cilindro circular. Com $b = \frac{1}{2}h$, determine o momento de inércia e o raio de giração da peça em relação ao eixo y .

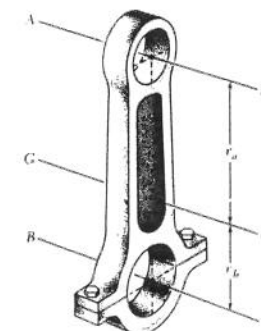
9.89 Sabendo que a concha hemisférica fina mostrada tem massa m e espessura t , determine o momento de inércia da concha em relação ao eixo x . (Sugestão: Considere a concha como formada pela remoção de um hemisfério de raio r , de um hemisfério de raio $r + t$; então despreze os termos contendo t^2 e t^3 , e mantenha aqueles termos que contêm t .)



Figuras P9.88 e P9.89

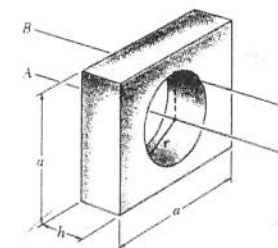
9.90 Sabendo que o momento de inércia do braço de conexão de $3,1 \text{ kg}$ da figura, em relação ao eixo AA' , é igual a $160 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, determine seu momento de inércia em relação ao eixo BB' , sendo $r_a = 204 \text{ mm}$ e $r_b = 126 \text{ mm}$.

9.91 Determinou-se experimentalmente que os momentos de inércia do braço de conexão de $1,8 \text{ kg}$ em relação aos eixos dos mancais, AA' e BB' , são, respectivamente, $I_{AA'} = 65 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $I_{BB'} = 33 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Sabendo que $r_a + r_b = 275 \text{ mm}$, determine: (a) a posição do eixo baricêntrico GG' e (b) o raio de giração em relação ao eixo GG' .



Figuras P9.90 e P9.91

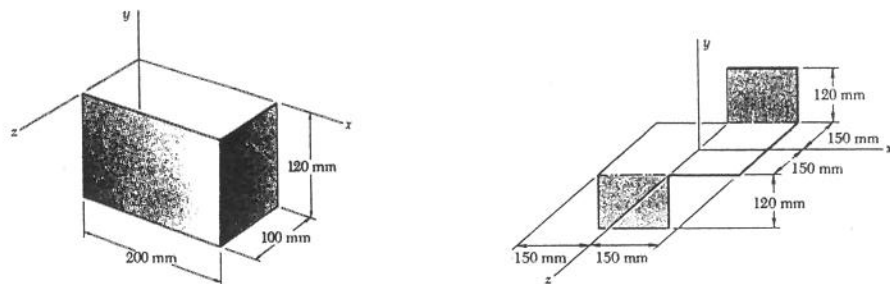
9.92 Determine o momento de inércia e o raio de giração da peça de aço da figura, em relação ao eixo BB' , quando $a = 200 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$ e $r = 75 \text{ mm}$. (A massa específica do aço é $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)



Figuras P9.92 e P9.93

9.93 Para fazer uma peça, deve-se fazer um furo circular de raio r centrado em uma chapa retangular de aço, como mostra a figura. Sendo ρ a massa específica do aço, determine: (a) o momento de inércia da peça em relação ao eixo BB' , (b) o valor de r para o qual $I_{BB'}$ é máximo, sendo a e h fixos e (c) o valor correspondente de $I_{BB'}$ e do raio de giração $k_{BB'}$.

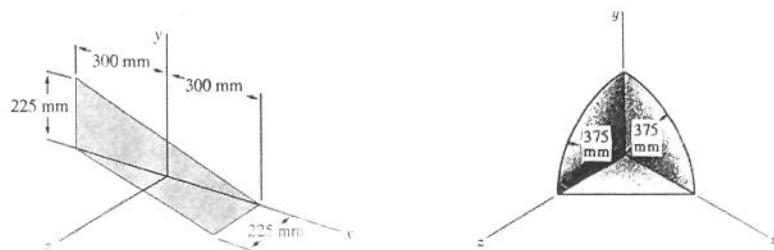
9.94 e 9.95 A peça da figura é feita de uma chapa de aço de 2 mm de espessura. Sabendo que a massa específica do aço é $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine os momentos de inércia da peça em relação aos eixos (a) x , (b) y e (c) z .



Figuras P9.94 e P9.95

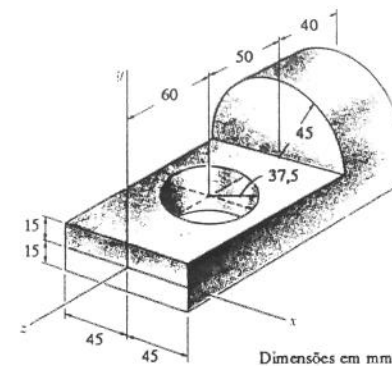
9.96 Uma lâmina de aço de 0,75 mm de espessura é usada para fazer a peça da figura. Sendo a massa específica do aço $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine o momento de inércia da peça em relação a cada eixo coordenado.

9.97 Um refletor para rastreamento por radar tem duas faces formadas por quartos de círculo de 375 mm de raio, sendo a terceira face um triângulo. O refletor é feito de chapa de alumínio de espessura uniforme e igual a 1,25 mm. Sabendo que a massa específica do alumínio é $2,72 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine o momento de inércia do refletor, em relação a cada eixo coordenado.



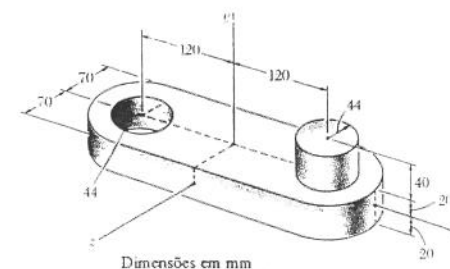
Figuras P9.96 e P9.97

9.98 e 9.99 Determine o momento de inércia da peça de aço da figura, em relação ao eixo x . (Massa específica do aço = $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)



Figuras P9.98 e P9.101

9.100 e 9.101 Determine o momento de inércia da peça de aço da figura, em relação ao eixo y . (Massa específica do aço = $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)



Figuras P9.99 e P9.100

9.102 O componente da figura é feito de fio homogêneo de massa por unidade de comprimento igual a 1,5 kg/m. Determine o momento de inércia do componente em relação ao eixo z .

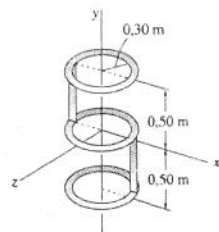


Figura P9.102

9.103 No Prob. 9.102, determine o momento de inércia do componente em relação ao eixo y.

***9.16. Momento de Inércia de um Corpo em Relação a um Eixo Arbitrário por um Ponto O. Produtos de Inércia de Corpos.** Veremos, nesta seção, como o momento de inércia de um corpo pode ser determinado em relação a um eixo arbitrário OL através da origem (Fig. 9.29), se calcularmos previamente seus momentos de inércia em relação a três eixos coordenados, bem como certas quantidades a serem definidas abaixo.

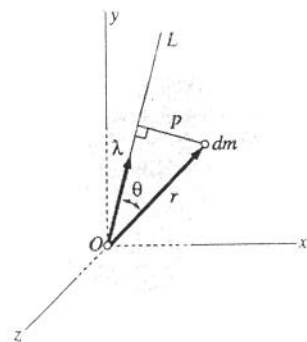


Figura 9.29

O momento de inércia de um corpo em relação a OL é representado pela integral $I_{OL} = \int p^2 dm$, onde p representa a distância do elemento de massa dm ao eixo

OL . Porém, sendo λ o vetor unitário ao longo de OL e $\mathbf{r}$ o vetor-posição do elemento dm , observamos que a distância p é igual ao módulo $\mathbf{r}$ sen θ do produto vetorial $\lambda \times \mathbf{r}$. Escrevemos, portanto,

$$I_{OL} = \int p^2 dm = \int (\lambda \times \mathbf{r})^2 dm \quad (9.43)$$

Exprimindo o quadrado do produto vetorial em termos de suas componentes cartesianas, temos

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2] dm$$

onde as componentes $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ do vetor unitário λ representam os co-senos diretores do eixo OL e as componentes x, y e z de $\mathbf{r}$ representam as coordenadas do elemento de massa dm . Desenvolvendo os quadrados na relação obtida e rearranjando os termos, escrevemos

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2\lambda_x \lambda_y \int xy dm - 2\lambda_y \lambda_z \int yz dm - 2\lambda_z \lambda_x \int zx dm \quad (9.44)$$

Recorrendo às Eqs. (9.30), observamos que as três primeiras integrais na Eq. (9.44) representam, respectivamente, os momentos de inércia I_x, I_y e I_z do corpo em relação aos eixos coordenados. As três últimas integrais na Eq. (9.44), que envolvem produtos de coordenadas, são denominadas *produtos de inércia* do corpo em relação aos eixos x e y , aos eixos y e z e aos eixos z e x , respectivamente. Escrevemos

$$P_{xy} = \int xy dm \quad P_{yz} = \int yz dm \quad P_{zx} = \int zx dm \quad (9.45)$$

Substituindo as várias integrais das Eqs. (9.30) e (9.45) em (9.44), temos

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2P_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2P_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2P_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (9.46)$$

Observamos que a definição dos produtos de inércia de um corpo, dada nas Eqs. (9.45), é uma extensão da definição do produto de inércia de uma superfície (Seção 9.8). Produtos de inércia de um corpo reduzem-se a zero sob as mesmas condições de simetria dos produtos de inércia de superfície, e o teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia de corpos é expresso por relações semelhantes à fórmula deduzida para o produto de inércia de uma superfície. Substituindo nas Eqs. (9.45) x, y, z dados pelas Eqs. (9.31), verificamos que

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \bar{P}_{x'y'} + m \bar{x} \bar{y} \\ P_{yz} &= \bar{P}_{y'z'} + m \bar{y} \bar{z} \\ P_{zx} &= \bar{P}_{z'x'} + m \bar{z} \bar{x} \end{aligned} \quad (9.47)$$

onde $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z}$ são as coordenadas do baricentro G do corpo, e $\bar{P}_{x'y'}, \bar{P}_{y'z'}, \bar{P}_{z'x'}$ designam os produtos de inércia em relação aos eixos baricêntricos x', y', z' (Fig. 9.22).

***9.17. Elipsóide de Inércia. Eixos Principais de Inércia.** Suponhamos que o momento de inércia do corpo considerado na seção precedente tenha sido determinado em relação a um grande número de eixos OL que passam pelo ponto fixo O , e que um ponto Q tenha sido localizado sobre cada eixo OL a uma distância $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ de O . O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos é uma superfície (Fig. 9.30). A equação dessa superfície pode ser obtida substituindo-se na Eq. (9.46) I_{OL} por $1/(OQ)^2$ e multiplicando-se os membros da equação por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ) \lambda_x = x \quad (OQ) \lambda_y = y \quad (OQ) \lambda_z = z$$

onde x, y, z representam as coordenadas cartesianas do ponto Q da superfície, obtemos

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2P_{xy} xy - 2P_{yz} yz - 2P_{zx} zx = 1 \quad (9.48)$$

A equação obtida é de uma quádrlica. Como o momento de inércia I_{OL} é diferente de zero para cada eixo OL , nenhum ponto Q pode estar a uma distância infinita de O . Assim, a quádrlica obtida é um elipsóide. Esse elipsóide, que define o momento de inércia do corpo em relação a qualquer eixo através de O , é conhecido como o elipsóide de inércia do corpo em O .

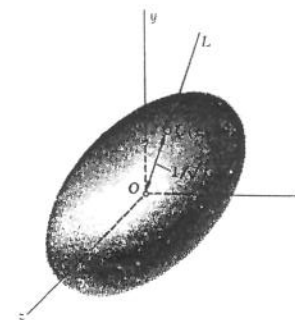


Figura 9.30

Observamos que, girando-se os eixos na Figura 9.30, os coeficientes da equação da definição do elipsóide variam, visto que estes são iguais aos momentos e produtos de inércia do corpo em relação aos eixos coordenados girados. Entretanto, o elipsóide em si permanece inalterado, visto que sua forma depende somente da distribuição de massa do corpo considerado. Suponhamos, agora, que escolhamos como eixos coordenados os eixos principais x', y', z' do elipsóide de inércia (Figura 9.31). A equação do elipsóide em relação a esses eixos coordenados será da forma

$$I_{x'} x'^2 + I_{y'} y'^2 + I_{z'} z'^2 = 1 \quad (9.49)$$

que não contém nenhum produto de coordenadas. Assim, os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos x', y', z' são nulos. Os eixos x', y', z' são conhecidos como *eixos principais de inércia* do corpo em O , e os coeficientes $I_{x'}, I_{y'}, I_{z'}$ como os *momentos principais de inércia* do corpo em O . Observe que, dado um corpo de forma arbitrária e um ponto O , é sempre possível determinar eixos que são eixos principais de inércia do corpo em O , isto é, eixos em relação aos quais os produtos de inércia são nulos. Na verdade, não importa quão estranha ou irregular seja a forma do corpo, seus momentos de inércia em relação a eixos através de O definirão um elipsóide, e esse elipsóide terá eixos principais que, por definição, serão os eixos principais do corpo em O .

Se usamos os eixos principais de inércia x', y', z' como eixos coordenados, a expressão obtida na Eq. (9.46), para o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário pelo ponto O , reduz-se a

$$I_{OL} = I_{x'} \lambda_x^2 + I_{y'} \lambda_y^2 + I_{z'} \lambda_z^2 \quad (9.50)$$

* Observe que a igualdade é apenas numérica pois $\frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}$ não tem dimensão de comprimento. O que se pretendeu

dizer é que existe uma distância proporcional a $\frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}$. (N. do R. T.)

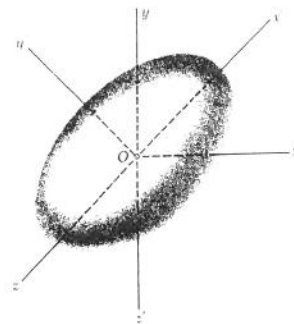


Figura 9.31

Embora a determinação dos eixos principais de inércia de um corpo de forma arbitrária seja um tanto complicada e exija a solução de uma equação cúbica,* existem muitos casos em que esses eixos podem ser localizados facilmente. Considere, por exemplo, o cone homogêneo de base elíptica ilustrado na Fig. 9.32; esse cone possui dois planos de simetria OAA' e OBB' mutuamente perpendiculares. Verificamos da definição (9.45) que, se os planos $x'y'$ e $y'z'$ são escolhidos de modo que coincidam com os dois planos de simetria, todos os produtos de inércia são nulos. Os eixos x' , y' e z' assim selecionados são, portanto, os eixos principais de inércia do cone relativos ao ponto O . No caso do tetraedro regular homogêneo $OABC$ visto na Fig. 9.33, a reta que liga o vértice O ao centro D da face oposta é um eixo principal de inércia relativo ao ponto O , e qualquer reta por O , perpendicular a OD , é também um eixo principal de inércia relativo ao ponto O . Essa propriedade pode ser reconhecida se observamos que uma rotação de 120° em torno de OD deixa a figura e a distribuição de massa do tetraedro inalteradas. Segue-se que o elipsóide de inércia em O também permanece inalterado sob essa rotação. O elipsóide, portanto, é de revolução em torno de OD , e a reta OD , bem como qualquer reta perpendicular a OD por O , deve ser um eixo principal do elipsóide.

* Cf. Synge and Griffith, *Principles of Mechanics*. New York, McGraw-Hill. Seção 11.3.

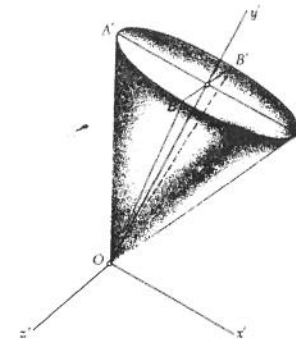


Figura 9.32

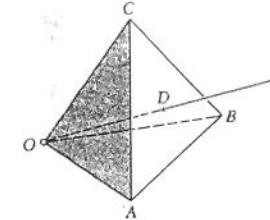
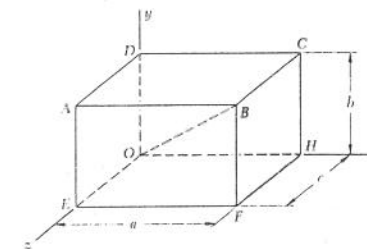


Figura 9.33

Problema Resolvido 9.14

Considere um prisma retangular de massa m e lados a , b e c . Determinar: (a) os momentos e produtos de inércia do prisma em relação aos eixos coordenados indicados e (b) seu momento de inércia em relação à diagonal OB .



a) Momentos e Produtos de Inércia em Relação aos Eixos Coordenados. Momentos de Inércia. Introduzindo os eixos baricêntricos x' , y' , z' em relação aos quais os momentos de inércia são dados na Fig. 9.28, aplicamos o teorema dos eixos paralelos

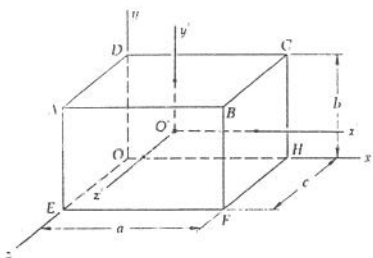
$$I_x = \bar{I}_x + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2\right)$$

$$I_x = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2) \Leftarrow$$

Analogamente,

$$I_y = \frac{1}{3}m(c^2 + a^2)$$

$$I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \Leftarrow$$



Produtos de Inércia. Por causa da simetria, os produtos de inércia em relação aos eixos baricêntricos x' , y' , z' são nulos, e esses eixos são eixos principais de inércia. Usando o teorema dos eixos paralelos, temos

$$P_{xy} = \bar{P}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}b\right)$$

$$P_{xy} = \frac{1}{4}mab \Leftarrow$$

Analogamente, $P_{yz} = \frac{1}{4}mbc$

$$P_{zx} = \frac{1}{4}mca \Leftarrow$$

b) **Momento de Inércia em Relação a OB.** Lembrando a Eq. (9.46):

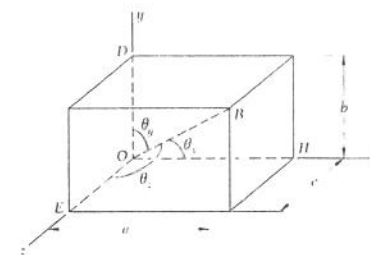
$$I_{OB} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2P_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2P_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2P_{zx} \lambda_z \lambda_x$$

onde os co-senos diretores de OB são

$$\lambda_x = \cos \theta_x = \frac{(OH)}{(OB)} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$



Substituindo os valores obtidos para os momentos e produtos de inércia e para os co-senos diretores:

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left[\frac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \frac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \frac{1}{2}ma^2b^2 - \frac{1}{2}mb^2c^2 - \frac{1}{2}mc^2a^2 \right]$$

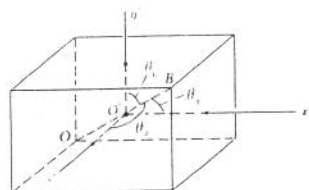
$$I_{OB} = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftarrow$$

Solução Alternativa. O momento de inércia I_{OB} pode ser obtido diretamente dos momentos principais de inércia $\bar{I}_x, \bar{I}_y, \bar{I}_z$, visto que a linha OB passa pelo baricentro O' . Como os eixos x' , y' e z' são eixos principais de inércia, usamos a Eq. (9.50) e obtemos

$$I_{OB} = \bar{I}_x \lambda_x^2 + \bar{I}_y \lambda_y^2 + \bar{I}_z \lambda_z^2$$

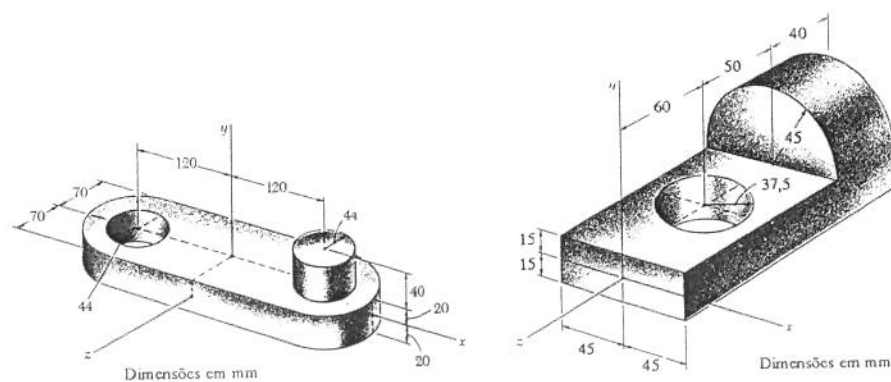
$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left[\frac{m}{12} (b^2 + c^2) a^2 + \frac{m}{12} (c^2 + a^2) b^2 + \frac{m}{12} (a^2 + b^2) c^2 \right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6} \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \leftarrow$$



Problemas

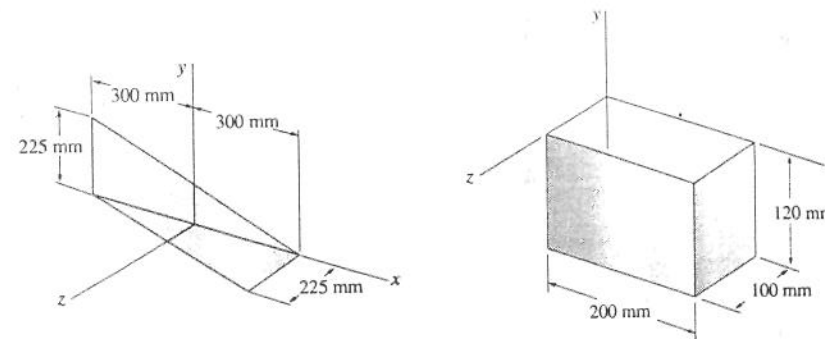
9.104 e 9.105 Determine os produtos de inércia P_{xy} , P_{yz} e P_{zx} da peça de aço da figura. (Massa específica do aço = $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$.)



Figuras P9.104 e P9.105

9.106 A peça da figura é feita de chapa de aço de 0,75 mm de espessura. Sabendo que a massa específica do aço é $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine os produtos de inércia P_{xy} , P_{yz} e P_{zx} da peça. (Sugestão: Veja os resultados do Problema Resolvido 9.6.)

9.107 A peça da figura é feita de chapa de aço de 2 mm de espessura. Sabendo que a massa específica do aço é $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, calcule os produtos de inércia P_{xy} , P_{yz} e P_{zx} da peça.



Figuras P9.106 e P9.107

9.108 Um fio homogêneo, de massa por unidade de comprimento 1,5 kg/m, é usado para fazer a peça da figura. Determine seus produtos de inércia P_{xy} , P_{yz} e P_{zx} .

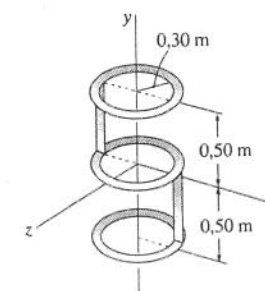


Figura P9.108

9.109 Calcule os produtos de inércia P_{xy} , P_{yz} e P_{zx} para o refletor do Prob. 9.97. (Sugestão: Veja os resultados do Problema Resolvido 9.6 e do Prob. 9.50.)

9.110 Para o tetraedro homogêneo de massa m da figura, (a) calcule por integração direta o produto de inércia P_{zx} e (b) deduza os valores de P_{xy} e P_{yz} do resultado do item (a).

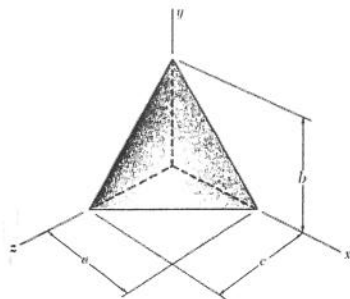


Figura P9.110

9.111 Complete a dedução da Eq. 9.47 que expressa o teorema dos eixos paralelos para os produtos de inércia.

9.112 Determine o momento de inércia do prisma retangular do Problema Resolvido 9.14, em relação à diagonal OF da base.

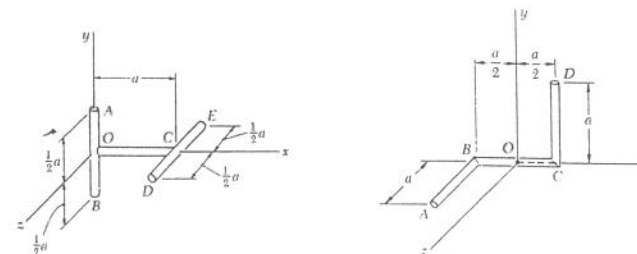
9.113 Determine o momento de inércia do cone circular reto do Problema Resolvido 9.11, em relação à uma geratriz do cone.

9.114 Determine o momento de inércia da peça do Problema Resolvido 9.13 em relação a um eixo que passa pela origem e cujo vetor unitário é $\lambda = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

9.115 Determine o momento de inércia da peça do Prob. 9.106 em relação a um eixo que passa pela origem e que forma ângulos iguais com os eixos x , y e z .

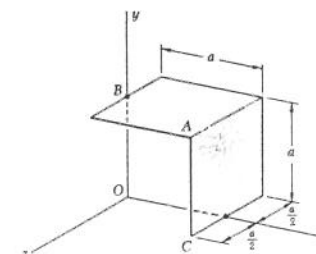
9.116 e 9.117 Três barras uniformes, cada uma de massa m , são soldadas como mostra a figura. Determine: (a) os momentos e os produtos de inércia em relação aos eixos coordenados e (b) o momento de inércia em relação à reta que une a origem O ao ponto D .

9.118 A placa fina, dobrada, da figura, é homogênea e tem massa m . Determine seu momento de inércia em relação à reta que une a origem O ao ponto A .



Figuras P9.116 e P9.117

9.119 Para a peça do Prob. 9.118, determine o momento de inércia em relação à reta que une os pontos B e C .



Figuras P9.118 e P9.119

9.120 Considere um cilindro circular, homogêneo, de raio a e comprimento L . Calcule o valor da razão a/L para o qual o elipsóide de inércia é uma superfície esférica quando calculado: (a) no baricentro do cilindro e (b) no centro de uma de suas bases.

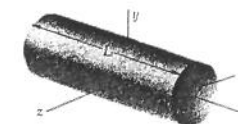


Figura P9.120

9.121 Determine o valor da razão a/h para o qual o elipsóide de inércia do cone circular reto do Problema Resolvido 9.11 é uma superfície esférica, quando calculado: (a) no vértice do cone e (b) no baricentro do cone.

9.122 Considere um cubo de massa m e lado a . (a) Mostre que o elipsóide de inércia no centro do cubo é uma esfera, e use essas propriedades para determinar o momento de inércia do cubo em relação a uma de suas diagonais. (b) Mostre que o elipsóide de inércia em um dos vértices do cubo é um elipsóide de revolução, e determine os momentos principais de inércia do cubo nesse ponto.

9.123 Dado um corpo qualquer e três eixos ortogonais, x , y e z , prove que o momento de inércia do corpo em relação a qualquer um dos três eixos não pode ser maior que a soma dos momentos de inércia do corpo em relação aos outros dois eixos; isto é, prove que a desigualdade $I_x \leq I_y + I_z$ é satisfeita, bem como duas outras desigualdades semelhantes. Além disso, prove que, se o corpo é homogêneo e de revolução, e se x é o eixo de revolução e y um eixo normal a este, então $I_y \geq \frac{1}{2} I_x$.

9.124 Dado um corpo homogêneo de massa m e de forma arbitrária, e três eixos ortogonais x , y e z de origem O , prove que a soma $I_x + I_y + I_z$ dos momentos de inércia do corpo não pode ser menor que a soma calculada para uma esfera de mesma massa e mesmo material centrada em O . Além disso prove, usando o resultado do Prob. 9.123, que, se o corpo é de revolução em torno do eixo x , então seu momento de inércia I_y em relação a um eixo y normal a x deve satisfazer a desigualdade

$$I_y \geq \frac{3}{10} ma^2$$

onde a é o raio da esfera de mesma massa e mesmo material.

Problemas de Recapitulação

9.125 Determine o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo: (a) x e (b) y .

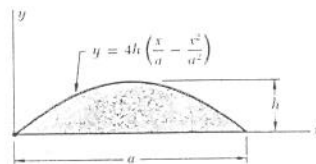


Figura P9.125

9.126 Um semi-anel de raio r e massa m é feito de arame fino. Determine seu momento de inércia em relação ao eixo: (a) AA' e (b) BB' .

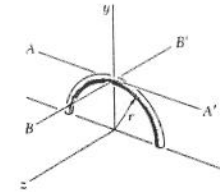
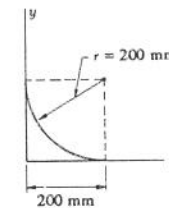


Figura P9.126

9.127 Determine o produto de inércia da superfície sombreada em relação aos eixos x e y . (Sugestão: Utilize a resposta do Prob. 9.50.)

9.128 Determine o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo y .

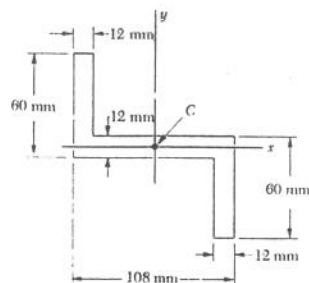


Figuras P9.127 e P9.128

9.129 Determine a orientação dos eixos principais que têm origem no baricentro C e os correspondentes valores do momento de inércia para a superfície sombreada da figura.

9.130 Determine os momentos de inércia baricêntricos, $\bar{I}_x$ e $\bar{I}_y$, e os raios de giração baricêntricos, $\bar{k}_x$ e $\bar{k}_y$, para a superfície sombreada da figura.

9.131 A peça da figura é feita de chapa de aço de 2 mm de espessura. Sabendo que a massa específica do aço é $7,85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, determine o momento de inércia e o raio de giração em relação ao eixo y .



Figuras P9.129 e P9.130

9.132 Determine o momento de inércia e o raio de giração em relação ao eixo x da peça do Prob. 9.131.

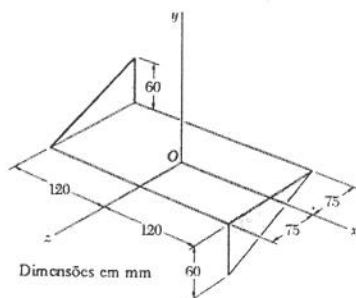


Figura P9.131

9.133 Determine o momento polar de inércia e o raio polar de giração de um triângulo equilátero de lado a em relação a um de seus vértices.

9.134 Doze hastes uniformes e delgadas, cada uma de comprimento l , são soldadas para formar um corpo cúbico. Sendo m a massa total das doze hastes, determine o momento de inércia do corpo em relação ao eixo x .

9.135 Determine de maneira aproximada o momento de inércia da superfície sombreada em relação ao eixo (a) x e (b) y .

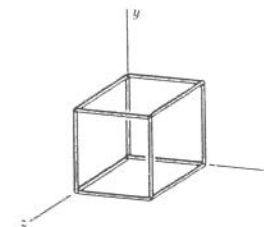
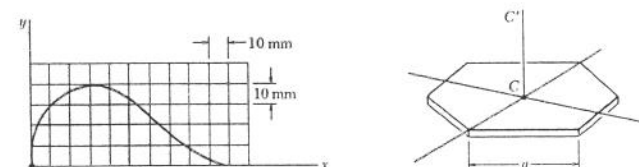


Figura P.134

9.136 O hexágono de lado a é feito de uma chapa fina e tem massa m . Calcule seus momentos de inércia e raio de giração em relação ao eixo CC' , perpendicular ao hexágono.



Figuras P9.135 e P9.136

Recapitulação e Sumário

Na primeira metade deste capítulo estudamos a determinação da resultante $\mathbf{R}$ de forças $\Delta \mathbf{F}$ – distribuídas sobre uma superfície plana de área A – cujos módulos são proporcionais às áreas ΔA dos elementos de superfície em que atuam e à distância y dos elementos de superfície a um dado eixo x , isto é, $\Delta F = k y \Delta A$. Verificamos que o módulo da resultante $\mathbf{R}$ é proporcional ao momento de primeira ordem $Q_x = \int y dA$ da superfície de área A , enquanto que o momento de $\mathbf{R}$ em relação ao eixo x é proporcional ao *momento de segunda ordem* ou momento de inércia $I_x = \int y^2 dA$ da superfície de área A em relação ao mesmo eixo [Seção 9.2].

Momentos axiais de inércia

Os momentos axiais de inércia I_x e I_y da superfície de área A [Seção 9.3] foram obtidos calculando as integrais

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad (9.1)$$

O cálculo pode ser reduzido a integrais simples se dA for tomado igual a área de uma tira fina paralela a um dos eixos coordenados. Também é possível calcular I_x e I_y com a mesma tira elementar (Fig. 9.34) fazendo-se uso da expressão do momento de inércia de uma superfície retangular [Problema Resolvido 9.3].

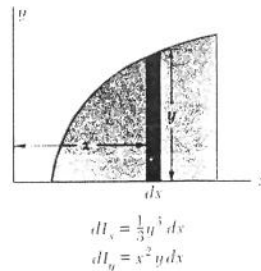


Figura 9.34

Momento polar de inércia

O momento polar de inércia de uma superfície de área A em relação ao polo O [Seção 9.4] foi definido por

$$J_O = \int r^2 dA \quad (9.3)$$

onde r é a distância de O ao elemento de superfície de área dA (Fig. 9.35). Notando que $r^2 = x^2 + y^2$ obtivemos a relação

$$J_O = I_x + I_y \quad (9.4)$$

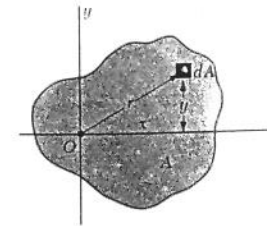


Figura 9.35

Raio de giração

O raio de giração da superfície de área A em relação ao eixo x [Seção 9.5] é, por definição, a distância k_x tal que $I_x = k_x^2 A$. Definições semelhantes do raio de giração em relação ao eixo y e ao ponto O dão

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}} \quad (9.5-9.7)$$

Teorema dos eixos paralelos

O teorema dos eixos paralelos foi enunciado na Seção 9.6. Ele afirma que o momento de inércia de uma superfície de área A em relação a um eixo AA' (Fig. 9.36) é igual ao momento de inércia $\bar{I}$ da mesma superfície em relação a um eixo BB' , que passa pelo centróide da superfície e é paralelo a AA' mais o produto da área A pelo quadrado da distância d entre os dois eixos:

$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad (9.9)$$

Esta fórmula também pode ser usada para calcular o momento de inércia $\bar{I}$ de uma superfície em relação a um eixo baricêntrico BB' , se for conhecido o momento de inércia I em relação a um eixo AA' paralelo a BB' . Convém notar que neste caso o produto Ad^2 deve ser subtraído do momento de inércia conhecido I .

Uma relação semelhante é válida para os momentos de inércia polares J_O de uma superfície em relação a um ponto O e J_c , em relação ao centróide C . Sendo d a distância entre O e C temos

$$J_O = J_c + Ad^2 \quad (9.11)$$

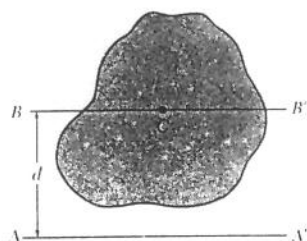


Figura 9.36

Superfícies compostas

O teorema dos eixos paralelos pode ser muito útil para o cálculo do *momento de inércia de uma superfície composta* em relação a um eixo dado [Seção 9.7]. Considerando separadamente as partes, calcula-se inicialmente o momento de inércia de cada superfície em relação a um eixo baricêntrico paralelo ao eixo dado, utilizando, sempre que possível, os dados das Figuras 9.12 e 9.13; o teorema dos eixos paralelos é então aplicado para se determinar o momento de inércia de cada parte em relação ao eixo dado e, finalmente, somam-se os vários valores obtidos [Problemas Resolvidos 9.4 e 9.5].

Produto de inércia

As Seções 9.8 e 9.10 foram dedicadas à transformação dos momentos de inércia de uma superfície por *rotações dos eixos coordenados*. Começamos definindo o *produto de inércia de uma superfície de área A*

$$P_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.12)$$

e mostramos que $P_{xy} = 0$ se a superfície é simétrica em relação a um ou ambos os eixos coordenados. Deduzimos também o *teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia*. Obtivemos

$$P_{xy} = \bar{P}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \quad (9.13)$$

onde $\bar{P}_{x'y'}$ é o produto de inércia da superfície em relação a eixos baricêntricos $x'y'$ paralelos aos eixos xy e $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as coordenadas do centróide da superfície [Seção 9.8].

Rotação de eixos

Na Seção 9.9 calculamos os momentos e produtos de inércia I_u , I_v e P_{uv} de uma superfície em relação a eixos uv , obtidos através da rotação dos eixos coordenados xy de um ângulo θ no sentido anti-horário (Fig. 9.37), e os expressamos em termos dos momentos e produtos de inércia I_x , I_y e P_{xy} calculados em relação aos eixos xy . Obtivemos:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - P_{xy} \sin 2\theta \quad (9.18)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + P_{xy} \sin 2\theta \quad (9.19)$$

$$P_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + P_{xy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

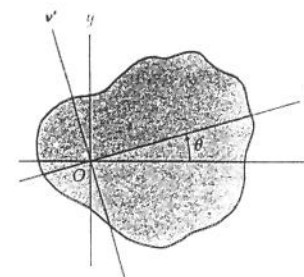


Figura 9.37

Eixos principais

Definimos os *eixos principais de uma superfície em relação a O* como dois eixos mutuamente perpendiculares em relação aos quais os momentos de inércia da superfície tem valores máximo e mínimo, respectivamente. Os valores correspondentes de θ foram denominados θ_m e obtidos através da expressão

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2P_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

Momentos principais de inércia

Os valores máximo e mínimo de I são chamados de *momentos principais de inércia* da superfície em relação a O . Obtivemos

$$I_{max, min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\frac{I_x - I_y}{2} + P_{xy}^2} \quad (9.27)$$

e verificamos que o produto de inércia correspondente é nulo.

Círculo de Mohr

A transformação dos momentos e do produto de inércia de uma superfície por rotação de eixos pode ser representada graficamente pelo *círculo de Mohr* [Seção 9.10]. A partir dos momentos e produtos de inércia I_x , I_y e P_{xy} da superfície em relação aos eixos coordenados xy marcam-se os pontos $X(I_x, P_{xy})$ e $Y(I_y, -P_{xy})$ e desenha-se o segmento que une estes dois pontos (Figura 9.38). Este segmento é um diâmetro do círculo de Mohr que fica assim determinado. Girando os eixos coordenados de um ângulo θ , o diâmetro gira descrevendo o *dobro deste ângulo* e as coordenadas de U e V determinam os novos valores I_u , I_v e P_{uv} dos momentos e produtos de inércia da superfície. Ainda, o ângulo θ_m e as coordenadas dos pontos A e B definem os eixos principais a e b e os momentos principais de inércia da superfície [Problema Resolvido 9.8].

Momentos de inércia de corpos

A segunda metade do capítulo foi dedicada ao estudo dos *momentos de inércia de corpos* que são necessários para o estudo da dinâmica de rotação de corpos rígidos. Definiu-se o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo AA' (Fig. 9.39)

$$I = \int r^2 dm \quad (9.28)$$

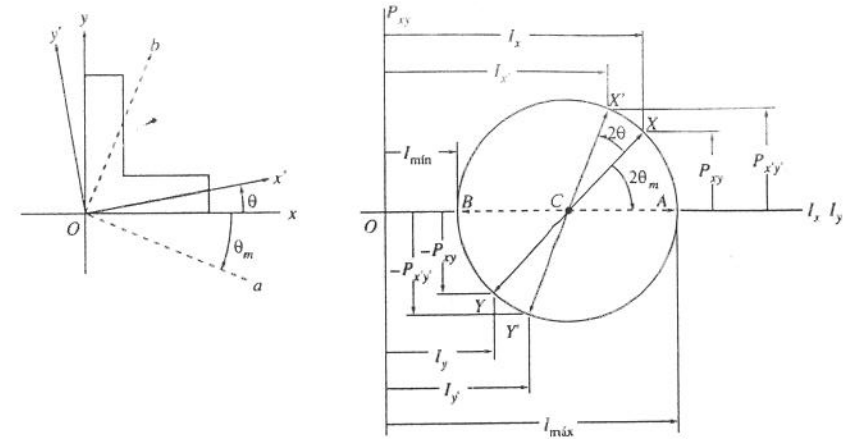


Figura 9.38

onde r é a distância do elemento de massa [Seção 9.11] ao eixo AA' . O raio de giração do corpo é

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (9.29)$$

Os momentos de inércia de um corpo em relação aos eixos coordenados são

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (9.30)$$

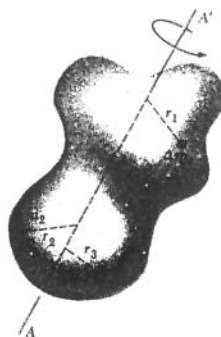


Figura 9.39

Teorema dos eixos paralelos

Vimos que o *teorema dos eixos paralelos* também se aplica a momentos de inércia de corpos [Seção 9.12]. Assim o momento de inércia I de um corpo em relação a um eixo AA' (Fig. 9.40) pode ser calculado por

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

onde $\bar{I}$ é o momento de inércia em relação ao eixo baricêntrico BB' paralelo a AA' , m é a massa do corpo e d é a distância entre os dois eixos.

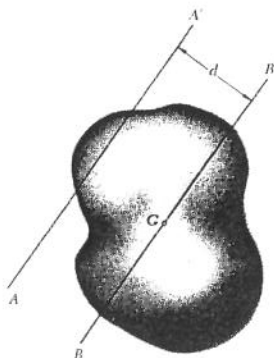


Figura 9.40

Momentos de inércia de placas delgadas

Os *momentos de inércia de placas delgadas* podem ser facilmente calculados a partir dos momentos de inércia de suas superfícies [Seção 9.13]. Verificamos que para uma *placa retangular*, os momentos de inércia em relação aos eixos indicados (Fig. 9.41) são

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12} mb^2 \quad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

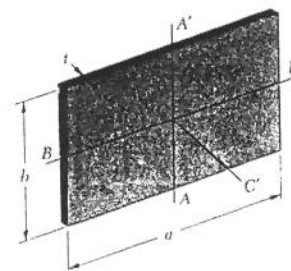


Figura 9.41

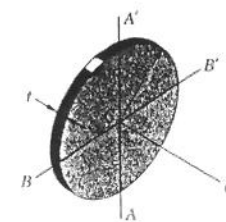


Figura 9.42

enquanto que para uma *placa circular* (Fig. 9.42) são

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4} mr^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2} mr^2 \quad (9.42)$$

Corpos compostos

Quando um corpo tem *dois planos de simetria* é, em geral, possível calcular seu momento de inércia em relação a um eixo dado efetuando-se uma *integração simples*, tomando-se um elemento de massa dm igual a uma placa delgada [Problemas Resolvidos 9.10 e 9.11]. Por outro lado, quando um corpo é composto de *várias partes que têm formas*

geométricas comum, seu momento de inércia em relação a um eixo dado pode ser calculado a partir dos valores dados na Figura 9.28, aplicando-se o teorema dos eixos paralelos [Problemas Resolvidos 9.12 e 9.13].

Momento de inércia em relação a um eixo arbitrário

Na parte final do capítulo aprendemos a calcular o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário OL que passa pela origem O [Seção 9.16]. Com λ_x , λ_y e λ_z representando as componentes do vetor unitário λ paralelo ao eixo OL (Figura 9.43) e com a definição dos produtos de inércia

$$P_{xy} = \int xy \, dm \quad P_{yz} = \int yz \, dm \quad P_{zx} = \int zx \, dm \quad (9.45)$$

verificamos que o momento de inércia do corpo em relação ao eixo OL pode ser obtido por

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2P_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2P_{xz} \lambda_x \lambda_z - 2P_{yz} \lambda_y \lambda_z \quad (9.46)$$

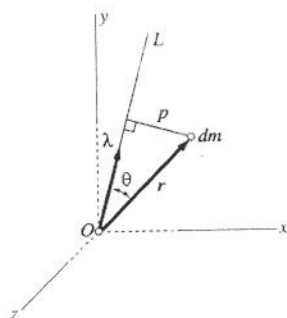


Figura 9.43

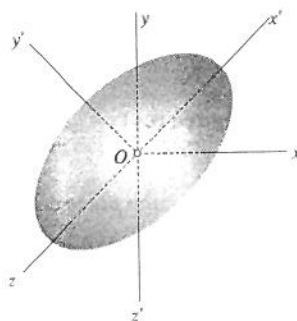


Figura 9.44

Elipsóide de inércia

Marcando o ponto Q sobre o eixo OL a uma distância $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}^*}$ de O [Seção 9.17], obtivemos a superfície de um elipsóide, chamado de *elipsóide de inércia* do corpo

Ver observação no rodapé da página 684. (N. do R. T.)

em O . Os eixos principais x', y', z' deste elipsóide (Figura 9.44) são os eixos principais de inércia do corpo, ou seja, os produtos de inércia $P_{x'y'}$, $P_{y'z'}$ e $P_{z'x'}$ do corpo em relação a estes eixos são todos nulos. Há muitos casos em que se consegue localizar os eixos principais de inércia de um corpo a partir de suas propriedades de simetria. Tomando estes eixos como eixos coordenados podemos escrever I_{OL} por:

$$I_{OL} = I_{x'} \lambda_{x'}^2 + I_{y'} \lambda_{y'}^2 + I_{z'} \lambda_{z'}^2 \quad (9.50)$$

onde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ são os momentos principais de inércia do corpo.

Capítulo 10

Métodos dos Trabalhos Virtuais

*** 10.1. Introdução.** Nos capítulos precedentes, foram resolvidos problemas envolvendo o equilíbrio de corpos rígidos impondo que as forças externas que atuam sobre os corpos se cancelassem. As equações de equilíbrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma M_A = 0$ foram escritas e resolvidas para as incógnitas desejadas. Consideremos, agora, um método diferente, que se mostrará mais eficaz para a resolução de certos tipos de problemas de equilíbrio. Esse método baseia-se no princípio dos *trabalhos virtuais* e foi formalmente usado, pela primeira vez, pelo matemático suíço Jean Bernoulli, no século XVIII.

Como veremos na Seção 10.3, o princípio dos trabalhos virtuais afirma que se uma partícula, ou um corpo rígido, ou, de maneira mais geral, um sistema de corpos rígidos, está em equilíbrio sob a ação de várias forças externas e se o sistema sofre um deslocamento arbitrário a partir da posição de equilíbrio, o trabalho total efetuado pelas forças externas durante o deslocamento é nulo. Esse princípio pode ser aplicado de modo particularmente eficiente na solução de problemas de equilíbrio de máquinas e mecanismos formados por vários membros conectados.

Na segunda parte do capítulo, o método dos trabalhos virtuais será aplicado de uma forma alternativa, baseada no conceito de *energia potencial*. Veremos, na Seção 10.8, que se um ponto material, corpo rígido ou sistema de corpos rígidos está em equilíbrio, então a derivada de sua energia potencial em relação a uma variável de posição deve ser nula.

Neste capítulo aprenderemos, ainda, a calcular o rendimento mecânico de uma máquina (Seção 10.5) e a determinar se uma dada posição é de equilíbrio estável, instável ou indiferente (Seção 10.9).

*** 10.2. Trabalho de uma Força.** Em primeiro lugar definiremos os termos *deslocamento* e *trabalho*, como são usados em Mecânica. Consideremos um ponto material que se move de um ponto A a um ponto vizinho A' (Fig. 10.1). Se $\mathbf{r}$ designa o vetor-posição correspondente ao ponto A , o pequeno vetor que liga A e A' pode ser representado pela diferencial $d\mathbf{r}$; o vetor $d\mathbf{r}$ é denominado *deslocamento* do ponto material. Suponhamos agora que uma força $\mathbf{F}$ esteja agindo sobre o ponto. O *trabalho* da força $\mathbf{F}$ correspondente ao deslocamento $d\mathbf{r}$ é definido pela relação

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

que consiste em efetuar o produto escalar da força $\mathbf{F}$ pelo deslocamento $d\mathbf{r}$. Sejam, respectivamente, F e ds os módulos da força e do deslocamento e α o ângulo formado por $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{r}$. Recordando a definição de produto escalar de dois vetores (Seção 3.9), obtemos

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

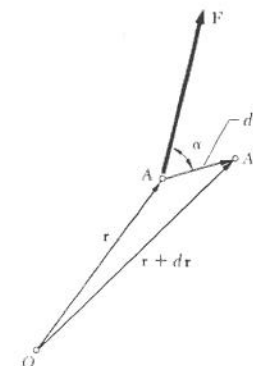


Figura 10.1

Sendo uma *grandeza escalar*, o trabalho tem módulo e sinal, porém não tem direção. Observamos, também, que trabalho deve ser expresso em unidades obtidas multiplicando-se unidades de comprimento por unidades de força. No SI de unidades, o

trabalho deve ser expresso em $\text{N} \cdot \text{m}$. A unidade de trabalho $\text{N} \cdot \text{m}$ é denominada *joule* (J).*

Segue-se de (10.1') que o trabalho dU é positivo se o ângulo α é agudo, e negativo se α é obtuso. Três casos particulares são de especial interesse. Se a força $\mathbf{F}$ tem a mesma direção que $d\mathbf{r}$, o trabalho dU reduz-se a Fds . Se $\mathbf{F}$ tem direção oposta a $d\mathbf{r}$, o trabalho é $dU = -Fds$. Finalmente, se $\mathbf{F}$ é perpendicular a $d\mathbf{r}$, o trabalho dU é zero.

O trabalho dU de uma força $\mathbf{F}$ durante um deslocamento $d\mathbf{r}$ pode também ser considerado como o produto de F pela componente $ds \cos \alpha$ do deslocamento $d\mathbf{r}$ ao longo de $\mathbf{F}$ (Fig. 10.2a). Essa interpretação é particularmente útil no cálculo do trabalho realizado pelo peso $\mathbf{P}$ de um corpo (Fig. 10.2b). O trabalho de $\mathbf{P}$ é igual ao produto de P pelo deslocamento vertical dy do baricentro G do corpo. Se o deslocamento for para baixo, o trabalho será positivo; se for para cima, o trabalho será negativo.

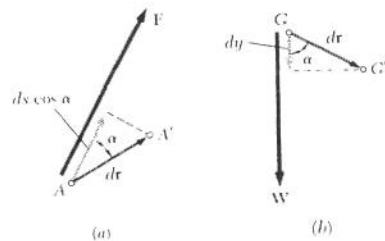


Figura 10.2

Certas forças, freqüentemente encontradas em estática, *não realizam trabalho*. São forças aplicadas a pontos fixos ($ds = 0$) ou que agem em uma direção perpendicular ao deslocamento ($\cos \alpha = 0$). Entre as forças que *não realizam trabalho* estão as seguintes: a reação de um pino polido quando o corpo articulado gira em torno dele; a reação em uma superfície lisa, quando o corpo em contato move-se sobre ela; a reação de um rolete que se move ao longo de sua pista; o peso de um corpo quando seu baricentro se move horizontalmente; a força de atrito que age sobre uma roda que rola sem escorregar (pois, em qualquer instante, o ponto de contato não se move). Exemplos de forças que *realizam trabalho* são o peso do corpo (exceto no caso acima considerado), a força de atrito atuando num corpo que desliza sobre uma superfície rugosa e a maioria das forças aplicadas a corpos em movimento.

*O joule é a unidade de *energia* no SI de unidades, seja na forma mecânica (trabalho, energia potencial, energia cinética), ou nas formas química, elétrica ou térmica. Devemos observar que, embora $\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$, o momento de uma força deve ser expresso em $\text{N} \cdot \text{m}$ e não em joules, visto que o momento de uma força não é uma forma de energia.

Em certos casos, a soma do trabalho realizado por várias forças é nula. Consideremos, por exemplo, dois corpos rígidos AC e BC articulados em C por um *pino polido* (Fig. 10.3a). Entre as forças que atuam sobre AC está a força $\mathbf{F}$ exercida em C por BC . Em geral o trabalho dessa força não será zero, porém será igual em módulo e oposto em sinal ao trabalho da força $-\mathbf{F}$ exercida por AC sobre BC , visto que essas forças são iguais e opostas e estão aplicadas ao mesmo ponto. Assim, quando for considerado o trabalho total realizado por todas as forças agindo sobre AB e BC , os trabalhos das duas forças internas em C se anularão mutuamente. Resultado semelhante é obtido se considerarmos um sistema formado por dois blocos unidos por um fio *inextensível* AB (Fig. 10.3b). O trabalho da força de tração $\mathbf{T}$ em A é igual, em módulo, ao trabalho da força de tração $\mathbf{T}'$ em B , visto que essas forças têm o mesmo módulo e os pontos A e B tiveram o mesmo deslocamento; num caso, o trabalho é positivo, e, no outro, negativo. Assim, o trabalho total das forças internas, de novo, será nulo.

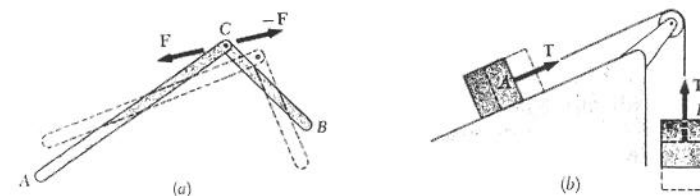


Figura 10.3

Pode-se demonstrar que o trabalho total das forças internas que mantêm unidos os pontos materiais de um corpo rígido é nulo. Consideremos dois pontos A e B de um corpo rígido e as duas forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ que exercem um sobre o outro (Fig. 10.4). Ainda que, em geral, os deslocamentos $d\mathbf{r}$ e $d\mathbf{r}'$ dos dois pontos sejam diferentes, as componentes desses deslocamentos ao longo de AB devem ser iguais; se não, os pontos não permaneceriam à mesma distância um do outro e o corpo não seria rígido. Portanto o trabalho de $\mathbf{F}$ é igual em módulo e oposto em sinal ao trabalho de $-\mathbf{F}$, e sua soma é zero.

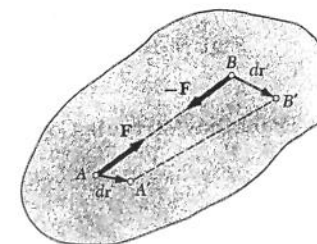


Figura 10.4

Ao calcular o trabalho das forças externas que atuam sobre um corpo rígido, é conveniente, em geral, determinar o trabalho de um binário sem considerar separadamente o trabalho de cada uma das duas forças que o formam. Consideremos as duas forças $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ que atuam em um corpo rígido e formam um binário de momento M (Fig. 10.5). Qualquer pequeno deslocamento do corpo rígido, levando A e B , respectivamente, para A' e B' , pode ser decomposto em duas partes, uma em que os pontos A e B sofrem deslocamentos iguais $d\mathbf{r}_1$ e outra em que A' permanece fixo enquanto B' se move até B'' por meio de um deslocamento $d\mathbf{r}_2$ de módulo $ds_2 = r d\theta$. Na primeira parte do movimento, o trabalho de $\mathbf{F}$ é igual em módulo e oposto em sinal ao de $-\mathbf{F}$, e sua soma é zero. Na segunda parte do movimento, somente a força $\mathbf{F}$ realiza trabalho $dU = F ds_2 = Fr d\theta$. Porém o produto Fr é igual ao módulo M do momento do binário. Assim, o trabalho de um binário de momento M que age sobre um corpo rígido é

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

onde $d\theta$ é, em radianos, o pequeno ângulo da rotação sofrida pelo corpo. Novamente, observamos que o trabalho deve ser expresso em unidades obtidas multiplicando-se unidades de comprimento por unidades de força.

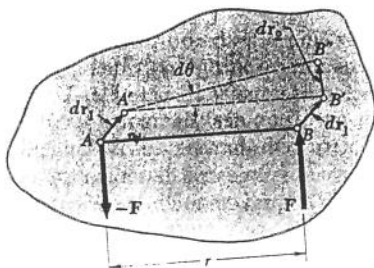


Figura 10.5

*** 10.3. Princípio dos Trabalhos Virtuais.** Consideremos um ponto material submetido à ação de várias forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ (Fig. 10.6). Suporemos que esse ponto sofre um pequeno deslocamento de A a A' . Esse deslocamento é possível,* porém não

* No caso de pontos materiais sujeitos a vínculos que dependem explicitamente do tempo, um deslocamento virtual não é, necessariamente, um deslocamento possível. (N. do R. T.)

será necessariamente realizado. As forças podem estar equilibradas e o ponto estar em repouso, ou o ponto pode mover-se sob a ação das forças dadas em uma direção diferente da de AA' . O deslocamento considerado é, portanto, um deslocamento imaginário, denominado *deslocamento virtual*, sendo representado por $\delta\mathbf{r}$. δ é uma diferencial de primeira ordem, sendo utilizado para distinguir o deslocamento virtual do deslocamento $d\mathbf{r}$ que ocorreria no movimento real. Como veremos, deslocamentos virtuais podem ser usados para determinar se as condições de equilíbrio de um ponto material estão satisfeitas.

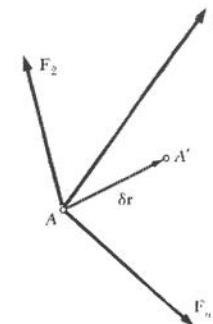


Figura 10.6

O trabalho de cada uma das forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ no deslocamento virtual $\delta\mathbf{r}$ é denominado *trabalho virtual*. O trabalho virtual de todas as forças que agem no ponto da Fig. 10.6 é

$$\begin{aligned} \delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \cdot \delta\mathbf{r} \end{aligned}$$

ou

$$\delta U = \mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} \quad (10.3)$$

onde $\mathbf{R}$ é a resultante das forças dadas. Assim, o trabalho virtual total das forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ é igual ao trabalho virtual da resultante $\mathbf{R}$.

O princípio dos trabalhos virtuais para um ponto material estabelece que, se o ponto está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças que agem sobre ele é zero, para qualquer deslocamento virtual. Esta condição é necessária: se o ponto está em equilíbrio, a resultante $\mathbf{R}$ das forças é nula, e segue da Eq. (10.3) que o trabalho virtual total δU é zero. A condição é também suficiente: se o trabalho virtual total δU é zero para qualquer deslocamento virtual, o produto escalar $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}$ é nulo para qualquer $\delta \mathbf{r}$, e a resultante $\mathbf{R}$ deve ser zero.

No caso de um corpo rígido, o princípio dos trabalhos virtuais estabelece que, se o corpo rígido está em equilíbrio, o trabalho virtual total das forças externas que atuam no corpo rígido é zero para qualquer deslocamento virtual do corpo. A condição é necessária: se o corpo está em equilíbrio, todos os pontos materiais que formam o corpo estão em equilíbrio e o trabalho virtual total das forças que agem sobre todos os pontos deve ser zero; porém, vimos na seção precedente que o trabalho total das forças internas é zero. O trabalho total das forças externas deve, portanto, ser também zero. Pode-se demonstrar que a condição é também suficiente.

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser estendido ao caso de um sistema de corpos rígidos vinculados entre si. Se o sistema permanecer vinculado durante o deslocamento virtual, somente o trabalho das forças externas ao sistema precisará ser considerado, visto que o trabalho total das forças internas nos vários vínculos é zero.*

*** 10.4. Aplicações do Princípio dos Trabalhos Virtuais.** O princípio dos trabalhos virtuais é particularmente eficaz quando aplicado à solução de problemas que envolvem máquinas ou mecanismos formados de vários corpos rígidos vinculados. Consideremos, por exemplo, a alavanca articulada ACB da Fig. 10.7a, usada para comprimir um bloco de madeira. Desejamos determinar a força exercida pela alavanca sobre o bloco quando uma certa força $\mathbf{F}$ é aplicada em C , supondo que não há atrito. Sendo $\mathbf{Q}$ a reação do bloco sobre a alavanca, traçamos o diagrama de corpo livre da alavanca e consideramos o deslocamento virtual obtido, dando-se ao ângulo θ um incremento positivo $\delta\theta$ (Fig. 10.7b). Escolhendo um sistema de eixos coordenados com a origem em A , observamos que x_B aumenta enquanto y_C decresce. Isto é indicado na figura por meio do incremento positivo δx_B e do incremento negativo $-\delta y_C$. As reações A_x , A_y e $\mathbf{N}$ não realizarão trabalho durante o deslocamento virtual considerado, e basta calcular o trabalho de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{Q}$. Como $\mathbf{Q}$ e δx_B têm sentidos opostos, o trabalho virtual de $\mathbf{Q}$ é $\delta U_Q = -Q \delta x_B$. Como $\mathbf{F}$ e o incremento representado $(-\delta y_C)$ têm o mesmo sentido, o trabalho virtual de $\mathbf{F}$ é $\delta U_F = (-F)(-\delta y_C) = +F \delta y_C$. O sinal obtido poderia ter sido previsto pela simples observação de que as forças $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{F}$ estão dirigidas em sentidos opostos aos eixos positivos x e y , respectivamente. Exprimindo as coordenadas x_B e y_C em termos do ângulo θ e diferenciando, obtemos

* É claro que se supõe que os vínculos entre os corpos sejam isentos de atrito. (N. do R. T.)

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \sin \theta & y_C &= l \cos \theta \\ \delta x_B &= 2l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= -l \sin \theta \delta \theta \end{aligned} \quad (10.4)$$

O trabalho virtual total das forças $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{F}$ é, assim,

$$\begin{aligned} \delta U &= \delta U_Q + \delta U_F = -Q \delta x_B + F \delta y_C \\ &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Fl \sin \theta \delta \theta \end{aligned}$$

Fazendo $\delta U = 0$, obtemos

$$2Ql \cos \theta \delta \theta = Fl \sin \theta \delta \theta \quad (10.5)$$

$$Q = \frac{1}{2} F \tan \theta \quad (10.6)$$

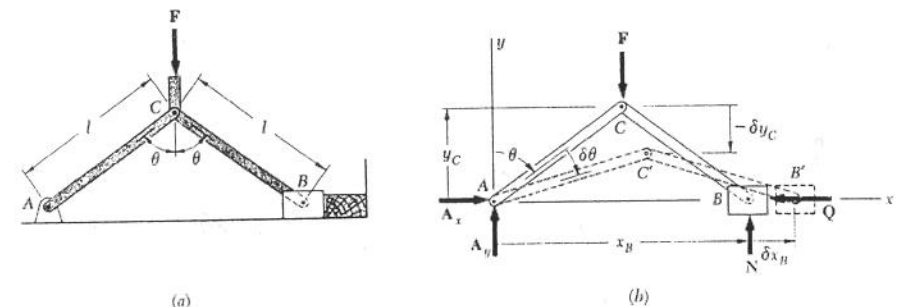


Figura 10.7

A superioridade do método dos trabalhos virtuais sobre as equações convencionais de equilíbrio, no problema aqui considerado, é clara: utilizando o método dos trabalhos virtuais, pudemos eliminar todas as reações desconhecidas enquanto a equação $\Sigma M_A = 0$ teria eliminado apenas duas dessas reações. Podemos aproveitar essa característica do método dos trabalhos virtuais para resolver muitos problemas que envolvem máquinas e mecanismos. Se o deslocamento virtual considerado é compatível com as limitações impostas pelos vínculos,* todas as reações e forças internas são eliminadas e somente o trabalho das cargas, forças aplicadas e forças de atrito precisam ser considerados.

* Por definição, um deslocamento virtual deve satisfazer todas as limitações impostas pelos vínculos. (N. do R. T.)

Devemos observar que o método dos trabalhos virtuais pode, também, ser usado para resolver problemas que envolvem estruturas rígidas, embora os deslocamentos virtuais considerados nunca venham, realmente, a ocorrer. Consideremos, por exemplo, a estrutura ACB da Fig. 10.8a. Se o ponto A for mantido fixo, enquanto B sofrer um deslocamento virtual horizontal (Fig. 10.8b), precisaremos considerar somente o trabalho de F e B_x . Podemos, assim, determinar a componente B_x da reação do mesmo modo que a força Q no exemplo precedente (Fig. 10.7b):

$$B_x = -\frac{1}{2} F \operatorname{tg} \theta$$

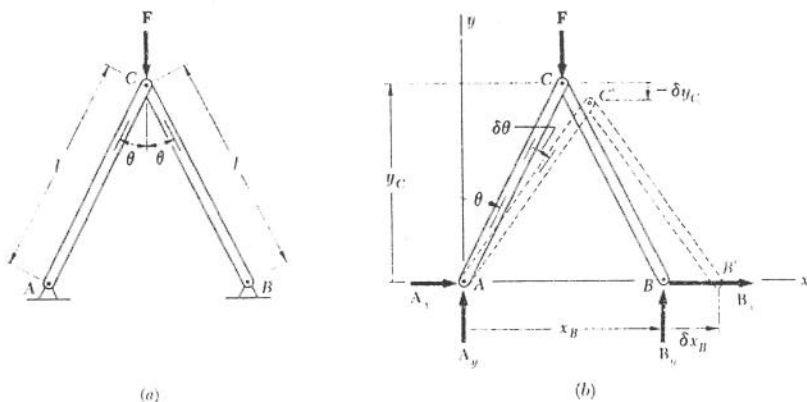


Figura 10.8

Mantendo B fixo e dando a A um deslocamento virtual horizontal, podemos, analogamente, determinar a componente A_x da reação. As componentes A_y e B_y podem ser determinadas girando-se a estrutura ACB como um corpo rígido, em torno de B e A, respectivamente.

O método dos trabalhos virtuais pode, também, ser usado para determinar a configuração de um sistema em equilíbrio, submetido a forças dadas. Por exemplo, o valor do ângulo θ para o qual a articulação da Fig. 10.7 está em equilíbrio sob a ação das duas forças dadas F e Q pode ser obtido resolvendo-se a Eq. (10.6) para $\operatorname{tg} \theta$.

Deve-se observar, entretanto, que o atrativo do método dos trabalhos virtuais depende, em grande parte, da existência de relações geométricas simples entre os vários deslocamentos virtuais envolvidos na solução de um dado problema. Quando tais relações simples não existem, é, em geral, aconselhável voltar ao método convencional do Cap. 6.

* 10.5. Máquinas Reais. Rendimento Mecânico. Analisando a alavanca articulada da seção precedente, supusemos que não havia força de atrito. Assim, o trabalho virtual consistiu somente nos trabalhos da força aplicada F e da reação Q . Porém, o trabalho da reação Q é igual em módulo e oposto em sinal ao trabalho da força exercida pela alavanca sobre o bloco. A Eq. (10.5), portanto, traduz o fato de que o trabalho produzido, $2Ql \cos \theta \delta \theta$, é igual ao trabalho recebido $Fl \sin \theta \delta \theta$. Uma máquina em que o trabalho recebido é igual ao trabalho produzido é chamada de máquina "ideal". Em uma máquina real, as forças de atrito sempre efetuarão algum trabalho, e o trabalho produzido será menor que o trabalho recebido.

Consideremos, por exemplo, a alavanca articulada da Fig. 10.7a e suponhamos agora que a força de atrito F_{at} age entre o bloco deslizante B e o plano horizontal (Fig. 10.9). Usando os métodos convencionais da estática e somando os momentos em relação a A, obtemos $N = F/2$. Sendo μ o coeficiente de atrito entre o bloco B e o plano horizontal, temos $F_{at} = \mu N = \mu F/2$. Recorrendo às fórmulas (10.4), encontramos que o trabalho virtual total das forças Q , F e F_{at} durante o deslocamento virtual mostrado na Fig. 10.9 é

$$\begin{aligned} \delta U &= -Q \delta x_B + F \delta y_C - F_{at} \delta x_B \\ &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Fl \sin \theta \delta \theta - \mu Fl \cos \theta \delta \theta \end{aligned}$$

Fazendo $\delta U = 0$, obtemos

$$2Ql \cos \theta \delta \theta = Fl \sin \theta \delta \theta - \mu Fl \cos \theta \delta \theta \quad (10.7)$$

o que mostra que o trabalho produzido é igual ao trabalho recebido menos o trabalho da força de atrito. Calculando Q , temos

$$Q = \frac{1}{2} F (\operatorname{tg} \theta - \mu) \quad (10.8)$$

Observemos que $Q = 0$ quando $\operatorname{tg} \theta = \mu$, ou seja, quando θ é igual ao ângulo de atrito ϕ , e que $Q < 0$ quando $\theta < \phi$. A alavanca articulada pode, então, ser usada somente para valores de θ maiores que o ângulo de atrito.

O rendimento mecânico de uma máquina é definido pela relação

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} \quad (10.9)$$

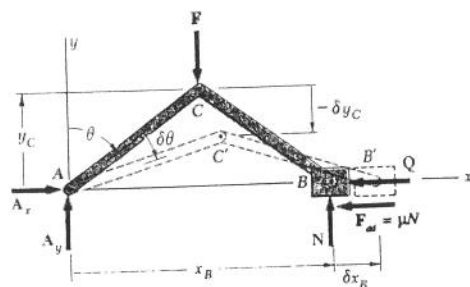


Figura 10.9

Evidentemente, o rendimento mecânico de uma máquina ideal é $\eta = 1$, uma vez que o trabalho recebido e o trabalho produzido são iguais, enquanto o rendimento mecânico de uma máquina real será sempre menor que 1.

No caso da alavanca articulada que acabamos de analisar, escrevemos

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} = \frac{2Ql \cos \theta \delta\theta}{Fl \sin \theta \delta\theta}$$

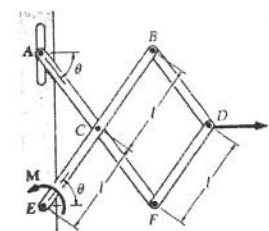
Substituindo o valor de Q dado na Eq. (10.8), obtemos

$$\eta = \frac{F(\operatorname{tg} \theta - \mu) l \cos \theta \delta\theta}{Fl \sin \theta \delta\theta} = 1 - \mu \cotg \theta \quad (10.10)$$

Confirmamos que, na ausência de forças de atrito, temos $\mu = 0$ e $\eta = 1$. No caso geral, quando μ é diferente de zero, o rendimento η torna-se nulo para $\mu \cotg \theta = 1$, ou seja, para $\operatorname{tg} \theta = \mu$ ou $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu = \phi$. Verificamos, de novo, que a alavanca articulada só pode ser usada para valores de θ maiores que o ângulo de atrito ϕ .

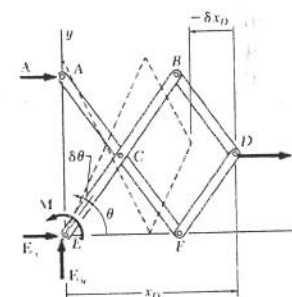
Problema Resolvido 10.1

Usando o método dos trabalhos virtuais, determinar o módulo do momento M do binário necessário para manter o equilíbrio do mecanismo ilustrado.



Solução. Escolhendo um sistema de eixos coordenados com origem em E, temos

$$x_D = 3l \cos \theta \quad \delta x_D = -3l \sin \theta \delta\theta$$



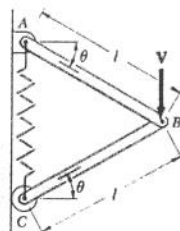
Princípio dos Trabalhos Virtuais. Como as reações A , E_x e E_y não realizarão trabalho durante o deslocamento virtual, o trabalho virtual total realizado por M e P deve ser nulo. Observando que P tem o sentido do eixo x e que M atua na orientação positiva do ângulo θ , temos

$$\begin{aligned} \delta U = 0: \quad & + M \delta\theta - P \delta x_D = 0 \\ & + M \delta\theta + P (-3l \sin \theta \delta\theta) = 0 \end{aligned}$$

$$M = 3Pl \sin \theta \quad \Leftarrow$$

Problema Resolvido 10.2

Determinar as expressões para θ e para a tração na mola correspondentes à posição de equilíbrio do mecanismo. O comprimento livre da mola é h e sua constante é k . Desprezar o peso do mecanismo.



Solução. Com o sistema de coordenadas indicado:

$$\begin{aligned} y_B &= l \sin \theta & y_C &= 2l \sin \theta \\ \delta y_B &= l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= 2l \cos \theta \delta \theta \end{aligned}$$

A elongação da mola é

$$s = y_C - h = 2l \sin \theta - h$$

O módulo da força exercida em C pela mola é

$$F = ks = k(2l \sin \theta - h) \quad (1)$$

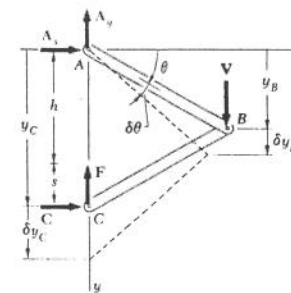
Princípio dos Trabalhos Virtuais. Como as reações A_x , A_y e C não realizam trabalho, o trabalho virtual total realizado por V e F deve ser zero

$$\begin{aligned} \delta U = 0: \quad & V \delta y_B - F \delta y_C = 0 \\ & V (l \cos \theta \delta \theta) - k (2l \sin \theta - h)(2l \cos \theta \delta \theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{V + 2kh}{4kl} \quad \Leftarrow$$

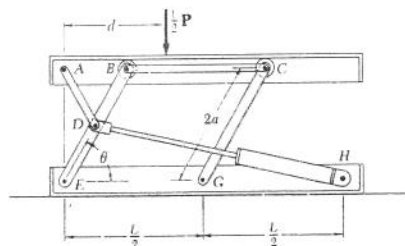
Substituindo essa expressão em (1), obtemos

$$F = \frac{1}{2} V \quad \Leftarrow$$

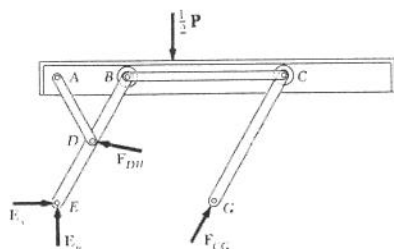


Problema Resolvido 10.3

Uma mesa de elevação hidráulica é usada para erguer um engradado de 1 000 kg. Ela consiste em uma plataforma e dois sistemas articulados idênticos, nos quais cilindros hidráulicos exercem forças iguais. (Somente um sistema articulado e um cilindro são vistos.) Os elementos EDB e CG têm, cada um, comprimento $2a$, e o componente AD está articulado ao ponto médio de EDB. Se o engradado está colocado sobre a mesa de modo tal que a metade de seu peso é suportada pelo sistema ilustrado, determine a força exercida por cada cilindro na elevação do engradado, com $\theta = 60^\circ$, $a = 0,70$ m e $L = 3,20$ m. Esse mecanismo já foi considerado anteriormente no Problema Resolvido 6.7.



Solução. A máquina considerada consiste na plataforma e no sistema articulado, com uma força aplicada F_{DH} exercida pelo cilindro e uma força de saída igual e oposta a $\frac{1}{2}P$.



Princípio dos Trabalhos Virtuais. Inicialmente observamos que as reações em E e G não realizam trabalho. Sendo y a elevação da plataforma em relação à base, e s o comprimento DH do conjunto cilindro-pistão, escrevemos

$$\delta U = 0; \quad -\frac{1}{2}P \delta y + F_{DH} \delta s = 0 \quad (1)$$

O deslocamento vertical δy da plataforma é expresso em termos de deslocamento angular $\delta\theta$ de EDB como:

$$y = (EB) \sin \theta = 2a \sin \theta$$

$$\delta y = 2a \cos \theta \delta\theta$$

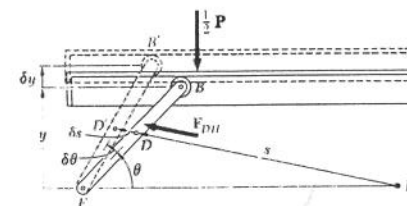
Analogamente, para expressar δs em termos de $\delta\theta$, primeiro observamos que, pela lei dos co-senos,

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

Diferenciando

$$2s \delta s = -2aL (-\sin \theta) \delta\theta$$

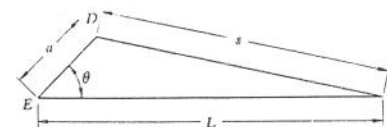
$$\delta s = \frac{aL \sin \theta}{s} \delta\theta$$



Substituindo em (1) δy e δs obtemos

$$\left(-\frac{1}{2}P\right) 2a \cos \theta \delta\theta + F_{DH} \frac{aL \sin \theta}{s} \delta\theta = 0$$

$$F_{DH} = P \frac{s}{L} \cotg \theta$$



Com os dados numéricos fornecidos, obtemos

$$P = mg = (1\,000\text{ kg})(9,81\text{ m/s}^2) = 9\,810\text{ N} = 9,81\text{ kN}$$

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

$$= (0,70)^2 + (3,20)^2 - 2(0,70)(3,20) \cos 60^\circ = 8,49$$

$$s = 2,91\text{ m}$$

$$F_{DH} = P \frac{s}{L} \cotg \theta = (9,81\text{ kN}) \frac{2,91\text{ m}}{3,20\text{ m}} \cotg 60^\circ$$

$$F_{DH} = 5,15\text{ kN} \leftarrow$$

Problemas

- 10.1 Determine a massa m que equilibra o bloco de 5 kg.

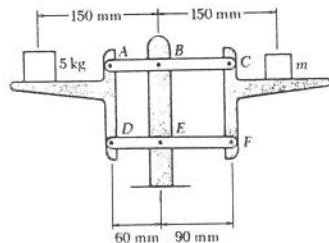


Figura 10.1

- 10.2 Determine o módulo da força P necessária para manter em equilíbrio o sistema articulado ilustrado.

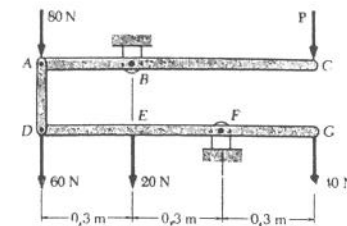
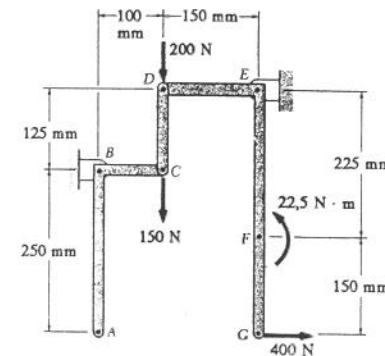


Figura P10.2

- 10.3 Determine a força horizontal F que deve ser aplicada em A para manter em equilíbrio o sistema articulado da figura.

- 10.4 Calcule o vetor-binário M que deve ser aplicado ao elemento ABC da estrutura articulada da figura para manter o equilíbrio.



Figuras P10.3 e P10.4

- 10.5 A estrutura articulada da figura tem todas as barras iguais, e as rodas em A e B giram sem atrito. Calcule a força F necessária para manter o equilíbrio.

- 10.6 Resolva o Prob. 10.5 supondo que a força vertical F seja aplicada no ponto E .

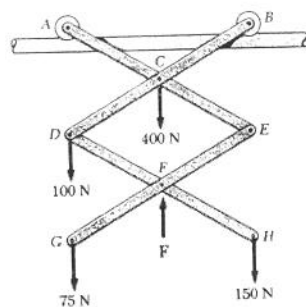


Figura P10.5

10.7 A força F está aplicada no mecanismo da figura. Deduza uma expressão para o módulo da força Q necessária para manter o equilíbrio.

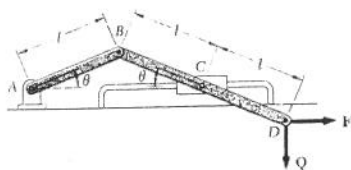


Figura P10.7

10.8 O mecanismo da figura é submetido à ação da força F . Determine uma expressão para o módulo da força Q necessária para manter o equilíbrio.

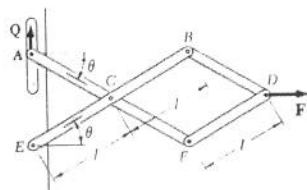
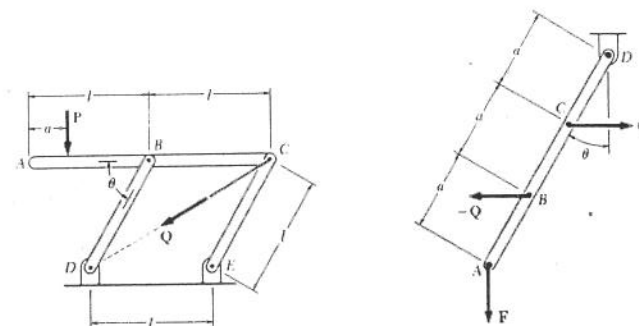


Figura P10.8

10.9 Sabendo que a linha de ação da força Q passa pelo ponto D , deduza uma expressão para o módulo de Q necessário para a manutenção do equilíbrio.

10.10 Na haste AD atuam: a força vertical F na extremidade A e as forças horizontais Q e $-Q$ aplicadas, respectivamente, nos pontos C e B . Deduza uma expressão para o módulo Q das forças horizontais que mantêm o equilíbrio.



Figuras P10.9 e P10.10

10.11 A barra delgada AB está articulada, em A , a um colar e apóia-se em uma roda no ponto C . Desprezando o atrito, deduza uma expressão para o módulo da força Q que mantém o sistema parado.

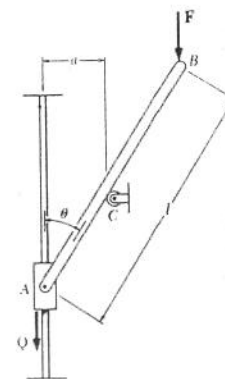


Figura P10.11

10.12 Resolva o Prob. 10.11 supondo que a força F aplicada em B seja horizontal e aponte para a direita.

10.13 O módulo do peso de cada uma das barras uniformes AB e BC é P . Deduza uma expressão para o módulo do vetor-binário M necessário para manter o sistema em equilíbrio.

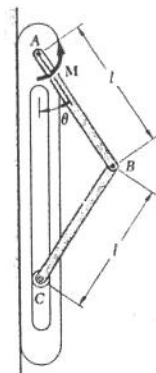


Figura P10.13

10.14 Deduza uma expressão para o módulo do vetor-binário M que mantém em equilíbrio a estrutura e articulação da figura.

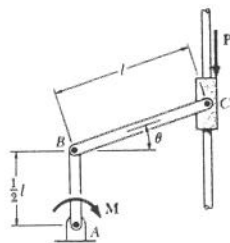
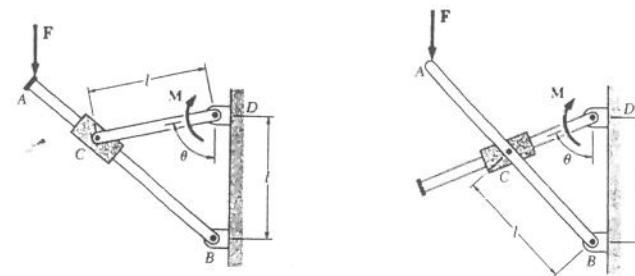


Figura P10.14

10.15 e 10.16 Sabendo que a haste AB tem comprimento $2l$, deduza uma expressão para o módulo do vetor binário M que mantém o equilíbrio.



Figuras P10.15 e P10.16

10.17 Resolva o Prob. 10.15 supondo que a força F aplicada em A seja horizontal e aponte para a esquerda.

10.18 Resolva o Prob. 10.16 supondo que a força F aplicada em A seja horizontal e aponte para a esquerda.

10.19 O colar A pesa 63 N e pode deslizar sem atrito sobre a haste vertical. Sabendo que o comprimento do fio AB é 0,55 m, determine o módulo de F que mantém o sistema em equilíbrio com: (a) $c = 0,10$ m e (b) $c = 0,30$ m.

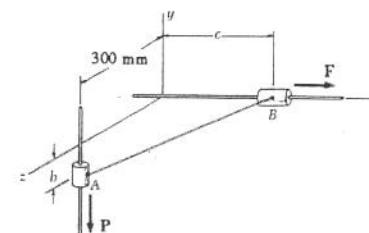


Figura P10.19

10.20 Resolva o Prob. 10.19 com: (a) $c = 0,35$ m e (b) $c = 0,45$ m.

10.21 No Prob. 10.9, determine o módulo da força Q necessária para manter o equilíbrio, com $l = 500$ mm, $\theta = 70^\circ$ e $P = 350$ N.

10.22 No Prob. 10.14, determine o módulo do vetor-binário $\mathbf{M}$ necessário para manter o equilíbrio, com $l = 500$ mm, $\theta = 35^\circ$ e $P = 500$ N.

10.23 Determine o valor de θ correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo do Prob. 10.7, com $F = 225$ N e $Q = 300$ N.

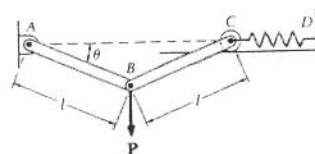
10.24 Determine o valor de θ para a posição de equilíbrio do mecanismo do Prob. 10.8, com $F = 250$ N e $Q = 800$ N.

10.25 Determine o valor de θ para a posição de equilíbrio do mecanismo do Prob. 10.11, com $F = 200$ N, $Q = 400$ N, $l = 600$ mm e $a = 100$ mm.

10.26 Determine o valor de θ correspondente à posição de equilíbrio do mecanismo do Prob. 10.10, com $F = 500$ N, $Q = 400$ N e $a = 100$ mm.

10.27 Uma carga P é aplicada ao ponto B do mecanismo da figura. A mola, de constante k , não está esticada quando AB e BC estão na horizontal. Desprezando o peso das hastes, deduza uma equação envolvendo θ , P , l , k que deve ser satisfeita quando o mecanismo está em equilíbrio.

10.28 Uma carga P de 900 N é aplicada no ponto B do mecanismo da figura. Desprezando o peso das hastes e com $l = 225$ mm, determine o valor de θ para a posição de equilíbrio. A constante da mola é $k = 2$ kN/m, e a mola não está esticada quando AB e BC estão no horizontal. (Sugestão: Resolva por tentativa a equação obtida para θ .)



Figuras P10.27 e P10.28

10.29 Duas barras AD e DG são vinculadas por um pino em D e por uma mola AG . O comprimento da mola não esticada é de 0,30 m, e sua constante é $k = 25$ kN/m. Calcule o valor de x correspondente à situação de equilíbrio quando uma carga de 4 500 N é aplicada ao ponto E , como mostra a figura.

10.30 Resolva o Prob. 10.29 supondo que a força vertical de 4 500 N seja aplicada ao ponto C em vez de ao ponto E .

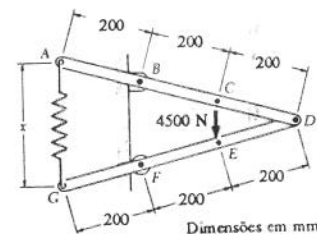
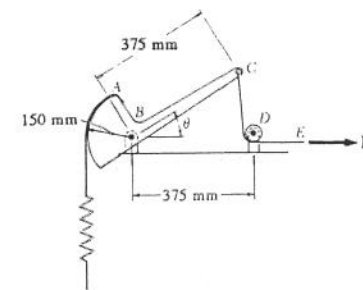
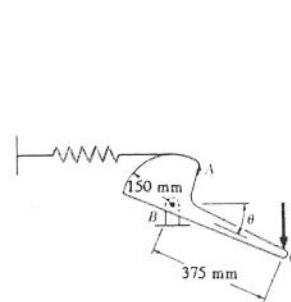


Figura P10.29

10.31 Uma carga P de 400 N é aplicada ao ponto C do mecanismo da figura. Desprezando o peso do mecanismo, determine o valor de θ correspondente à situação de equilíbrio. A constante da mola é $k = 4$ kN/m, e a mola não está esticada quando $\theta = 0$.

10.32 Uma força F de 300 N é aplicada à extremidade E do cabo CDE que passa sob a polia D e está preso ao ponto C do mecanismo. Desprezando o peso do mecanismo e o raio da polia, calcule o valor de θ correspondente à posição de equilíbrio. A constante da mola é $k = 4$ kN/m, e a mola não está esticada quando $\theta = 90^\circ$.



Figuras P10.31 e P10.32

10.33 A alavanca AB está ligada ao eixo horizontal BC , que passa através de um mancal e é soldado a um apoio fixo em C . A constante de torção do eixo BC é K ; isto é, um binário de momento K é necessário para girar a extremidade B de um radiano. Sabendo que o eixo não está torcido quando AB é horizontal, determine o valor de θ correspondente à posição de equilíbrio se $F = 120$ N, $l = 300$ mm e $K = 16$ N · m/rad.

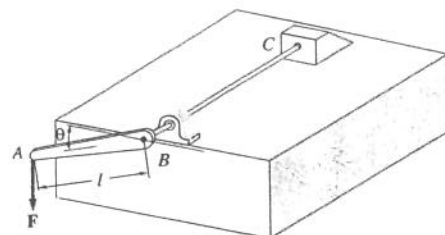
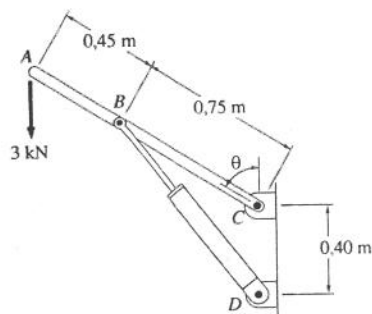


Figura P10.33

10.34 Resolva o Prob. 10.33, com $F = 400 \text{ N}$, $l = 300 \text{ mm}$, e $K = 16 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$. Obtenha uma resposta em cada um dos seguintes quadrantes: $0 < \theta < 90^\circ$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$ e $360^\circ < \theta < 450^\circ$. (Supõe-se que K permanece constante para os ângulos de torção considerados.)

10.35 A posição da barra ABC é controlada pelo cilindro hidráulico BD. Para a situação de carregamento ilustrada, determine a força exercida pelo cilindro no pino B quando $\theta = 60^\circ$.

10.36 A posição da barra ABC é controlada pelo cilindro hidráulico BD. Para a situação de carregamento da figura, calcule: (a) a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino B em função do comprimento BD e (b) o maior valor possível de θ se a força máxima que o cilindro pode exercer no pino B tem módulo de $12,5 \text{ kN}$.



Figuras P10.35 e P10.36

10.37 A posição da barra ABC é controlada pelo cilindro hidráulico CD. Para o carregamento da figura e com $\theta = 65^\circ$, determine a força exercida pelo cilindro hidráulico no pino C.

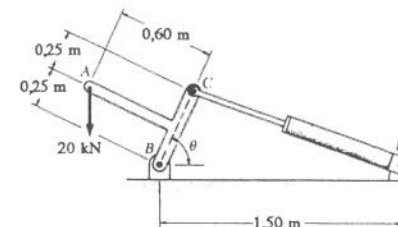


Figura P10.37

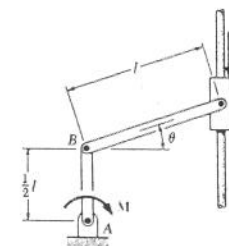
10.38 Resolva o Prob. 10.37 com $\theta = 115^\circ$.

10.39 Um bloco de peso P é puxado sobre um plano que forma um ângulo α com a horizontal, por uma força F dirigida ao longo da reta de maior declive do plano. Se μ é o coeficiente de atrito entre o bloco e o plano, deduza uma relação para o rendimento mecânico do sistema. Mostre que o rendimento mecânico não pode exceder $\frac{1}{2}$ se o bloco deve permanecer em seu lugar quando a força F for removida.

10.40 Deduza uma relação para o rendimento mecânico do macaco examinado na Seção 8.6. Mostre que, se o macaco for autobloqueante, o rendimento mecânico não poderá exceder $\frac{1}{2}$.

10.41 Seja μ o coeficiente de atrito entre o colar e a haste vertical. Deduza uma expressão para o maior módulo do binário de momento M que ainda mantém em equilíbrio o sistema na posição ilustrada. Explique o que acontece se $\mu \geq \tan \theta$.

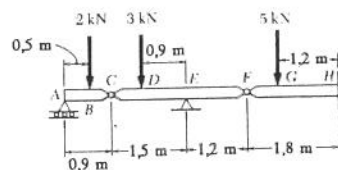
10.42 O coeficiente de atrito entre o colar e a haste vertical é 0,30. Determine o maior e o menor módulo do binário de momento M que ainda mantém em equilíbrio o sistema na posição ilustrada, quando $\theta = 30^\circ$, $l = 250 \text{ mm}$ e $P = 400 \text{ N}$.



Figuras P10.41 e P10.42

10.43 Usando o método dos trabalhos virtuais, determine a reação no ponto E.

10.44 Usando o método dos trabalhos virtuais, determine separadamente a força e o momento que representam a reação em H.



Figuras P10.43 e P10.44

10.45 No Prob. 10.5 a força F é removida e a estrutura é mantida em equilíbrio por uma corda que é presa aos pinos E e H. Determine a tração na corda.

10.46 Uma haste delgada AB, de peso P, é articulada aos blocos A e B, que se movem livremente nas guias da figura. Os blocos estão vinculados por um cordão elástico que passa sobre uma polia no ponto C. (a) Expresse a tração no cordão em termos de P e θ . (b) Calcule o valor de θ para o qual a tração no cordão é igual a 2 P.

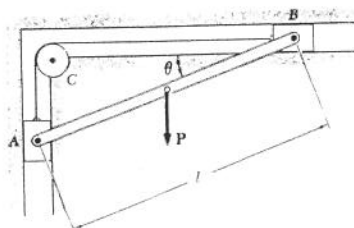
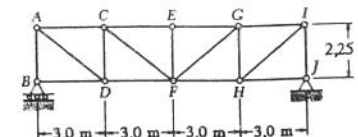


Figura P10.46

10.47 Determine o movimento vertical do nó C se a barra FG for alongada de 37,5 mm. (Sugestão: Aplique uma carga vertical ao nó C e, com os métodos do Cap. 6, calcule as forças aplicadas pela barra FG sobre os nós F e G. Então, aplique o método dos trabalhos virtuais para um deslocamento virtual que torna a barra FG mais comprida. Esse método somente deve ser usado para pequenas variações no comprimento das barras.)

10.48 Determine o deslocamento horizontal do nó C quando a barra FG é alongada de 37,5 mm (siga a sugestão do Prob. 10.47, aplicando uma força horizontal sobre o nó C).



Figuras P10.47 e P10.48

* 10.6. Trabalho de uma Força Durante um Deslocamento Finito. Consideremos uma força F agindo sobre um ponto material. O trabalho de F correspondente a um deslocamento infinitesimal dr do ponto foi definido na Seção 10.2 como

$$dU = F \cdot dr \quad (10.1)$$

O trabalho de F correspondente a um deslocamento finito do ponto material de A_1 a A_2 (Fig. 10.10a) é representado por $U_{1 \rightarrow 2}$ e é obtido integrando-se (10.1) ao longo da trajetória descrita pelo ponto material:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} F \cdot dr \quad (10.11)$$

Usando a expressão alternativa

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

dada na Seção 10.2 para o trabalho elementar dU , podemos também expressar o trabalho $U_{1 \rightarrow 2}$ como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (10.11')$$

onde a variável de integração s mede a distância ao longo da trajetória percorrida pelo ponto material. O trabalho $U_{1 \rightarrow 2}$ é representado pela área* sob a curva obtida, registrando-se num gráfico $F \cos \alpha$ versus s (Fig. 10.10b). No caso de uma força F de módulo constante que age na direção do movimento, a fórmula (10.11') fornece $U_{1 \rightarrow 2} = F(s_2 - s_1)$.

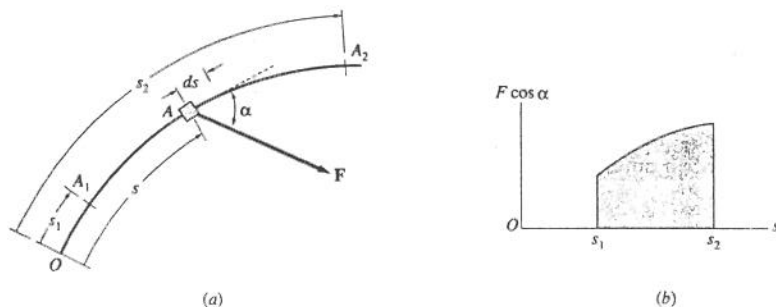


Figura 10.10

Recordando, da Seção 10.2, que o trabalho de um binário de momento M , durante uma rotação infinitesimal $d\theta$ do corpo rígido, é

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

obtemos para o trabalho de um binário durante uma rotação finita do corpo a relação

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (10.12)$$

* Vide observação no rodapé da pag. 104 (N do R.T.).

No caso de um binário de momento constante, a fórmula fornece

$$U_{1 \rightarrow 2} = M (\theta_2 - \theta_1)$$

Trabalho de um Peso. Foi estabelecido na Seção 10.2 que o trabalho do peso P de um corpo, durante um deslocamento infinitesimal do mesmo, é igual ao produto de P pelo deslocamento vertical do baricentro do corpo. Com o eixo y orientado para cima, o trabalho de P durante um deslocamento finito do corpo (Fig. 10.11) é obtido escrevendo-se

$$dU = -P dy$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} P dy = Py_1 - Py_2 \quad (10.13)$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = -P(y_2 - y_1) = -P\Delta y \quad (10.13')$$

onde Δy é o deslocamento vertical de A_1 a A_2 . O trabalho do peso P é, assim, igual ao produto de P pelo deslocamento vertical do baricentro do corpo. O trabalho é positivo quando $\Delta y < 0$, ou seja, quando o corpo se move para baixo.

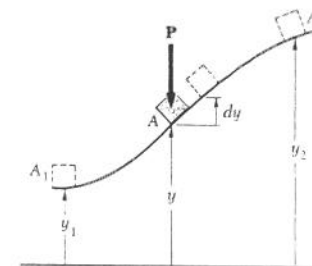


Figura 10.11

Trabalho da Força Exercida por uma Mola. Consideremos um corpo A preso por uma mola a um ponto fixo B ; supõe-se que a mola não esteja deformada quando o corpo está em A_0 (Fig. 10.12a). A experiência mostra que o módulo da força F , exercida

pela mola sobre A , é proporcional à deformação x da mola, medida a partir da posição A_0 . Temos

$$F = kx \quad (10.14)$$

onde k é a constante da mola, expressa em N/m no SI de unidades. O trabalho da força F exercida pela mola durante um deslocamento finito do corpo de $A_1 (x = x_1)$ até $A_2 (x = x_2)$ é obtido escrevendo-se

$$dU = -F dx = -kx dx \quad (10.15)$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} kx_1^2$$

Deve-se tomar cuidado em exprimir k e x em unidades coerentes. Observamos que o trabalho da força F exercida pela mola sobre o corpo é *positivo* quando $x_2 < x_1$, ou seja, quando a mola está retornando a seu comprimento normal.

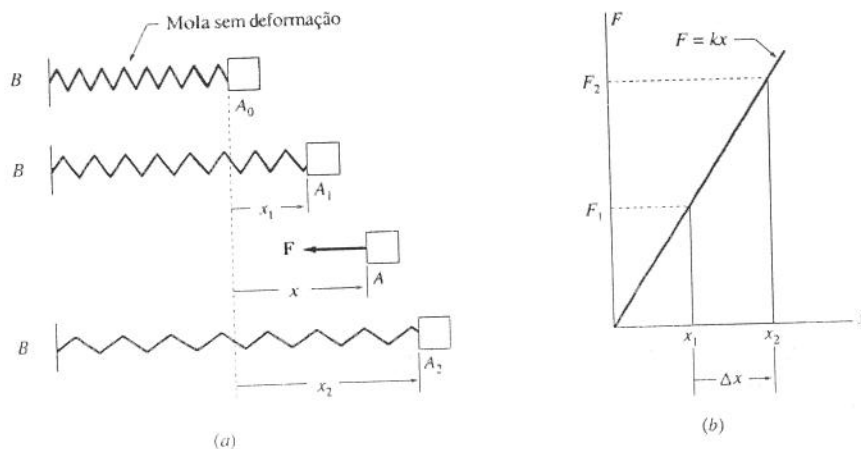


Figura 10.12

Como a Eq. (10.14) é a equação de uma linha reta, de coeficiente angular k , passando pela origem, o trabalho $U_{1 \rightarrow 2}$ de F durante o deslocamento de A_1 até A_2 pode ser obtido calculando a área* do trapézio mostrado na Fig. 10.12b. Isto é feito calcu-

* Vide observação no rodapé da pág. 104. (N. do R. T.)

lando-se os valores F_1 e F_2 e multiplicando-se a base Δx do trapézio por sua altura média $\frac{1}{2} (F_1 + F_2)$. Como o trabalho da força F exercida pela mola é positivo para um valor negativo de Δx , escrevemos

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2} (F_1 + F_2) \Delta x \quad (10.16)$$

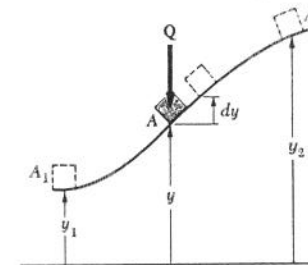


Figura 10.11 (repetida)

A fórmula (10.16) é, em geral, de uso mais conveniente do que a (10.15) e oferece menos possibilidade de confundir as unidades envolvidas.

*** 10.7. Energia Potencial.** Considerando novamente o corpo da Fig. 10.11, observamos em (10.13) que o trabalho do peso P , durante um deslocamento finito, é obtido subtraindo-se o valor da função Py , correspondente à segunda posição do corpo, de seu valor correspondente à primeira posição. O trabalho de P é, assim, independente da trajetória efetivamente percorrida; depende somente dos valores inicial e final da função Py . Tal função é denominada *energia potencial* do corpo em relação à *força da gravidade* P e é designada V_g . Escrevemos

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \quad \text{com} \quad V_g = Py \quad (10.17)$$

Observamos que, se $(V_g)_2 > (V_g)_1$, ou seja, se a *energia potencial aumenta* durante o deslocamento (como no caso aqui considerado), o *trabalho* $U_{1 \rightarrow 2}$ é *negativo*. Se, por outro lado, o trabalho de P é positivo, a energia potencial decresce. Portanto a energia potencial V_g do corpo fornece uma medida do *trabalho que pode ser realizado*

por seu peso P . Como somente a *variação* da energia potencial, e não seu valor real V_g , é envolvida na fórmula (10.17), uma constante arbitrária pode ser adicionada à expressão obtida para V_g . Em outras palavras, o nível, a partir do qual a altura y é medida, pode ser escolhido arbitrariamente. Observe-se que a energia potencial é expressa nas mesmas unidades de trabalho, isto é, em joules se as unidades do SI são usadas.*

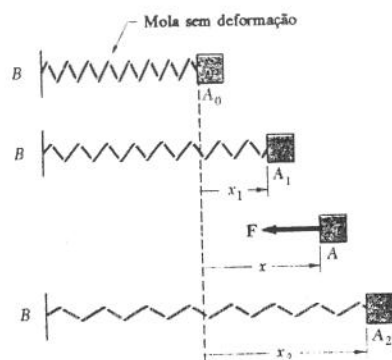


Figura 10.12 (repetida)

Considerando agora o corpo da Fig. 10.12a, observamos da fórmula (10.15) que o trabalho da força elástica F é obtido pela subtração do valor da função $\frac{1}{2}kx^2$, correspondente à segunda posição do corpo, de seu valor correspondente à primeira posição. Essa função, V_e , é denominada *energia potencial* do corpo em relação à *força elástica* F . Escrevemos

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \quad \text{com} \quad V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.18)$$

e observamos que, durante o deslocamento considerado, o trabalho da força F exercida pela mola sobre o corpo é negativo, e a energia potencial V_e aumenta. Devemos observar que a expressão obtida para V_e é válida somente se a deformação da mola for medida a partir da posição em que a mola não está deformada.

* Veja nota de rodapé, pág. 710.

O conceito de energia potencial pode ser utilizado quando outras forças além de forças gravitacionais e elásticas estiverem envolvidas. Permanecerá válido enquanto o trabalho elementar dU da força considerada for uma *diferencial exata*. É, então, possível encontrar uma função V , denominada energia potencial, tal que

$$dU = -dV \quad (10.19)$$

Integrando (10.19) sobre uma trajetória finita, obtemos a fórmula geral

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (10.20)$$

que exprime o trabalho da força é independente da trajetória percorrida e é igual a menos a variação da energia potencial. Uma força que satisfaça à Eq. (10.20) é denominada *força conservativa*.*

*** 10.8. Energia Potencial e Equilíbrio.** A aplicação do princípio dos trabalhos virtuais será consideravelmente simplificada quando a energia potencial de um sistema for conhecida. No caso de um deslocamento virtual, a fórmula (10.19) transforma-se em $\delta U = -\delta V$. Além disso, se a posição do sistema é definida por uma única variável independente θ , podemos escrever $\delta V = (dV/d\theta)\delta\theta$. Como $\delta\theta$ deve ser diferente de zero, a condição $\delta V = 0$ para o equilíbrio torna-se

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (10.21)$$

Em termos de energia potencial, o princípio dos trabalhos virtuais estabelece, portanto, que, se um sistema estiver em equilíbrio, a derivada de sua energia potencial total será zero. Se a posição do sistema depender de diversas variáveis independentes (diz-se, então, que o sistema possui vários graus de liberdade), as derivadas parciais de V em relação a cada uma das variáveis independentes devem ser nulas.

* Uma discussão detalhada sobre forças conservativas é feita na Seção 13.7 do volume Cinemática e Dinâmica.

Consideremos, por exemplo, uma estrutura constituída de duas barras AC e CB e que suporta uma carga P em C. A estrutura está articulada por um pino em A e apoiada por um rolete em B. Uma mola BD liga B a um ponto fixo D (Fig. 10.13a). A constante da mola é k ; supõe-se que seu comprimento natural é igual a AD e, portanto, que a mola não está deformada quando B coincide com A. Desprezando as forças de atrito e o peso das barras, verificamos que as únicas forças que realizam trabalho durante um deslocamento da estrutura são o peso P e a força F exercida pela mola no ponto B (Fig. 10.13b). A energia potencial total do sistema será, então, obtida adicionando-se a energia potencial V_g , correspondente à força de gravidade P , à energia potencial V_e , correspondente à força elástica F .

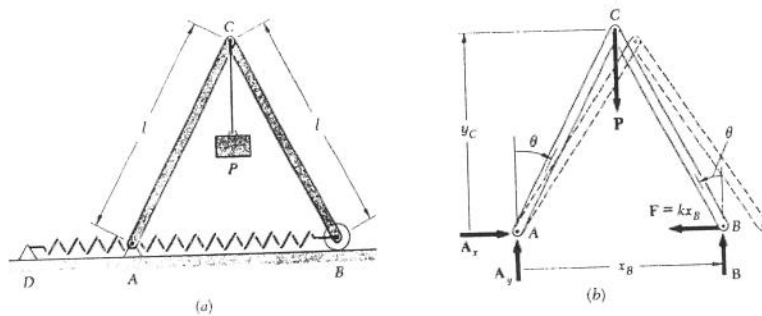


Figura 10.13

Escolhendo um sistema de coordenadas com origem em A e observando que a deformação da mola, medida a partir da posição em que não está deformada, é $AB = x_B$, escrevemos

$$V_e = \frac{1}{2} k x_B^2 \quad V_g = P y_C$$

Expressando as coordenadas x_B e y_C em termos do ângulo θ , temos

$$\begin{aligned} x_B &= 2l \sin \theta & y_C &= l \cos \theta \\ V_e &= \frac{1}{2} k (2l \sin \theta)^2 & V_g &= P (l \cos \theta) \\ V &= V_e + V_g = 2kl^2 \sin^2 \theta + Pl \cos \theta \end{aligned} \quad (10.22)$$

As posições de equilíbrio do sistema são obtidas igualando-se a zero a derivada da energia potencial V :

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2 \sin \theta \cos \theta - Pl \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta = 0 \quad 4kl \cos \theta - P = 0$$

Existem, portanto, duas posições de equilíbrio, correspondendo aos valores $\theta = 0$ e $\theta = \arccos(P/4kl)^*$.

* 10.9. Estabilidade do Equilíbrio. Consideremos as três hastes uniformes de comprimento $2a$ e peso P , representadas na Fig. 10.14. Embora cada haste esteja em equilíbrio, existe uma diferença importante entre os três casos considerados. Se cada haste for afastada de sua posição de equilíbrio e então abandonada: a haste a se moverá de volta à posição original, a haste b continuará afastando-se de sua posição original e a haste c permanecerá em sua nova posição. No caso a , o equilíbrio da haste é *estável*; no caso b , *instável*; no caso c , *indiferente*.

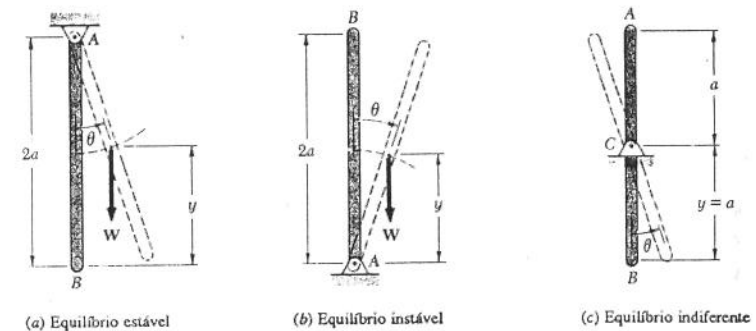


Figura 10.14

Recordando, da Seção 10.7, que a energia potencial gravitacional V_g é igual a Py , onde y é a altura do ponto de aplicação de P , medida a partir de um nível arbitrário, observamos que a energia potencial da haste a é mínima na posição de equilíbrio considerada, que a energia potencial de b é máxima e que a energia potencial da haste c é constante. Assim, o equilíbrio é *estável*, *instável* ou *indiferente*, conforme a energia potencial seja mínima, máxima ou constante (Fig. 10.15).

* A segunda posição não existe se $P > 4kl$ (ver Prob. 10.81 para uma ulterior discussão do equilíbrio desse sistema).

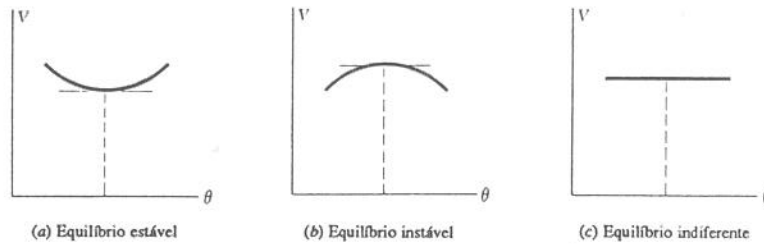


Figura 10.15

Que o resultado obtido é muito geral, pode ser visto como se segue: em primeiro lugar observemos que uma força sempre tende a realizar trabalho positivo e, assim, a diminuir a energia potencial do sistema ao qual está aplicada. Portanto, quando um sistema é afastado de sua posição de equilíbrio, as forças que nele atuam tendem a trazê-lo de volta à posição original se V é mínimo (Fig. 10.15a) e afastá-lo ainda mais se V é máximo (Fig. 10.15b). Se V for constante (Fig. 10.15c), as forças não tenderão a mover o sistema.

Recordando do Cálculo que uma função é mínima ou máxima conforme sua derivada segunda seja positiva ou negativa, podemos resumir, como se segue, as condições para o equilíbrio de um sistema com um grau de liberdade (isto é, um sistema cuja posição é definida por uma única variável independente θ):

$\frac{dV}{d\theta} = 0$	$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$:	equilíbrio estável	(10.23)
$\frac{dV}{d\theta} = 0$	$\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0$:	equilíbrio instável	

Se tanto a primeira quanto a segunda derivadas de V forem zero, será necessário examinar derivadas de ordem superior para determinar se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente. O equilíbrio será indiferente se todas as derivadas forem nulas, uma vez que a energia potencial V é constante. O equilíbrio será estável se a primeira derivada diferente de zero for de ordem par e positiva. Em todos os outros casos, o equilíbrio será instável.

Se o sistema considerado possui vários graus de liberdade, a energia potencial V depende de diversas variáveis, e é, assim, necessário aplicar a teoria das funções de diversas variáveis para determinar se V é mínima. Pode ser verificado que um sistema

com dois graus de liberdade será estável, e a correspondente energia potencial $V(\theta_1, \theta_2)$ será mínima, se as seguintes relações forem satisfeitas simultaneamente:

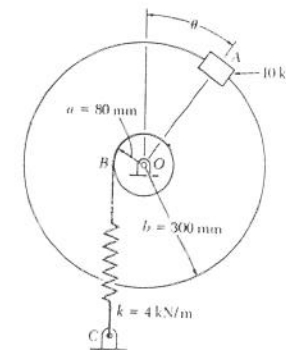
$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} < 0 \quad (10.24)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} > 0$$

Problema Resolvido 10.4

A figura mostra um bloco de 10 kg preso à borda de um disco de 300 mm de raio. Sabendo que a mola não está esticada quando $\theta = 0$, determine a posição, ou as posições, de equilíbrio e, em cada caso, classifique o equilíbrio em estável, instável ou indiferente.

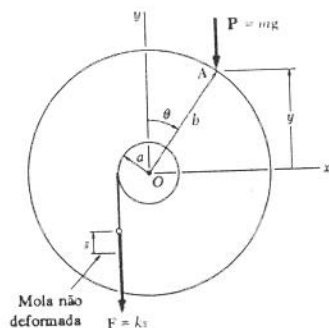


Energia Potencial. Colocando a origem das coordenadas em O e chamando de s o alongamento da mola, temos:

$$V_e = \frac{1}{2} k s^2 \quad V_g = P y = m g y$$

Com θ em radianos:

$$s = a\theta \quad y = b \cos \theta,$$



Substituímos esses valores de s e y nas equações para V_e e V_g :

$$V_e = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 \quad V_g = m g b \cos \theta$$

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 + m g b \cos \theta$$

Posições de Equilíbrio. Impomos $dV/d\theta = 0$:

$$\frac{dV}{d\theta} = k a^2 \theta - m g b \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta = \frac{k a^2}{m g b} \theta$$

que, com $a = 0,080$ m, $b = 0,300$ m, $k = 4$ kN/m e $m = 10$ kg, dá:

$$\sin \theta = \frac{(4 \text{ kN/m}) (0,080 \text{ m})^2}{(10 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) (0,300 \text{ m})}$$

$$\sin \theta = 0,870 \theta$$

com θ em radianos. Achamos a solução por tentativa:

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0,902 \text{ rad}$$

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 51,7^\circ \Leftarrow$$

Estabilidade do Equilíbrio. Calculamos a derivada segunda da energia potencial V em relação a θ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= k a^2 - m g b \cos \theta \\ &= (4 \text{ kN/m}) (0,080 \text{ m})^2 - (10 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) (0,300 \text{ m}) \cos \theta \\ &= 25,6 - 29,4 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{Para } \theta = 0: \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = 25,6 - 29,4 \cos 0^\circ = -3,83 < 0$$

O equilíbrio é instável para $\theta = 0^\circ \Leftarrow$

$$\text{Para } \theta = 51,7^\circ: \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = 25,6 - 29,4 \cos 51,7^\circ = +7,4 > 0$$

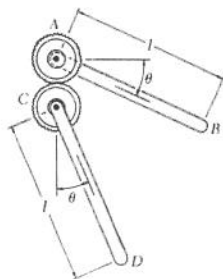
O equilíbrio é estável para $\theta = 51,7^\circ \Leftarrow$

Problemas

- 10.49 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Prob. 10.27.
 10.50 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Prob. 10.28.
 10.51 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Prob. 10.29.
 10.52 Usando o método da Seção 10.8, resolva o Prob. 10.30.
 10.53 Mostre que o equilíbrio é indiferente no Prob. 10.5.
 10.54 Mostre que o equilíbrio é indiferente no Prob. 10.2.

10.55 Duas hastes uniformes, cada uma de massa m , sujeitas à ação da gravidade, estão ligadas a engrenagens de raios iguais, como ilustrado. Determine as posições de equilíbrio do sistema e estabeleça, em cada caso, se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente. Os centros das engrenagens são fixos e as hastes permanecem num plano vertical.

10.56 Duas hastes uniformes, AB e CD , sujeitas à ação da gravidade, estão ligadas a engrenagens de raios iguais, como se vê na figura. Com $m_{AB} = 0,400$ kg e $m_{CD} = 0,600$ kg, determine as posições de equilíbrio do sistema e classifique os estados de equilíbrio em estável, instável e indiferente. Os centros das engrenagens são fixos e as hastes permanecem num plano vertical.



Figuras P10.55 e P10.56

10.57 Usando o método da Seção 10.8 resolva o Prob. 10.33. Determine se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente. (Sugestão: A energia potencial correspondente ao binário exercido por uma mola de torção é $\frac{1}{2} k \theta^2$, onde k é a constante de torção da mola e θ o ângulo de torção.)

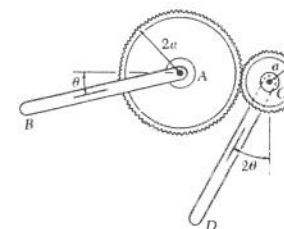


Figura P10.57

10.58 No Prob. 10.34, determine se cada uma das posições de equilíbrio é estável, instável ou indiferente. (Ver a sugestão do Prob. 10.57.)

10.59 Uma carga P de 600 N é aplicada ao ponto C do mecanismo. Desprezando o peso do mecanismo, determine o valor de θ para o estado de equilíbrio e verifique se este é estável. A constante da mola é $k = 4$ kN/m, e a mola não está alongada quando $\theta = 0$.

10.60 Resolva o Prob. 10.59 supondo que a mola não esteja alongada quando $\theta = 30^\circ$.

10.61 Uma barra delgada AB , de peso P , está ligada aos blocos A e B , que podem mover-se livremente nas guias mostradas. A constante da mola é k e ela não está deformada quando AB é horizontal. Desprezando o peso dos blocos, deduza uma equação em termos de θ , P e k que deve ser satisfeita quando a haste estiver em equilíbrio.

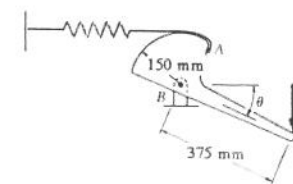


Figura P10.61

10.62 No Prob. 10.61, determine três valores de θ , correspondentes ao equilíbrio, quando $P = 30$ N, $k = 200$ N/m e $l = 0,500$ m. Estabeleça em cada caso se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente.

10.63 Um colar B , de peso P , pode mover-se livremente ao longo da haste vertical ilustrada. A constante da mola é k , e ela não está deformada quando $y = 0$. (a) Deduza uma equação, em termos de y , P e k , que deve ser satisfeita quando o colar estiver em equilíbrio. (b) Determine o valor de y correspondente ao equilíbrio, com $P = 60$ N, $a = 400$ mm e $k = 1,00$ kN/m; verifique se o equilíbrio é estável.

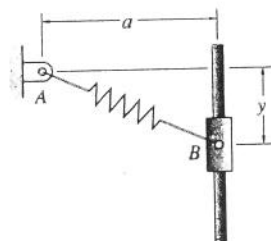


Figura P10.63

10.64 A constante da mola é k , e ela não está esticada quando $\theta = 0$. (a) Desprezando o peso do braço rígido BCD , deduza, em termos de θ , k , a , l e P , a equação que deve ser satisfeita quando o braço está em equilíbrio. (b) Determine três valores de θ correspondentes a situações de equilíbrio, sendo $k = 12$ kN/m, $a = 0,15$ m, $l = 0,375$ m e $P = 400$ N. Estabeleça, em cada caso, se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente.

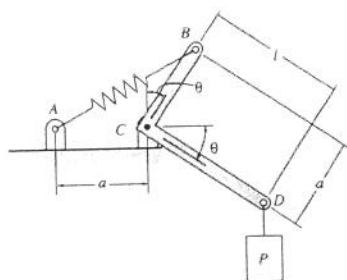


Figura P10.64

10.65 A barra ABC está articulada aos colares A e B , que podem deslizar livremente nas hastes da figura. A constante da mola é k , e a mola não está esticada quando $\theta = 0$. (a) Desprezando o peso da barra ABC , deduza a equação que deve ser satisfeita no estado de equilíbrio, em termos de θ , m , k e l . (b) Determine o valor de θ na situação de equilíbrio, com $m = 5$ kg, $k = 1,2$ kN/m e $l = 250$ mm; verifique se o equilíbrio é estável.

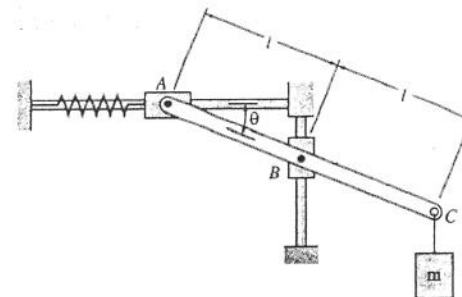


Figura P10.65

10.66 Resolva o Prob. 10.65 supondo que a mola não está esticada quando $\theta = 30^\circ$.

10.67 Uma carga vertical P é aplicada à extremidade B da barra BC . A constante da mola é k , e a mola não está esticada quando $\theta = 60^\circ$. (a) Desprezando o peso da barra, calcule o ângulo θ , na situação de equilíbrio, em termos de P , k e l . (b) Determine os valores de θ , na situação de equilíbrio, sabendo que $P = 200$ N, $k = 4$ kN/m e $l = 200$ mm. Verifique, em cada caso, se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente.

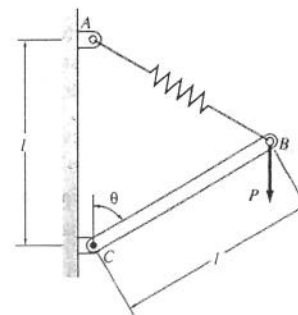
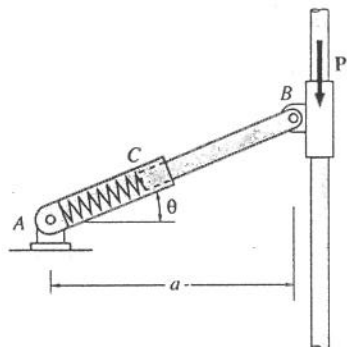


Figura P10.67

10.68 Para o sistema do Prob. 10.67, com $P = 500$ N, calcule o valor de θ correspondente ao equilíbrio e verifique se o equilíbrio é estável.

10.69 A mola interna AC tem constante k e não está deformada quando $\theta = 45^\circ$. Deduza uma equação definindo os valores de θ correspondente às posições de equilíbrio.

10.70 No Prob. 10.69, determine os valores positivos de θ correspondentes às posições de equilíbrio quando $P = 100$ N, $k = 3$ kN/m e $a = 500$ mm; verifique se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente.

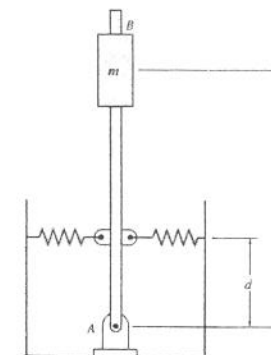
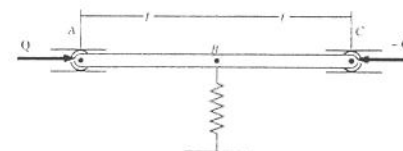


Figuras P10.69 e P10.70

10.71 A haste AB está presa por uma articulação em A e por duas molas, cada uma de constante k . Se $h = 750$ mm, $d = 400$ mm e $m = 80$ kg, determine os valores de k para os quais o equilíbrio da haste AB é estável na posição indicada. Cada mola pode atuar tanto sob tração quanto sob compressão.

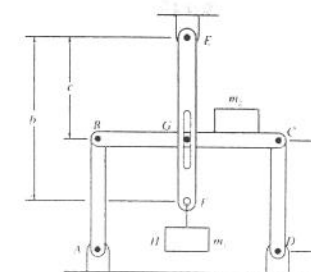
10.72 Se $m = 75$ kg, $h = 650$ mm e a constante de cada mola é $k = 2,5$ kN/m, determine os valores da distância d para os quais o equilíbrio da haste AB é estável na posição mostrada. Cada mola pode atuar tanto sob tração como sob compressão.

10.73 Duas barras AB e BC, de peso desprezível, são ligadas a uma única mola de constante k , que não está deformada quando as barras são horizontais. Determine os valores do módulo Q de duas forças iguais e opostas Q e $-Q$ para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição mostrada.



Figuras P10.71 e P10.72

10.74 As barras BC e EF estão articuladas em G por um pino que está preso a BC e que pode deslizar livremente em uma fenda feita em EF. Determine o menor valor da massa m_1 para que o mecanismo fique em equilíbrio na posição da figura.



Figuras P10.73 e P10.74

* **10.75 e 10.76** As barras ilustradas, de comprimento l e peso desprezível, são ligadas a molas, cada uma de constante k . As molas não estão deformadas, e o sistema está em equilíbrio quando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Determine os valores de Q para os quais a posição de equilíbrio é estável.

* **10.77** Resolva o Prob. 10.76 supondo que a força vertical aplicada em B seja aumentada para $5Q$.

* **10.78** Resolva o Prob. 10.75 com $l = 625$ mm e $k = 9$ kN/m.

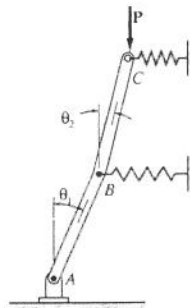


Figura P10.75

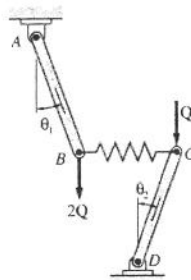
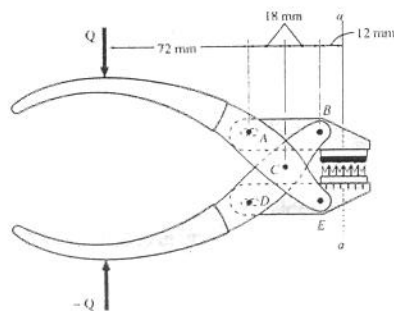


Figura P10.76

10.79 Na Seção 10.8, duas posições de equilíbrio foram obtidas para o sistema ilustrado na Fig. 10.13: para $\theta = 0$ e para $\theta = \arccos(P/4kl)$. Mostre que: (a) se $P < 4kl$, o equilíbrio é estável na primeira posição ($\theta = 0$) e instável na segunda, (b) se $P = 4kl$, as duas posições coincidem e o equilíbrio é instável e (c) se $P > 4kl$, o equilíbrio é instável na primeira posição ($\theta = 0$) e a segunda posição não existe. *Nota:* Supõe-se que o sistema deve deformar-se como mostrado e que não pode girar como um único corpo rígido em torno de A quando A e B coincidem.

Problemas de Recapitulação

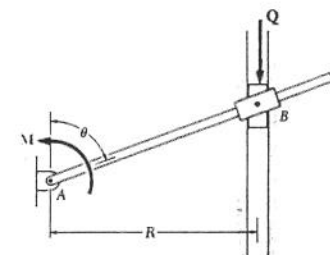
10.80 O alicate da figura é utilizado na colocação de conectores a cabos chatos que podem conter muitos condutores separados. Sabendo que são necessárias forças de 300 N, que têm a direção da reta a-a, para a perfeita fixação dos conectores, determine o módulo Q das forças que devem ser aplicadas aos cabos do alicate.



Figuras P10.80

10.81 O colar B pode deslizar sobre a haste AC e está articulado por um pino a um bloco que pode deslizar em uma guia vertical. Deduza uma expressão para o módulo do vetor-binário M necessário à manutenção do equilíbrio.

10.82 Determine o valor de θ correspondente à posição de equilíbrio da haste AC quando $R = 250$ mm, $Q = 250$ N e $M = 250$ N · m.



Figuras P10.81 e P10.82

10.83 Uma mola AB de constante k é presa a duas engrenagens idênticas, como mostra a figura. Uma barra uniforme CD de massa m é suportada por cordas enroladas em torno de tambores de raio b , presos às engrenagens. Se a mola não está deformada quando $\theta = 0$, obtenha uma equação para o ângulo θ correspondente à posição de equilíbrio.

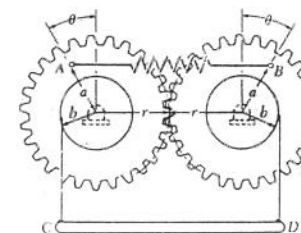


Figura P10.83

10.84 Para o mecanismo do Prob. 10.83, são dados os seguintes valores numéricos: $k = 6$ kN/m, $a = 80$ mm, $b = 60$ mm, $r = 120$ mm e $m = 50$ kg. Determine os valores de θ correspondentes às posições de equilíbrio e estabeleça, em cada caso, se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente.

10.85 O colar A pode deslizar livremente no braço DCE da balança. O braço está articulado por um pino sem atrito em C . A posição do colar A no braço é controlada por um cordão que tem a outra ponta presa a um suporte cilíndrico fixo de raio a . Sabendo que $\ell_A = \ell$ quando o braço está na horizontal, deduza uma equação, envolvendo θ , m_A , m_B , ℓ e a , que deve ser satisfeita quando o braço está em equilíbrio.

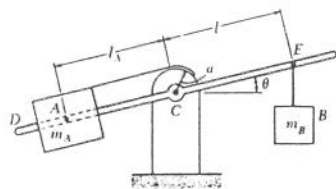
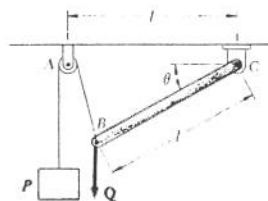
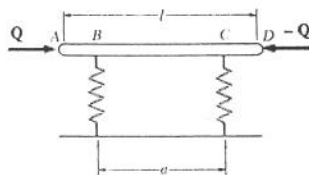


Figura P10.85

10.86 Determine o valor de θ de correspondente à posição de equilíbrio do braço Prob. 10.85, com $m_A = 0,500$ kg, $m_B = 0,450$ kg, $\ell = 0,200$ m e $a = 0,04$ m.

10.87 A barra horizontal AD está presa a duas molas de constantes k e está em equilíbrio na posição ilustrada. Determine os valores do módulo Q das duas forças horizontais Q e $-Q$ para os quais a posição de equilíbrio é estável: (a) se $AB = CD$ e (b) se $AB = 2(CD)$.

10.88 (a) Deduza uma equação que determine o ângulo θ na posição de equilíbrio. (b) Determine o ângulo θ na posição de equilíbrio se $Q = 2P$.



Figuras P10.87 e P10.88

10.89 Duas barras ABC e CD estão presas a uma mola de constante k que não está esticada quando as barras estão na vertical. Determine os valores de Q para os quais o equilíbrio do sistema é estável na posição ilustrada.

10.90 Os blocos A e B , com massas m_A e m_B , estão ligados por um cabo AB que passa sobre uma polia em C . Desprezando o atrito, deduza uma equação envolvendo θ , β , m_A e m_B que deve ser satisfeita quando o sistema está em equilíbrio.

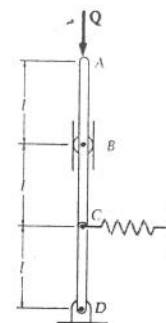


Figura P10.89

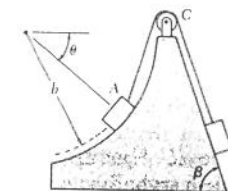


Figura P10.90

10.91 A força P está aplicada ao mecanismo da figura. Deduza uma equação para o módulo da força Q necessária para manter o equilíbrio.

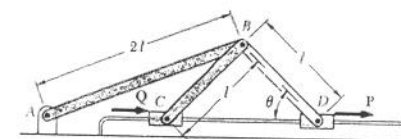


Figura P10.91

Recapitulação e Sumário

A primeira parte deste capítulo foi dedicada ao princípio dos trabalhos virtuais.

Trabalho de uma força

Inicialmente definimos o trabalho de uma força $\mathbf{F}$ correspondente ao pequeno deslocamento $d\mathbf{r}$ [Seção 10.2]

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

obtido, fazendo-se o produto escalar da força $\mathbf{F}$ pelo deslocamento $d\mathbf{r}$ (Figura 10.16). Sendo F e ds , respectivamente, os módulos da força e do deslocamento, e α o ângulo formado por $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{r}$ escrevemos

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1)$$

O trabalho dU é positivo se $\alpha < 90^\circ$, zero se $\alpha = 90^\circ$ e negativo se $\alpha > 90^\circ$. Verificamos ainda, que o trabalho de um binário de momento M aplicado a um corpo rígido é

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

onde $d\theta$ é o pequeno ângulo, medido em radianos, de rotação do corpo.

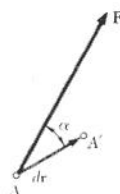


Figura 10.16

Deslocamento virtual

Considerando um ponto material na posição A , sobre o qual agem várias forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ [Seção 10.3], nós imaginamos que ele movimentou-se até uma nova posição

A' (Fig. 10.17). Como este deslocamento realmente não ocorreu ele é chamado de *deslocamento virtual* e representado por $\delta\mathbf{r}$, sendo o trabalho correspondente das forças chamado de *trabalho virtual* e representado por δU . Escrevemos

$$\delta U = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r}$$

Princípio dos trabalhos virtuais

O *Princípio dos trabalhos virtuais* afirma que, se um ponto material está em equilíbrio, o *trabalho virtual* δU das forças que atuam sobre ele é nulo, qualquer que seja o seu deslocamento virtual.

O princípio dos trabalhos virtuais pode ser estendido para corpos rígidos e sistemas de corpos rígidos. Como este princípio envolve apenas *forças que efetuam trabalho*, ele oferece uma alternativa útil ao uso de equações de equilíbrio para a solução de muitos problemas de engenharia. Ele é particularmente adequado no caso de máquinas e mecanismos formados por corpos rígidos vinculados, pois o trabalho das reações de vínculo é nulo e os trabalhos das forças internas nos pinos das articulações têm soma nula [Seção 10.4; Problemas Resolvidos 10.1, 10.2 e 10.3].

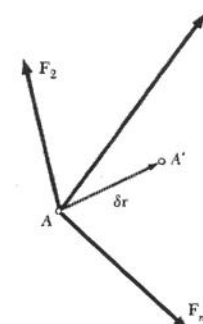


Figura 10.17

Rendimento mecânico

No caso de *máquinas reais*, entretanto [Seção 10.5], deve-se levar em conta o trabalho das forças de atrito, o que faz com que o *trabalho produzido seja menor que o trabalho recebido*. Definindo o *rendimento mecânico* de uma máquina pela razão

$$\eta = \frac{\text{trabalho produzido}}{\text{trabalho recebido}} \quad (10.9)$$

observamos que para uma máquina ideal (sem atrito) $\eta = 1$, sendo que para máquinas reais $\eta < 1$.

Trabalho de uma força em um deslocamento finito

Na segunda parte do capítulo consideramos o *trabalho de forças correspondentes a deslocamentos finitos* de seus pontos de aplicação. O trabalho $U_{1 \rightarrow 2}$ da força F correspondente ao deslocamento da partícula A de A_1 a A_2 (Fig. 10.18) foi obtido integrando o lado direito da equação (10.1), ou (10.1'), ao longo da curva descrita pela partícula [Seção 10.6]:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.11)$$

ou

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{S_1}^{S_2} (F \cos \alpha) ds \quad (10.11')$$

Analogamente, o trabalho de um binário de momento M , correspondente a uma rotação finita de θ_1 a θ_2 de um corpo rígido, foi expresso por

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (10.12)$$

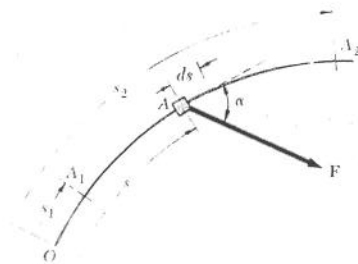


Figura 10.18

Trabalho de um peso

O *trabalho do peso P de um corpo*, quando seu baricentro se desloca de um ponto com altura y_1 para outro com altura y_2 (Fig. 10.19), pode ser obtido fazendo $F = P$ e $\alpha = 180^\circ$ na Eq. (10.11'):

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} P dy = Py_1 - Py_2 \quad (10.13)$$

O trabalho de P é, pois, positivo quando a altura y diminui.

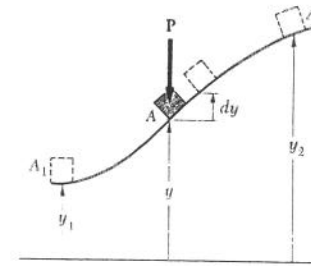


Figura 10.19

Trabalho da força exercida por uma mola

O *trabalho da força F exercida por uma mola* sobre um corpo A , quando a mola é esticada de x_1 a x_2 , (Fig. 10.20) pode ser calculado fazendo $F = kx$, onde k é a constante da mola e $\alpha = 180^\circ$ na Eq. (10.11'):

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 \quad (10.15)$$

O trabalho de F é positivo quando a mola está voltando à situação de deformação nula.

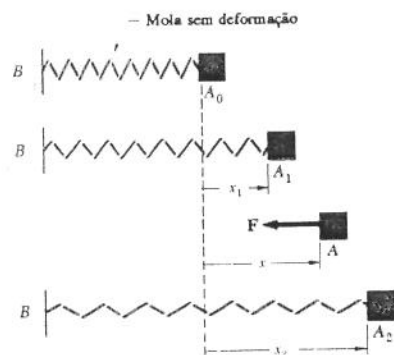


Figura 10.20

Energia potencial

Quando o trabalho da força F é independente do caminho seguido entre A_1 e A_2 , diz-se que a força é conservativa e escreve-se

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (10.20)$$

onde V é a energia potencial associada a F e V_1 e V_2 são os valores de V em A_1 e A_2 [Seção 10.7]. Verificamos ainda que as energias potenciais associadas com a força peso P e com a força elástica F exercida por uma mola são

$$V_g = Py \quad \text{e} \quad V_e = \frac{1}{2} kx^2 \quad (10.17, 10.18)$$

Expressão alternativa para o princípio dos trabalhos virtuais

Quando a posição de um sistema mecânico depende apenas de uma variável θ , a energia potencial do sistema é a função $V(\theta)$ e da Eq. (10.20) deduz-se que $\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta) \delta\theta$. A condição de equilíbrio $\delta U = 0$ imposta pelo princípio dos trabalhos virtuais pode, então, ser substituída pela condição

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (10.21)$$

É preferível utilizar a Eq. (10.21) quando todas as forças envolvidas são conservativas do que aplicar diretamente o princípio dos trabalhos virtuais [Seção 10.8; Problema Resolvido 10.4].

Apêndice

Centróides de formas comuns de superfícies

Forma da superfície	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Triângulo		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um quarto de elipse		$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Limitada por um segmento de reta e uma semi-elipse		$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e uma semiparábola		$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Limitada por um segmento de reta e uma parábola		$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

(continuação)

Forma da superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do 2º grau		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do grau n		$\frac{n+1}{n+2} a$	$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Momentos de inércia de figuras geométricas comuns

Retângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} b h^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} b^3 h$ $I_x = \frac{1}{3} b h^3$ $I_y = \frac{1}{3} b^3 h$ $\bar{J}_C = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2)$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36} b h^3$ $I_x = \frac{1}{12} b h^3$

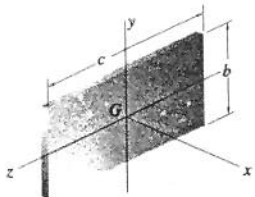
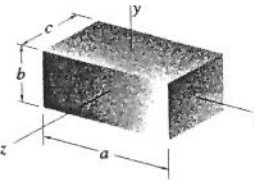
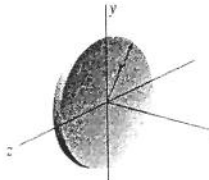
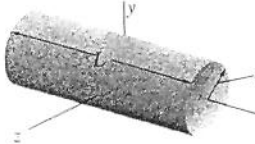
(continuação)

Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi r^4$ $\bar{J}_O = \frac{1}{2} \pi r^4$
Semicírculo		$I_x = \bar{I}_y = \frac{1}{8} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4} \pi r^4$
Quadrante		$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8} \pi r^4$
Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4} \pi a b^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$ $\bar{J}_O = \frac{1}{4} \pi a b (a^2 + b^2)$

Momentos de inércia de sólidos de formas geométricas comuns

Haste delgada		$I_y = I_z = \frac{1}{12} m L^2$
---------------	--	----------------------------------

(continuação)

Placa retangular fina		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma retangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco fino		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cone circular		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

Respostas aos Problemas Pares

CAPÍTULO 2

- 2.2. $707\text{ N} \angle 58,6^\circ$
 2.4. $17,0 \text{ kN} \nearrow 84,8^\circ$
 2.6. $19,0^\circ$
 2.8. (a) 585 N . (b) 896 N .
 2.10. (a) $78,9 \text{ N}$. (b) 169 N .
 2.12. $P = 72,1 \text{ N}$; $\alpha = 44,7^\circ$.
 2.14. $414\text{ N} \searrow 72,0^\circ$.
 2.16. $(45\text{ N}) 25,8 \text{ N}, +36,9 \text{ N}$;
 $(60\text{ N}) +49,1 \text{ N}, +34,4 \text{ N}$;
 $(75\text{ N}) +48,2 \text{ N}, -57,5 \text{ N}$.
 2.18. $(530\text{ N}) +450 \text{ N}, +280 \text{ N}$;
 $(510\text{ N}) -240 \text{ N}, +450 \text{ N}$.
 2.20. (a) 261 N . (b) -168 N .
 2.22. $-120 \text{ N}, +350 \text{ N}$.
 2.24. $(300 \text{ N}) 77,6 \text{ N}, 290 \text{ N}$
 $(450 \text{ N}) 369 \text{ N}, 258 \text{ N}$.
 2.26. $1,45 \text{ kN} \angle 78,4^\circ$.
 2.28. $760 \text{ N} \angle 74,0^\circ$.
 2.30. $25,6 \text{ kN}$.

- 2.32. (a) $36,9^\circ$. (b) 80 N.
 2.34. $T_{AC} = 352 \text{ N}$; $T_{BC} = 261 \text{ N}$.
 2.36. $T_{AC} = 265 \text{ N}$; $T_{BC} = 175 \text{ N}$.
 2.38. $T_{AC} = 326 \text{ N}$; $T_{BC} = 369 \text{ N}$.
 2.40. $T_A = 231 \text{ N}$; $T_B = 577 \text{ N}$.
 2.42. $T_{AB} = 600 \text{ N}$; $T_{AC} = 344 \text{ N}$.
 2.44. (a) $\alpha = 35^\circ$; $T_{AC} = 410 \text{ N}$; $T_{BC} = 287 \text{ N}$. (b) $\alpha = 55^\circ$; $T_{AC} = T_{BC} = 305 \text{ N}$.
 2.46. 0,75m.
 2.48. (a) 1,47 kN. (b) 1,47 kN. (c) 981 N. (d) 981 N. (e) 736 N.
 2.50. 913 N $\sphericalangle$ $82,5^\circ$.
 2.52. (a) 80 N. (b) 285 N.
 2.54. (a) +278 N, +383 N, +161 N.
 (b) $56,2^\circ$, $40,0^\circ$, $71,3^\circ$.
 2.56. (a) -176 N, -257 N, +251 N.
 (b) 116° , 130° , $51,1^\circ$.
 2.58. (a) -9 305 N, +16 800 N, +3 385 N.
 (b) $118,5^\circ$, $30,5^\circ$, $80,0^\circ$.
 2.60. 1,05 kN; $51,8^\circ$; 108° ; 136° .
 2.62. (a) $F_x = 538,5 \text{ N}$, $F_z = 1 335 \text{ N}$;
 $F = 2080 \text{ N}$. (b) $43,9^\circ$.
 2.64. -6,30 kN, +6,06 kN, +4,86 kN.
 2.66. -1 125 N, +750 N, +450 N.
 2.68. $R = 3 115 \text{ N}$; $\theta_x = 37,4^\circ$, $\theta_y = 122,0^\circ$, $\theta_z = 72,6^\circ$.
 2.70. $R = 498 \text{ N}$; $\theta_x = 68,9^\circ$, $\theta_y = 26,3^\circ$, $\theta_z = 75,1^\circ$.
 2.72. 510 N.
 2.74. 10,1 kN.
 2.76. 9,32 kN.
 2.78. $T_{AB} = 500 \text{ N}$; $T_{AC} = 459 \text{ N}$; $T_{AD} = 516 \text{ N}$.
 2.80. $T_{AB} = 2,88 \text{ kN}$; $T_{AC} = 5,76 \text{ kN}$; $T_{AD} = 3,60 \text{ kN}$.
 2.82. $T_{AB} = T_{AC} = 16,75 \text{ N}$; $T_{AD} = 29,0 \text{ N}$.
 2.84. $T_{AB} = 158,5 \text{ N}$; $T_{AC} = 321,5 \text{ N}$.
 2.86. $H = 138 \text{ N}$; $T_{AB} = 270 \text{ N}$; $T_{AC} = 196 \text{ N}$.
 2.88. $H = 131 \text{ N}$; $Q = 28,6 \text{ N}$. $T_{AB} = T_{AC} = 220 \text{ N}$.
 2.90. $T_{BAC} = 288 \text{ N}$; $T_{AD} = 100,5 \text{ N}$; $T_{AE} = 184,5 \text{ N}$.
 2.92. 605 mm.

- 2.94. $x = 67 \text{ mm}$, $z = 134 \text{ mm}$.
 2.96. (a) 991 N. (b) 973 N.
 2.98. $314 \text{ N} \leq P \leq 1 290 \text{ N}$.
 2.100. $141,5^\circ$, $124,4^\circ$, $74,9^\circ$.
 2.102. $179 \text{ N} < P < 669 \text{ N}$.
 2.104. (a) $1 685 \text{ N} \sphericalangle 10,7^\circ$. (b) $1480 \text{ N} \sphericalangle 3,1^\circ$.
 2.106. $T_{AD} = 200 \text{ N}$; $T_{BD} = T_{CD} = 170 \text{ N}$.

CAPÍTULO 3

- 3.2. $16,4^\circ$.
 3.4. $116 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 3.6. (a) $27,4 \text{ N} \cdot \text{m}$. (b) $228 \text{ N} \sphericalangle 42,0^\circ$.
 3.8. $18,5 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 3.10. 772 N.
 3.12. $d = (xF_y - yF_x) / (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$.
 3.14. (a) $+3\mathbf{i} - 26\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$. (b) 0. (c) $-15\mathbf{i} - 20\mathbf{j}$.
 3.16. $(7,50 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (6,00 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (10,4 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
 3.18. $(267 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (78,1 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (202 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
 3.20. 101 mm.
 3.22. 2,81 m.
 3.24. 207 mm.
 3.26. $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = +1$; $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -11$; $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} = +10$.
 3.28. $77,9^\circ$.
 3.30. $26,8^\circ$.
 3.32. (a) $59,1^\circ$. (b) 648 N.
 3.34. +46; +46; -46.
 3.36. $M_x = 0$, $M_y = -162 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_z = +270 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 3.38. 196 N.
 3.40. $P = 125 \text{ N}$; $\phi = 73,7^\circ$, $\theta = 53,1^\circ$.
 3.42. $-90,0 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 3.44. $280 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 3.46. $+Pa / \sqrt{2}$.

- 3.48. (b) $d = a / \sqrt{2}$.
- 3.50. 0,268 m.
- 3.52. 322 mm.
- 3.54. (a) 16,7 N. (b) 31,3 N. (c) 14,7 N.
- 3.56. 32 mm.
- 3.58. (a) $M = 13,6 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 27,8^\circ$, $\theta_y = 62,2^\circ$, $\theta_z = 90^\circ$. (b) 18,2 N $\searrow$ 62,2° em B e 18,2 N $\swarrow$ 62,2° em C.
- 3.60. $M = 4\,750 \text{ N} \cdot \text{m}$; $\theta_x = 164^\circ$, $\theta_y = 92,9^\circ$, $\theta_z = 74,8^\circ$.
- 3.62. $\mathbf{F} = 1\,156 \text{ N} \nearrow 67,4^\circ$, $\mathbf{M} = 22,6 \text{ N} \cdot \text{m}$ $\rfloor$.
- 3.64. (a) $\mathbf{F} = 250 \text{ N} \swarrow 25^\circ$, $\mathbf{M} = 57,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ $\rfloor$.
(b) $\mathbf{A} = 375 \text{ N} \searrow 25^\circ$, $\mathbf{B} = 625 \text{ N} \swarrow 25^\circ$.
- 3.66. $\mathbf{F} = 750 \text{ N} \downarrow$ $x = 40 \text{ mm}$.
- 3.68. (a) 30° . (b) $65,7^\circ$.
- 3.70. $\mathbf{F} = -(1\,334 \text{ N})\mathbf{i} + (534 \text{ N})\mathbf{j} - (890 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (4\,067 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2\,440 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
- 3.72. $\mathbf{F} = -(123 \text{ N})\mathbf{j} - (86,0 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M} = (22,6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (15,5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (22,1 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
- 3.74. Sistemas força-binário em D e C.
- 3.76. c e g.
- 3.78. (a) 500 N $\downarrow$; 2,2 m, (b) 500 N $\uparrow$; 1,0 m, (c) 500 N $\downarrow$; 0,4 m.
- 3.80. (a) 457 mm. (b) 960 mm. (c) 1 692 mm.
- 3.82. (a) 1 739 N $\swarrow$ 39,8°;
(b) 0,305 m para a direita de C e 0,254 m acima de C.
- 3.84. (a) 136 N $\swarrow$ 28°. (b) 18,4 mm à direita de A e 50,0 mm acima de C.
- 3.86. (a) $\mathbf{R} = 3,2 \text{ kN} \rightarrow$, $\mathbf{M}_D^R = 22,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$ $\rfloor$.
(b) $\mathbf{R} = 3,2 \text{ kN} \rightarrow$, 7,1 m abaixo de DE.
- 3.88. (a) $\mathbf{B} = -(80 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{C} = (-30 \text{ N})\mathbf{i} + (40 \text{ N})\mathbf{k}$.
(b) $R_y = 0$, $R_z = -40 \text{ N}$. (c) Vertical.
- 3.90. (a) 60° . (b) $\mathbf{R} = (66,5 \text{ N})\mathbf{i} - (115 \text{ N})\mathbf{j}$;
 $\mathbf{M}_C^R = (35,2 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$.
- 3.92. $\mathbf{R} = (66,5 \text{ N})\mathbf{i} - (115 \text{ N})\mathbf{j}$;
 $\mathbf{M}_E^R = (35,2 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (9,4 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
(a) Aperta. (b) Afrouxa.

- 3.94. 333 kN em $x = +1,46 \text{ m}$ e $z = -0,424 \text{ m}$.
- 3.96. 140 kN; 0,714 m de A, na aresta AD.
- 3.98. (a) $\mathbf{R} = -(267 \text{ N})\mathbf{j}$. (b) -15,2 mm.
(c) $x = 0$, $z = 229 \text{ mm}$.
- 3.100. (a) $-(40 \text{ N})\mathbf{j}$. (b) 2,5 mm.
(c) $x = -5 \text{ mm}$, $z = 0$.
- 3.102. (a) $-\frac{1}{2} P\mathbf{k}$. (b) $R = \frac{3}{2} P$, $\theta_x = \theta_y = 48,2^\circ$,
 $\theta_z = 109,5^\circ$, (c) $y = a$, $z = \frac{1}{2}a$.
- 3.104. (a) $R = 491 \text{ N}$; $\theta_x = 148,7^\circ$, $\theta_y = 95,8^\circ$,
 $\theta_z = 120,6^\circ$. (b) 16,4 mm.
(c) $x = +358 \text{ mm}$, $z = +138 \text{ mm}$.
- 3.106. (a) $\mathbf{R} = (178 \text{ N})\mathbf{i} + (133 \text{ N})\mathbf{j}$. (b) +76,7 mm.
(c) $x = 0$, $z = -68 \text{ mm}$.
- 3.112. 4,06 kN.
- 3.114. 4 075 N.
- 3.116. 132 N $\cdot \text{m}$ $\rfloor$.
- 3.118. (a) 500 N $\swarrow$ 60°, 68,9 N $\cdot \text{m}$ $\rfloor$.
(b) $\mathbf{A} = 689 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{B} = 1\,150 \text{ N} \swarrow$ 77,4°.
- 3.120. 60,1 kN $\downarrow$, em $x = 4,99 \text{ m}$, $z = 3,33 \text{ m}$.
- 3.122. (a) $\mathbf{A} = 111 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{C} = 111 \text{ N} \uparrow$.
(b) $\mathbf{B} = 160 \text{ N} \swarrow$; $\mathbf{D} = 160 \text{ N} \nwarrow$.
(c) $\mathbf{A} = 103 \text{ N} \swarrow$; $\mathbf{D} = 103 \text{ N} \nwarrow$.

CAPÍTULO 4

- 4.2. (a) 117 N $\uparrow$ (b) 392 N $\uparrow$.
- 4.4. (a) 64,6 kN. (b) 106,6 kN $\uparrow$.
- 4.6. $62,0^\circ$.
- 4.8. $0,5 \text{ kN} \leq Q \leq 11 \text{ kN}$.
- 4.10. $1 \text{ kN} \leq Q \leq 3,25 \text{ kN}$.
- 4.12. $\mathbf{A} = 489 \text{ N} \downarrow$; $\mathbf{C} = 669 \text{ N} \searrow$ 81,4°.
- 4.14. 1150 N.

- 4.16. (a) $A = 4,27 \text{ kN} \searrow 20,6^\circ$; $B = 4,50 \text{ kN} \uparrow$.
 (b) $A = 1,50 \text{ kN} \uparrow$; $B = 6,02 \text{ kN} \searrow 48,4^\circ$.
 (c) $A = 2,05 \text{ kN} \searrow 47,0^\circ$; $B = 5,20 \text{ kN} \searrow 60,0^\circ$.
- 4.18. (a) $A = 125 \text{ N} \downarrow$; $B = 125 \text{ N} \uparrow$.
 (b) $A = 188 \text{ N} \leftarrow$; $B = 188 \text{ N} \rightarrow$.
 (c) $A = 104 \text{ N} \nearrow 60^\circ$; $B = 104 \text{ N} \nwarrow 60^\circ$.
- 4.20. $T_{BE} = 196,2 \text{ N}$; $A = 73,6 \text{ N} \rightarrow$; $D = 73,6 \text{ N} \leftarrow$.
- 4.22. $A = 347 \text{ N} \rightarrow$; $B = 173 \text{ N} \nwarrow 60^\circ$; $C = 866 \text{ N} \searrow 60^\circ$.
- 4.24. (a) $1,84 \text{ kN} \rightarrow$; (b) $1,25 \text{ kN} \nearrow 40^\circ$.
- 4.26. (a) 640 N ; (b) $A = 400 \text{ N} \uparrow$; $B = 320 \text{ N} \rightarrow$.
- 4.28. (a) $M = 7,23 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 (b) $A_x = 40,2 \text{ N} \rightarrow$; $A_y = 150 \text{ N} \uparrow$.
- 4.30. $258 \text{ N} \leq T_2 \leq 790 \text{ N}$.
- 4.32. $\theta = \arctg(Q/3P)$.
- 4.34. (a) $\theta = 2 \arcsen(W/2P)$. (b) $\theta = 29,0^\circ$.
- 4.36. (a) $\theta = 2 \arcsen\left[\frac{kl}{2}/(kl - P)\right]$; (b) $83,6^\circ$.
- 4.38. (a) $y\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right) = \frac{P}{k}$. (b) $1,00 \text{ kN/m}$.
- 4.40. 1) Completamente vinculada; determinada;
 $A = 60,1 \text{ kN} \nwarrow 56,3^\circ$; $B = 33,4 \text{ kN} \leftarrow$.
 2) Ineficazmente vinculada; indeterminada; não equilibrada.
 3) Completamente vinculada; determinada; $A = C = 25 \text{ kN} \uparrow$.
 4) Completamente vinculada; indeterminada;
 $A_x = 33,4 \text{ kN} \rightarrow$; $B_x = 33,4 \text{ kN} \leftarrow$;
 $(A_y + B_y = 50 \text{ kN} \uparrow)$.
 5) Ineficazmente vinculada; indeterminada; não equilibrada.
 6) Parcialmente vinculada; determinada; equilibrada;
 $A = C = 25 \text{ kN} \uparrow$.
 7) Completamente vinculada; determinada;
 $A = 25 \text{ kN} \uparrow$; $B = 41,7 \text{ kN} \searrow 36,9^\circ$;
 $C = 33,4 \text{ kN} \rightarrow$.
 8) Completamente vinculada; indeterminada;
 $A_y = 25 \text{ kN} \uparrow$.

- 4.42. $A = 2,23 \text{ kN} \searrow 7,73^\circ$; $B = 2,21 \text{ kN} \rightarrow$.
- 4.44. $A = 313 \text{ N} \searrow 53,1^\circ$; $B = 188 \text{ N} \rightarrow$.
- 4.46. (a) $A = P \sqrt{2} \nearrow 45^\circ$; $B = P \uparrow$.
 (b) $A = P/\sqrt{2} \leftarrow$; $B = P/\sqrt{2} \uparrow$.
- 4.48. $A = 413 \text{ N} \nwarrow 14,0^\circ$; $T = 500 \text{ N}$.
- 4.52. $A = 170 \text{ N} \searrow 33,9^\circ$; $C = 160 \text{ N} \nwarrow 28,1^\circ$.
- 4.54. (a) 600 N . (b) $C = 750 \text{ N} \nearrow 36,9^\circ$.
- 4.56. $\theta + \alpha = 90^\circ$.
- 4.58. (a) 225 mm . (b) $23,1 \text{ N}$. (c) $12,2 \text{ N}$.
- 4.60. $34,3^\circ$.
- 4.62. $A = (150 \text{ N})\mathbf{j} - (14,5 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $B = (100 \text{ N})\mathbf{j} - (57,8 \text{ N})\mathbf{k}$; $C = (72,2 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.64. $A = (104 \text{ N})\mathbf{j} + (128 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $D = (52 \text{ N})\mathbf{j} + (160 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.66. (a) 750 N ; (b) $C = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (750 \text{ N})\mathbf{j}$;
 $D = -(1,00 \text{ kN})\mathbf{i} - (0,300 \text{ kN})\mathbf{j}$.
- 4.68. $T_A = 24,5 \text{ N}$; $T_B = 73,6 \text{ N}$; $T_C = 98,1 \text{ N}$.
- 4.70. 450 N em $x = 0,267 \text{ m}$, $z = 0,732 \text{ m}$.
- 4.72. (a) $T_{BD} = T_{BE} = 16,6 \text{ kN}$.
 (b) $A = (17,0 \text{ kN})\mathbf{i} + (45,1 \text{ kN})\mathbf{j}$.
- 4.74. (a) $T_{BD} = 3,50 \text{ kN}$; $T_{BC} = 4,88 \text{ kN}$.
 (b) $A = (7,50 \text{ kN})\mathbf{i} + (2,13 \text{ kN})\mathbf{j}$.
- 4.76. (a) $T_{DE} = T_{DF} = 1,12 \text{ kN}$.
 (b) $A = -(2,95 \text{ kN})\mathbf{i} + (5,77 \text{ kN})\mathbf{j}$.
- 4.78. (a) 786 N .
 (b) $A = -(491 \text{ N})\mathbf{i} - (324 \text{ N})\mathbf{k}$; $B = (225 \text{ N})\mathbf{j}$.
- 4.80. (a) $15,0 \text{ N}$.
 (b) $A = -(14,7 \text{ N})\mathbf{i} + (34,5 \text{ N})\mathbf{j}$; $B = (37,5 \text{ N})\mathbf{j}$.
- 4.82. (a) 689 N . (b) $A = (503 \text{ N})\mathbf{i} + (424 \text{ N})\mathbf{j}$;
 $B = (151 \text{ N})\mathbf{i} + (557 \text{ N})\mathbf{j} - (229 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.84. (a) $1,55 \text{ kN}$. (b) $A = (0,50 \text{ kN})\mathbf{i} + (1,09 \text{ kN})\mathbf{j}$;
 $B = (0,151 \text{ kN})\mathbf{i} - (0,113 \text{ kN})\mathbf{j} - (1,00 \text{ kN})\mathbf{k}$.
- 4.86. (a) $15,0 \text{ N}$. (b) $B = -(14,7 \text{ N})\mathbf{i} + (72,0 \text{ N})\mathbf{j}$;
 $M_B = -(31,1 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (13,2 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$.

- 4.88. (a) 689 N.
 (b) $\mathbf{B} = (654 \text{ N})\mathbf{i} + (981 \text{ N})\mathbf{j} - (229 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M}_B = -(883 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (1046 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$.
- 4.90. (a) 62,5 N.
 (b) $\mathbf{A} = (30,0 \text{ N})\mathbf{j} + (22,5 \text{ N})\mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (50,0 \text{ N})\mathbf{i}$.
- 4.92. (a) $D = 225 \text{ N}$. (b) $S = 300 \text{ N}$; $d = 0,75 \text{ m}$.
- 4.94. $\mathbf{B} = (153 \text{ N})\mathbf{i} - (225 \text{ N})\mathbf{k}$.
 $\mathbf{C} = + (2,50 \text{ N})\mathbf{j} + (225 \text{ N})\mathbf{k}$.
 $\mathbf{D} = -(153 \text{ N})\mathbf{i} + (30,0 \text{ N})\mathbf{j}$.
- 4.96. $T_{BD} = 2,90 \text{ kN}$; $T_{BE} = 5,25 \text{ kN}$; $T_{CD} = 2,00 \text{ kN}$.
- 4.98. $(90 \text{ N})\mathbf{j}$.
- 4.100. $(45 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 4.102. 652 N.
- 4.104. (a) 450 N. (b) $\mathbf{A} = 3,00 \text{ kN} \leftarrow$; $\mathbf{B} = 3,00 \text{ kN} \rightarrow$.
- 4.106. 312 N.
- 4.108. $\mathbf{B} = 571 \text{ N} \searrow 57,7^\circ$; $\mathbf{C} = 356 \text{ N} \swarrow 31,0^\circ$.
- 4.110. $\mathbf{A} = (375 \text{ N})\mathbf{j} - (500 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{B} = (625 \text{ N})\mathbf{i} + (500 \text{ N})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{C} = -(625 \text{ N})\mathbf{i} + (375 \text{ N})\mathbf{j}$.
- 4.112. $19,4^\circ$.
- 4.114. $\mathbf{A} = 58,5 \text{ kN} \swarrow 60^\circ$; $\mathbf{B} = 39,6 \text{ kN} \searrow 83,8^\circ$.

CAPÍTULO 5

- 5.2. $\bar{X} = 82 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 70 \text{ mm}$.
- 5.4. $\bar{X} = 70,0 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 60,0 \text{ mm}$.
- 5.6. $\bar{X} = 16 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 32 \text{ mm}$.
- 5.8. $\bar{X} = \bar{Y} = 127 \text{ mm}$.
- 5.10. $\bar{X} = \bar{Y} = 13 \text{ mm}$.
- 5.12. $\bar{X} = \bar{Y} = 225 \text{ mm}$.

- 5.14. $\bar{X} = 321 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 53 \text{ mm}$.
- 5.16. $\bar{X} = \frac{1}{3}a(h_1 + 2h_2)/(h_1 + h_2)$.
- 5.18. 0,520.
- 5.20. 0,494.
- 5.22. $42 \times 10^3 \text{ mm}^3 \mathbf{e} - 42 \times 10^3 \text{ mm}^3$.
- 5.24. (a) $Q_x = \frac{1}{2}b(c^2 - y^2)$.
 (b) $y = 0$; $(Q_x)_{\max} = \frac{1}{2}bc^2$.
- 5.26. $\bar{X} = 84 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 73 \text{ mm}$.
- 5.28. $\bar{X} = 18 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 30 \text{ mm}$.
- 5.30. 120 mm.
- 5.32. (a) $\sqrt{3}r$. (b) $\sqrt{5}r$.
- 5.36. 15 mm.
- 5.38. $\bar{x} = 0,7424a$; $-1,01\%$.
- 5.40. $\bar{x} = 2a/5$, $\bar{y} = 3b/7$.
- 5.42. $\bar{x} = 3a/5$, $\bar{y} = 12b/35$.
- 5.50. $\bar{y} = 0,48h$.
- 5.52. $\bar{x} = L/\pi$, $\bar{y} = \pi a/8$.
- 5.54. $\bar{x} = h$, $\bar{y} = \frac{1}{4}h$.
- 5.56. (a) $9,13 \times 10^6 \text{ mm}^3$ (b) $10,6 \times 10^6 \text{ mm}^3$.
- 5.58. $A = 4\pi^2 rR$; $V = 2\pi^2 r^2 R$.
- 5.60. $7,72 \times 10^6 \text{ mm}^3$; 57,2 N.
- 5.62. $6,03 \text{ m}^2$.
- 5.64. $21,3 \times 10^3 \text{ mm}^3$; 154 g.
- 5.66. $90,8 \text{ cm}^2$.
- 5.68. (a) $4,27 \text{ m}^3$ (b) $13,1 \text{ m}^2$.
- 5.70. (a) $\pi R^2 h$. (b) $\frac{2}{3} \pi R^2 h$. (c) $\frac{1}{2} \pi R^2 h$. (d) $\frac{1}{3} \pi R^2 h$. (e) $\frac{1}{6} \pi R^2 h$.
- 5.72. $\mathbf{R} = 4,20 \text{ kN} \downarrow$, 1,143 m à direita de A; $\mathbf{A} = 2,20 \text{ kN} \uparrow$, $\mathbf{B} = 2,00 \text{ kN} \uparrow$.
- 5.74. $\mathbf{A} = 3,15 \text{ kN}$; $\mathbf{M}_A = 585 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 5.76. $\mathbf{A} = 2,04 \text{ kN} \uparrow$, $\mathbf{B} = 8,16 \text{ kN} \uparrow$.
- 5.78. $\mathbf{A} = 6,86 \text{ kN} \uparrow$, $\mathbf{B} = 1,76 \text{ kN} \uparrow$.
- 5.80. $\mathbf{B} = 18,9 \text{ kN} \uparrow$, $\mathbf{C} = 2,15 \text{ kN} \uparrow$.

- 5.82. $w_A = 10 \text{ kN/m}$; $w_B = 50 \text{ kN/m}$.
- 5.84. (a) $\mathbf{H} = 99,3 \text{ kN} \rightarrow$, $\mathbf{V} = 324 \text{ kN} \uparrow$; 2,03 m à direita de A.
(b) $\mathbf{R} = 105 \text{ kN}$ $\nearrow 18,4^\circ$.
- 5.86. (a) 36,4 kN; 0,864 m abaixo de A. (b) 21,0 kN $\leftarrow$.
- 5.88. 0,30 m.
- 5.90. $\mathbf{A} = 130 \text{ kN}$ $\nearrow 64,2^\circ$; $\mathbf{B} = 128 \text{ kN} \uparrow$.
- 5.92. 1,38 kN $\swarrow$.
- 5.94. 491 N.
- 5.96. 1,46 m.
- 5.98. $\mathbf{A} = 153 \text{ N} \uparrow$; $\mathbf{B}_x = 177 \text{ N} \leftarrow$; $\mathbf{B}_y = 789 \text{ N} \uparrow$.
- 5.100. $\frac{1}{8} b$ à direita da base do cone.
- 5.102. 27,8 mm acima da base.
- 5.104. $\bar{X} = \bar{Z} = 0$, $\bar{Y} = -0,608 h$.
- 5.106. $\bar{Y} = 19 \text{ mm}$.
- 5.108. $\bar{Z} = 86,8 \text{ mm}$.
- 5.110. $\bar{Z} = 51 \text{ mm}$.
- 5.112. $\bar{X} = 125 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 167 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 33 \text{ mm}$.
- 5.114. $\bar{X} = \bar{Z} = 90 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 121 \text{ mm}$.
- 5.116. $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = 126 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 64 \text{ mm}$.
- 5.118. 33 mm acima da base.
- 5.124. $\bar{x} = 5h/8$.
- 5.126. $\bar{x} = \frac{1}{2} a (1 - 4/\pi^2)$.
- 5.128. $\bar{x} = 3a/8$, $\bar{y} = h/4$, $\bar{z} = 3b/8$.
- 5.130. 42 mm.
- 5.132. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 5h/16$, $\bar{z} = -a/4$.
- 5.134. $\bar{x} = 58 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 83 \text{ mm}$.
- 5.136. (a) $\bar{X} = 300 \text{ mm}$, $\bar{Y} = -117 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 0$. (b) 1,81.
- 5.138. $\bar{x} = 90 \text{ mm}$, $\bar{y} = 15 \text{ mm}$, $\bar{z} = 60 \text{ mm}$.
- 5.140. $\bar{\alpha} + 155 \text{ m}^3$. (b) $+83 \text{ m}^3$.
- 5.142. $\bar{X} = 63,3 \text{ mm}$, $\bar{Y} = 15,4 \text{ mm}$, $\bar{Z} = 50,0 \text{ mm}$.
- 5.144. $\cos \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \theta$.

CAPÍTULO 6

- 6.2. $F_{AB} = 148 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 72 \text{ kN C}$; $F_{AD} = 74 \text{ kN T}$; $F_{BC} = F_{CD} = 70 \text{ kN C}$.
- 6.4. $F_{AB} = 4,50 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 3,90 \text{ kN C}$; $F_{BC} = 3,60 \text{ kN T}$.
- 6.6. $F_{AB} = 4 \text{ kN T}$; $F_{AD} = 15 \text{ kN T}$; $F_{BD} = 9 \text{ kN C}$; $F_{BE} = 5 \text{ kN T}$;
 $F_{CD} = 16 \text{ kN C}$; $F_{DE} = 4 \text{ kN C}$.
- 6.8. $F_{AB} = 3,75 \text{ kN T}$; $F_{AC} = 3,75 \text{ kN T}$; $F_{AD} = 6,00 \text{ kN C}$; $F_{BD} = 1,05 \text{ kN T}$;
 $F_{CD} = 3,60 \text{ kN T}$.
- 6.10. $F_{AB} = 2,10 \text{ kN C}$; $F_{AC} = F_{CE} = 2,00 \text{ kN T}$; $F_{AD} = 1,30 \text{ kN C}$;
 $F_{BC} = F_{CD} = 625 \text{ N T}$;
 $F_{BE} = 4,16 \text{ kN C}$.
- 6.12. $F_{AB} = 10 \text{ kN C}$; $F_{AC} = F_{BC} = F_{CD} = F_{CE} = 12 \text{ kN T}$; $F_{AD} = F_{BE} = 5,8 \text{ kN C}$.
- 6.14. BD , DG , FG , GH , HI , IJ .
- 6.16. AC , CE , EF , FG , GH .
- 6.18. (a) $\mathbf{A} = -(563 \text{ N}) \mathbf{i} - (300 \text{ N}) \mathbf{k}$; $\mathbf{B} = (300 \text{ N}) \mathbf{k}$; $\mathbf{C} = (563 \text{ N}) \mathbf{i} + (350 \text{ N}) \mathbf{j}$.
(b) $F_{AB} = F_{AD} = F_{BC} = 0$; $F_{AC} = 850 \text{ N C}$; $F_{AE} = 1,06 \text{ kN T}$; $F_{BD} = 638 \text{ N T}$;
 $F_{BE} = F_{CD} = 563 \text{ N C}$; $F_{DE} = 300 \text{ N C}$.
- 6.20. (a) $\mathbf{B} = -(2,70 \text{ kN}) \mathbf{k}$; $\mathbf{C} = -(1,80 \text{ kN}) \mathbf{i} - (3,37 \text{ kN}) \mathbf{j}$; $\mathbf{D} = (1,80 \text{ kN}) \mathbf{i} + (3,37 \text{ kN}) \mathbf{j}$.
(b) $F_{AB} = F_{CD} = 0$; $F_{AC} = 4,27 \text{ kN T}$; $F_{AD} = 4,27 \text{ kN C}$; $F_{BC} = 4,27 \text{ kN C}$;
 $F_{BD} = 4,27 \text{ kN T}$.
- 6.22. $F_{FG} = 5 \text{ kN T}$; $F_{FH} = 20 \text{ kN T}$.
- 6.24. $F_{CE} = 36 \text{ kN T}$; $F_{EF} = 15 \text{ kN C}$.
- 6.26. $F_{FG} = 22,7 \text{ kN T}$; $F_{FH} = 53,4 \text{ kN T}$.
- 6.28. $F_{EI} = 54 \text{ kN T}$; $F_{EG} = 60 \text{ kN C}$.
- 6.30. $F_{DG} = 510 \text{ kN C}$; $F_{EG} = 240 \text{ kN C}$.
- 6.32. $F_{BD} = 20 \text{ kN C}$; $F_{BE} = 25 \text{ kN C}$; $F_{CE} = 0$.
- 6.34. $F_{GJ} = 30 \text{ kN C}$; $F_{GK} = 50 \text{ kN C}$; $F_{IK} = 15 \text{ kN T}$.
- 6.36. $F_{DG} = 75 \text{ kN C}$; $F_{FG} = 59 \text{ kN T}$; $F_{FH} = 76 \text{ kN T}$.
- 6.38. $F_{AC} = 11 \text{ kN T}$; $F_{BE} = 11 \text{ kN C}$.
- 6.40. $F_{AE} = 142 \text{ kN C}$; $F_{DE} = 170 \text{ kN T}$.
- 6.42. $F_{DE} = 0$; $F_{BE} = 50 \text{ kN T}$; $F_{EF} = 25 \text{ kN T}$.
- 6.44. $F_{DE} = 7,5 \text{ kN C}$; $F_{BE} = 12,5 \text{ kN T}$; $F_{DG} = 12,5 \text{ kN T}$.
- 6.46. (a) Completamente vinculado; determinado.
(b) Completamente vinculado; indeterminado.
(c) Ineficazmente vinculado.

- 6.48. (a) Completamente vinculado; determinado.
 (b) Ineficazmente vinculado.
 (c) Completamente vinculado; indeterminado.
- 6.50. $F_{BD} = 300 \text{ N C}$; $C_x = 164 \text{ N } \leftarrow$, $C_y = 288 \text{ N } \downarrow$.
- 6.52. $A_x = 4\,500 \text{ N } \leftarrow$, $A_y = 375 \text{ N } \uparrow$; $B = 4\,125 \text{ N } \downarrow$; $D_x = 4\,500 \text{ N } \rightarrow$, $D_y = 3\,750 \text{ N } \uparrow$.
- 6.54. $A = 150 \text{ N } \rightarrow$; $B = 0$; $C_x = 150 \text{ N } \leftarrow$, $C_y = 100 \text{ N } \uparrow$; $D = 100 \text{ N } \downarrow$.
- 6.56. (a) $4,46 \text{ kN } \searrow 8,4^\circ$. (b) $3,53 \text{ kN } \searrow 51,3^\circ$.
- 6.58. $B = 410 \text{ N } \downarrow$; $C_x = 375 \text{ N } \leftarrow$; $C_y = 575 \text{ N } \uparrow$; $D_x = 375 \text{ N } \rightarrow$, $D_y = 60 \text{ N } \uparrow$.
- 6.60. (a) $1\,524 \text{ kN T}$. (b) $1\,133 \text{ kN C}$. (c) $1\,593 \text{ kN } \swarrow 62,1^\circ$.
- 6.62. (a) $A = 325 \text{ N } \nearrow 22,6^\circ$; $C = 600 \text{ N } \rightarrow$; $G = 300 \text{ N } \leftarrow$; $I = 125 \text{ N } \uparrow$.
 (b) $A = 325 \text{ N } \nearrow 22,6^\circ$; $C = 500 \text{ N } \rightarrow$; $G = 400 \text{ N } \leftarrow$; $I = 125 \text{ N } \uparrow$.
- 6.64. (a) $D_x = 750 \text{ N } \leftarrow$, $D_y = 250 \text{ N } \downarrow$; $E_x = 750 \text{ N } \leftarrow$, $E_y = 250 \text{ N } \uparrow$.
 (b) $D_x = 375 \text{ N } \rightarrow$, $D_y = 250 \text{ N } \downarrow$; $E_x = 375 \text{ N } \leftarrow$, $E_y = 250 \text{ N } \uparrow$.
- 6.66. (a) A' e B' . (b) 268 N T .
- 6.68. (a) 885 N T . (b) $C = 1\,310 \text{ N } \swarrow 85,0^\circ$.
- 6.70. $D_x = 13,60 \text{ kN } \rightarrow$, $D_y = 7,50 \text{ kN } \uparrow$; $E_x = 13,60 \text{ kN } \leftarrow$, $E_y = 2,70 \text{ kN } \downarrow$.
- 6.72. (a) $E_x = 15 \text{ kN } \leftarrow$, $E_y = 7,5 \text{ kN } \uparrow$. (b) $C_x = 15 \text{ kN } \leftarrow$, $C_y = 32,5 \text{ kN } \uparrow$.
- 6.74. (a) Em cada roda: $A = 12,5 \text{ kN } \uparrow$; $B = 188 \text{ kN } \uparrow$. (b) $C = 30 \text{ kN } \leftarrow$;
 $D_x = 30 \text{ kN } \rightarrow$, $D_y = 75 \text{ kN } \downarrow$.
- 6.76. (a) $2\,125 \text{ N}$. (b) Em cada roda: $A = 4\,740 \text{ N } \uparrow$; $B = 2\,730 \text{ N } \uparrow$; $C = 3\,570 \text{ N } \uparrow$.
- 6.78. $A_x = 5\,550 \text{ N } \leftarrow$, $A_y = 3\,000 \text{ N } \uparrow$;
 $B_x = 5\,550 \text{ N } \leftarrow$, $B_y = 4\,000 \text{ N } \downarrow$; $D_x = 11,1 \text{ kN } \rightarrow$, $D_y = 1\,000 \text{ N } \uparrow$.
- 6.80. $A_x = 4 \text{ kN } \leftarrow$, $A_y = 2 \text{ kN } \uparrow$;
 $B_x = 6 \text{ kN } \leftarrow$, $B_y = 1 \text{ kN } \uparrow$; $D_x = 10 \text{ kN } \rightarrow$, $D_y = 3 \text{ kN } \downarrow$.
- 6.82. $F_{AF} = \frac{1}{2} P \text{ comp.}$; $F_{BG} = P / \sqrt{2} \text{ ten.}$; $F_{GD} = \sqrt{2} P \text{ ten.}$; $F_{EH} = \frac{1}{2} P \text{ comp.}$
- 6.84. $F_{CF} = 7,88 \text{ kN C}$; $F_{DG} = 5,25 \text{ kN T}$.
- 6.86. $F_{BG} = 5,25 \text{ kN T}$; $F_{CH} = 2,63 \text{ kN C}$.
- 6.88. $A = 200 \text{ N } \uparrow$; $C_x = 1\,800 \text{ N } \rightarrow$, $C_y = 200 \text{ N } \downarrow$; $D = 1\,800 \text{ N } \leftarrow$.
- 6.90. (a) $C_x = 450 \text{ kN } \leftarrow$, $C_y = 420 \text{ kN } \uparrow$. (b) $B_x = 450 \text{ kN } \leftarrow$, $B_y = 30 \text{ kN } \downarrow$.
- 6.92. $A = P/15 \uparrow$; $D = 2P/15 \uparrow$; $E = 8P/15 \uparrow$; $H = 4P/15 \uparrow$.
- 6.94. (a) Rígido; $A = 2,24 P \searrow 26,6^\circ$; $B = 2 P \rightarrow$. (b) e (c) Não rígido.
- 6.96. $a \geq 0,6 \text{ m}$.
- 6.98. (a) $480 \text{ N } \downarrow$. (b) $500 \text{ N } \swarrow 73,7^\circ$.
- 6.100. (a) $2\,020 \text{ N } \downarrow$ (b) $1\,875 \text{ N } \nearrow 66,2^\circ$.
- 6.102. $D = 9\,360 \text{ N } \leftarrow$; $F = 6\,670 \text{ N } \searrow 15,1^\circ$.

- 6.104. $C = 86,8 \text{ kN } \rightarrow$; $E = 50,9 \text{ kN } \nearrow 23,1^\circ$.
- 6.106. $A_x = 180 \text{ N } \leftarrow$, $A_y = 2,25 \text{ kN } \downarrow$; $B = 2,55 \text{ kN } \swarrow 61,9^\circ$; $C = 1,02 \text{ kN } \leftarrow$.
- 6.108. (a) $2,14 \text{ kN } \downarrow$. (b) $5,00 \text{ kN } \downarrow$.
- 6.110. (a) $M_C = 115 \text{ N} \cdot \text{m}$. (b) $C_x = 150 \text{ N } \leftarrow$, $C_y = 200 \text{ N } \uparrow$.
- 6.112. (a) 3 kN . (b) $3,35 \text{ kN } \swarrow 26,6^\circ$.
- 6.114. 60 N .
- 6.116. 147 N .
- 6.118. 200 N .
- 6.120. $179 \text{ N } \downarrow$.
- 6.122. (a) Zero. (b) $C_x = 25 \text{ kN } \leftarrow$, $C_y = 6,0 \text{ kN T } \downarrow$.
- 6.124. $F_{AB} = 1,48 \text{ kN C}$; $F_{DE} = 31,3 \text{ kN T}$; $F_{FI} = 4,55 \text{ kN C}$;
- 6.126. (a) $(52,5 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{i}$. (b) $A = 0$, $M_A = -(36 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{i}$; $B = 0$, $M_B = -(54 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{i}$.
- 6.128. (a) $0,8$. (b) $2,6 M_A$.
- 6.130. (a) $M_G = 26,6 \text{ N} \cdot \text{m}$. (b) $B = +(114 \text{ N}) \mathbf{i}$; $C = -(114 \text{ N}) \mathbf{i}$; $E = 0$.
- 6.132. $3,31 \text{ kN C}$.
- 6.134. (a) $126 \text{ N} \cdot \text{m } \uparrow$. (b) $117 \text{ N} \cdot \text{m } \uparrow$.
- 6.136. (a) $A = 9,0 \text{ kN } \uparrow$, $M_A = 21,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$. $D = 6,0 \text{ kN } \uparrow$.
 (b) $A = 0$, $M_A = 27 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $D = 15 \text{ kN } \uparrow$.
- 6.138. (a) $1,30 \text{ kN}$. (b) $13,5 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 6.140. $A_x = 90 \text{ N } \leftarrow$, $A_y = 60 \text{ N } \downarrow$; $B_x = 90 \text{ N } \rightarrow$, $B_y = 540 \text{ N } \uparrow$.
- 6.142. $F_{CE} = 30 \text{ kN T}$; $F_{DE} = 100 \text{ kN T}$; $F_{DF} = 90 \text{ kN C}$.
- 6.144. $A = 666 \text{ N } \searrow 63,2^\circ$; $F = 325 \text{ N } \swarrow 22,6^\circ$.

CAPÍTULO 7

- 7.2. (Em J_D) $F = 0$; $V = 200 \text{ N } \uparrow$, $M = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.4. (Em J_D) $F = 0$; $V = 100 \text{ N } \uparrow$; $M = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.6. (Em K_{CD}) $F = 750 \text{ N } \downarrow$; $M = 170 \text{ N} \cdot \text{m}$. $V = 400 \text{ N } \rightarrow$;
- 7.8. (Em CD) $F = 270 \text{ N } \rightarrow$; $V = 90 \text{ N } \uparrow$; $M = 43,2 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.10. (Em J_{CD}) $F = 3,75 \text{ kN } \leftarrow$, $V = 0$; $M = 750 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.12. (a) (Em AC) $F = 520 \text{ N } \leftarrow$; $V = 540 \text{ N } \uparrow$; $M = 0$. (b) (Em AJ) $F = 520 \text{ N } \leftarrow$;
 $V = 540 \text{ N } \uparrow$; $M = 54 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.14. (Em J) $F = 5,20 \text{ kN } \searrow 21,8^\circ$; $V = 464 \text{ N } \nearrow 68,2^\circ$; $M = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$.

- 7.16. (Em J_C) $M = 4,28 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.18. (Em J_C) $F = (\frac{1}{2}P - P\theta/\pi) \cos \theta$ ↘; $V = (\frac{1}{2}P - P\theta/\pi) \sin \theta$ ↗;
 $M = \frac{1}{2}Pr(1 - \cos \theta) - (Pr/\pi)(\sin \theta - \cos \theta)$.
- 7.20. $0,1786 P$; $\theta = 49,3^\circ$.
- 7.22. $M = +\frac{1}{8}\omega L^2$ no centro da viga.
- 7.24. $V = 0$, sempre; $M = +T$ entre B e C ; $M = 0$, no resto.
- 7.26. $V_c = -2Q$; $M_c = -3Q_a$.
- 7.28. $M_D = 62,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.30. $M_C = +180 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.32. $0,4 \text{ m}$.
- 7.34. $M = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ no centro.
- 7.36. $M_C = -9 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.38. Logo à direita de C : $V = +120 \text{ N}$; $M = +24 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.40. $M = +50 \text{ N} \cdot \text{m}$ à esquerda de F .
- 7.42. $M = +4,8 \text{ N} \cdot \text{m}$ na parte CD .
- 7.44. (a) $\frac{1}{3}P$. (b) $\frac{1}{4}P$.
- 7.58. $M_D = +154 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 7.60. $M_C = +14 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.62. $M = +5,76 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $2,4 \text{ m}$ de A .
- 7.64. $M = +4,69 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $1,5 \text{ m}$ de A .
- 7.66. $M = +44,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $3,28 \text{ m}$ de A .
- 7.68. $V = \omega_0(L/\pi) \cos(\pi x/L)$;
 $M = \omega_0(L/\pi)^2 \sin(\pi x/L)$;
 $M_{\text{máx}} = \omega_0(L/\pi)^2$, em $x = \frac{1}{2}L$.
- 7.70. $V = \frac{1}{2}\omega_0 [L(\frac{1}{3} - x/L)^2]$;
 $M = \frac{1}{6}\omega_0 L^2 \left[\left(\frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right]$
 $M_{\text{máx}} = +0,0642 \omega_0 L^2$, em $x = 0,577 L$.
- 7.72. $N = 115 \text{ kN} \downarrow$, $Q = 395 \text{ kN} \downarrow$; $V_D = +120 \text{ kN}$, $M_F = +378 \text{ kN} \cdot \text{m}$.

- 7.74. $N = 250 \text{ N} \downarrow$, $Q = 350 \text{ N} \downarrow$; $V_D = +1,8 \text{ kN}$, $M_C = -2,88 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.76. $L/6$.
- 7.78. 2 m .
- 7.80. (a) $E_x = 125 \text{ kN} \rightarrow$, $E_y = 60 \text{ kN} \uparrow$. (b) 139 kN .
- 7.82. (a) 9 m . (b) $E_x = 5 \text{ kN} \rightarrow$, $E_y = 3 \text{ kN} \uparrow$.
- 7.84. $a = 2,55 \text{ m}$; $b = 5,95 \text{ m}$.
- 7.86. (a) $D_x = 1,40 \text{ kN} \rightarrow$, $D_y = 1,05 \text{ kN} \uparrow$. (b) $5,85 \text{ kN}$. (c) $T_{AB} = 6,00 \text{ kN}$,
 $T_{BC} = 3,75 \text{ kN}$, $T_{CD} = 1,75 \text{ kN}$.
- 7.88. (a) 334 MN . (b) 1306 m .
- 7.90. (a) $4,74 \text{ m}$. (b) $1,76 \text{ kN}$.
- 7.92. (a) 125 mm . (b) $-2,9^\circ$.
- 7.94. (a) 750 mm de A . (b) $8,57 \text{ N}$.
- 7.96. $75,4 \text{ kN}$; $89,0 \text{ kN}$.
- 7.102. $49,86 \text{ m}$.
- 7.104. (a) $2,97 \text{ m}$ (b) 156 N .
- 7.106. (a) $15,02 \text{ m}$; $4,42 \text{ kg/m}$.
- 7.108. $24,1 \text{ m}$; 463 N .
- 7.110. $45,6 \text{ mm}$.
- 7.112. 122 N .
- 7.114. (a) $L = 1,326 T_m/\omega$. (b) $12,9 \text{ km}$.
- 7.116. $0,1408$.
- 7.118. (a) $138,1 \text{ m}$. (b) 649 N .
- 7.120. $M_C = +2,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $M_E = -3,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.122. (a) $2,6 \text{ m}$. (b) $6,71 \text{ kN}$.
- 7.124. (Em FB) (a) $V = 0$, $M = 0,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$. (b) $V = 0$; $M = 0,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
(c) $V = 2 \text{ kN} \downarrow$; $M = 0,6 \text{ kN} \cdot \text{m}$. (d) $V = 2 \text{ kN} \uparrow$; $M = 1,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.126. (c) $M_D = M_E = +0,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$. (d) $M_D = +0,8 \text{ kN} \cdot \text{m}$; $M_E = +1,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
- 7.128. $M_C = +5,13 \text{ N} \cdot \text{m}$.

CAPÍTULO 8

- 8.2. O bloco sobe; $F = 117 \text{ N} \gtr 20^\circ$.
- 8.4. Equilíbrio; $F_{at} = 155 \text{ N} \less 30^\circ$.
- 8.6. (a) 462 N . (b) 447 N . (c) 276 N .
- 8.8. (a) $180 \text{ N} \less 36,7^\circ$. (b) $17,3 \less 3,30^\circ$.

- 8.10. $51,8^\circ$.
 8.12. (a) Não se move; $800 \text{ N} \leftarrow$. (b) Move-se; $491 \text{ N} \leftarrow$.
 8.14. Todos os pacotes se movem; $F_A = 7,58 \text{ N} \nearrow$; $F_B = 3,03 \text{ N} \nearrow$; $F_C = 7,58 \text{ N} \nearrow$.
 8.16. $31,0^\circ$.
 8.18. (a) 177 N . (b) 147 N . (c) 63 N .
 8.20. (a) $66,4^\circ$. (b) 522 N .
 8.22. (a) $2,34 \text{ kN} \rightarrow$. (b) $3,06 \text{ kN} \rightarrow$.
 8.24. $M = \mu_e Pr (1 + \mu_e)$
 8.26. (a) $30,2^\circ$. (b) $0,232P$.
 8.28. (a) $71,9 \text{ mm}$. (b) $39,9 \text{ mm}$.
 8.30. (a) $38,6^\circ$. (b) $0,330 P$.
 8.32. $4,84a \leq L \leq 29,9a$.
 8.34. $5,94a \leq L \leq 12,24a$.
 8.36. Haste fora do equilíbrio.
 8.38. Haste fora do equilíbrio; $F_B = 18,4 \text{ N} \uparrow$.
 8.40. $2,20 \text{ kN} \downarrow$.
 8.42. 469 mm .
 8.44. $0,053$.
 8.46. (a) $11,6^\circ \leq \theta \leq 78,4^\circ$. (b) $0 \leq \theta \leq 63,4^\circ$.
 8.48. $27,4 \text{ N} \leq Q \leq 51,8 \text{ N}$.
 8.50. $103 \text{ N} \leq Q \leq 230 \text{ N}$.
 8.52. 200 N .
 8.54. $955 \text{ N} \leq P \leq 1\,575 \text{ N}$.
 8.56. (a) $0,59$. (b) Em B.
 8.58. (a) $0,48 \text{ m}$. (b) A tábua não se move.
 8.60. (a) $283 \text{ N} \leftarrow$. (b) $B_x = 413 \text{ N} \leftarrow$, $B_y = 480 \text{ N} \downarrow$.
 8.62. $33,4^\circ$; 275 N .
 8.64. $1,43 \text{ kN} \downarrow$.
 8.66. (a) $60,2 \text{ kN} \rightarrow$. (b) $22,5 \text{ kN} \leftarrow$.
 8.68. (a) 246 N . (b) 246 N .
 8.70. $3,05 \text{ N}$.
 8.72. (a) $985 \text{ N} \rightarrow$. (b) A máquina não se move.
 8.74. $22,5 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.76. (a) $11,7 \text{ kN} \cdot \text{m}$. (b) $2,58 \text{ kN} \cdot \text{m}$.
 8.78. $19,6 \text{ kN}$.

- 8.80. (a) Parafuso A. (b) $1,15 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.82. $14,5 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.84. $21,3 \text{ kN}$.
 8.86. (a) 364 N . (b) 314 N .
 8.88. $3,6^\circ$.
 8.90. $0,37$.
 8.92. (a) 920 N . (b) 690 N .
 8.94. $0,19$.
 8.96. $26 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.102. $1,5 \text{ mm}$.
 8.104. (a) $1,29 \text{ kN}$. (b) $1,06 \text{ kN}$.
 8.106. (a) $0,34$. (b) $2,5$.
 8.108. $0,19$.
 8.110. (a) $22,8 \text{ kg}$. (b) 291 N .
 8.112. $T_A = 882 \text{ N}$; $T_B = 382 \text{ N}$.
 8.114. $107 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.116. $169 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 8.118. $T_A = 57,6 \text{ N}$; $T_B = 92,4 \text{ N}$.
 8.120. $0,44$.
 8.122. (a) 428 N ; (b) 240 N (c) 428 N .
 8.124. $0,25$.
 8.128. $T_A = 516 \text{ N}$; $T_B = 16,2 \text{ N}$.
 8.130. (a) 952 mm . (b) $3,95 \text{ m}$.
 8.132. $50 \text{ N} < P < 184 \text{ N}$.
 8.134. (a) $2,94 \text{ N}$. (b) $4,41 \text{ N}$.
 8.136. $0,30$.
 8.138. 195 N .
 8.140. Haste fora do equilíbrio; $F = 0,518P \leftarrow$.

CAPÍTULO 9

- 9.2. $3a^3b/10$.
 9.4. $2a^3b/15$.
 9.6. $ab^3/6$.
 9.8. $2ab^3/7$.

- 9.10. $2ab^3/51; b \sqrt{7/51}$.
- 9.12. $2a^3b/11; a \sqrt{7/11}$.
- 9.14. $a^3b/21; a \sqrt{1/7}$.
- 9.16. $43a^4/48; a \sqrt{43/72}$.
- 9.18. (a) $\frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$.
(b) $\frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4)$.
- 9.22. $403 \times 10^6 \text{ mm}^4; 92,8 \text{ mm}$.
- 9.24. $2,73 \times 10^6 \text{ mm}^4; 28,2 \text{ mm}$.
- 9.26. $\bar{I}_x = \bar{I}_y = 2,01 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.28. $46 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.30. $3,56 \times 10^9 \text{ mm}^4$.
- 9.32. $\bar{I}_x = 14 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 $\bar{I}_y = 21 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.34. (a) $0,159 \times 10^9 \text{ mm}^4$.
(b) $31,9 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.36. $\bar{I}_x = 1,36 \times 10^9 \text{ mm}^4$.
 $\bar{I}_y = 18,0 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.38. $3 \pi r/16$.
- 9.40. $B = 13,2 \text{ kN}, C = D = 17,1 \text{ kN}$.
- 9.42. (a) $\frac{1}{2} \gamma \pi r^2 h$ (b) $\frac{1}{4} \gamma \pi r^4$.
- 9.44. 30 mm .
- 9.48. $a^2 b^2 / 4(n+1)$.
- 9.50. $\frac{1}{8} a^4$.
- 9.52. $+12,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.54. $+10,3 \text{ cm}^4$.
- 9.56. $13,8 \text{ cm}^4; 21,2 \text{ cm}^4; +14,2 \text{ cm}^4$.
- 9.58. $+25,1^\circ; 42,1 \times 10^6 \text{ mm}^4; 10,5 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.60. $-22,3^\circ; 32,2 \text{ cm}^4; 2,77 \text{ cm}^4$.
- 9.62. (a) $I_u = \frac{a^4}{16}(\pi - \sqrt{3}); I_v = \frac{a^4}{16}(\pi + \sqrt{3}); P_{uv} = \frac{a^4}{16}$
(b) $I_u = \frac{a^4}{16}(\pi - 2); \frac{a^4}{16}(\pi + 2); P_{uv} = 0$.
- 9.64. $+26,4^\circ; 1,85 \times 10^6 \text{ mm}^4; 0,369 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
- 9.66. Os eixos indicados são eixos principais; $I_A = I_y = 403 \times 10^6 \text{ cm}^4$;
 $I_B = I_x = 273 \times 10^6 \text{ cm}^4$.
- 9.70. $P_{xy} = \sqrt{I_x I_y - I_{\min} I_{\max}} = 59,1 \text{ cm}^4$.
- 9.72. (a) $\frac{1}{4} m(r_1^2 + r_2^2)$ (b) $\frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$.
- 9.74. $I_{DD'} = 3 ma^2/8; I_{EE'} = 5 ma^2/12$.
- 9.76. (a) $7 ma^2/6$; (b) $\frac{1}{2} ma^2$.
- 9.78. $m(3a^2 + L^2)/12$.
- 9.80. $m(a^2 + 3h^2)/6; \sqrt{(a^2 + 3h^2)}/6$.
- 9.82. $m(a^2 + b^2)/5$.
- 9.84. (a) $m(b^2 + 4a^2 \sin^2 \theta)/12$; (b) $m(b^2 + 4a^2 \cos^2 \theta)/12$.
- 9.86. $2,61 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; 164 \text{ mm}$.
- 9.88. $27 ma^2/50; 0,735 a$.
- 9.90. $80,2 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.
- 9.92. $0,323 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; 124 \text{ mm}$.
- 9.94. (a) $7,11 \text{ g} \cdot \text{m}^2$; (b) $17,0 \text{ g} \cdot \text{m}^2$; (c) $15,3 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.
- 9.96. $I_x = 8,03 \text{ g} \cdot \text{m}^2; I_y = I_z = 32,6 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.
- 9.98. $45,8 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.
- 9.100. $184 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.
- 9.102. $2,06 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
- 9.104. $P_{xy} = +9,17 \text{ g} \cdot \text{m}^2; P_{yz} = P_{zx} = 0$.
- 9.106. $P_{xy} = -5,36 \text{ g} \cdot \text{m}^2; P_{yz} = 0; P_{zx} = +5,36 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.
- 9.108. $P_{xy} = -0,113 \text{ kg} \cdot \text{m}^2; P_{yz} = P_{zx} = 0$.
- 9.110. (a) $P_{zx} = mca/20$ (b) $P_{xy} = mab/20$ (c) $P_{yz} = mbc/20$.
- 9.112. $\frac{m}{6}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + c^2a^2)/(a^2 + c^2)$.
- 9.114. $7,83 \text{ g} \cdot \text{m}^2$.
- 9.116. $5 ma^2/12$.

- 9.118. $10 \text{ m}^2/27$.
 9.120. (a) $1/\sqrt{3}$; (b) $2/\sqrt{3}$.
 9.122. (a) $\text{m}^2/6$; (b) $\text{m}^2/6$; $(11/12)\text{m}^2$.
 9.126. (a) $0,227 \text{ m}^2$; (b) $0,727 \text{ m}^2$.
 9.128. $29,2 \times 10^6 \text{ mm}^4$.
 9.130. $\bar{I}_x = 1,27 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{I}_y = 3,93 \times 10^6 \text{ mm}^4$; $\bar{k}_x = 23 \text{ mm}$; $\bar{k}_y = 40 \text{ mm}$.
 9.132. $1,41 \text{ g} \cdot \text{m}^2$; 45 mm .
 9.134. $8 \text{ ml}^2/9$.
 9.136. $(5/12)\text{m}^2$; $(\sqrt{5}/12) \text{ a}$.

CAPÍTULO 10

- 10.2. 65 N .
 10.4. $150 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 10.6. $750 \text{ N} \uparrow$.
 10.8. $Q = \frac{3}{2} F \tan \theta$.
 10.10. $Q = 3 F \tan \theta$.
 10.12. $Q = (Fl/a) \cos \theta \sin^2 \theta$.
 10.14. $M = \frac{1}{2} Pl \cot \theta$.
 10.16. $M = 4 Fl \sin 2\theta$.
 10.18. $M = -4 Fl \cos 2\theta$.
 10.20. (a) $73,5 \text{ N}$; (b) 284 N .
 10.22. $178 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 10.24. $64,9^\circ$.
 10.26. $14,9^\circ$.
 10.28. $52,2^\circ$.
 10.30. 330 mm .
 10.32. $19,4^\circ$.
 10.34. $79,4^\circ$; 318° ; 386° .
 10.36. (a) 12 N ; (b) $52,8^\circ$.
 10.38. $33,9 \text{ kN}$.
 10.42. $180 \text{ N} \cdot \text{m}$; $57,0 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 10.44. $1,36 \text{ kN} \uparrow$; $550 \text{ N} \cdot \text{m}$.
 10.46. (a) $T = \frac{1}{2} P / (1 - \tan \theta)$. (b) $36,9^\circ$.
 10.48. $11,7 \text{ mm} \rightarrow$.
 10.56. $33,7^\circ$, estável; $-146,3^\circ$, instável.
 10.58. $79,4^\circ$ e 386° , estável 318° , instável.
 10.60. $72,7^\circ$.
 10.62. $12,5^\circ$ e 90° , estável; $30,8^\circ$, instável.
 10.64. (a) $\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} = (1 - Pl/ka^2) \cos \theta$.
 (b) $34,2^\circ$ e 146° , estável 90° , instável.
 10.66. $52,2^\circ$.
 10.68. 180° estável.
 10.70. $9,6^\circ$ instável; $40,3^\circ$ estável.
 10.72. $d > 309 \text{ mm}$.
 10.74. $m_1 = m_2 (c^2/ab)$.
 10.76. $Q < \frac{1}{2} kl$.
 10.78. $P > 2,15 \text{ kN}$.
 10.80. 60 N .
 10.82. 60° .
 10.84. $11,3^\circ$ estável, $78,7^\circ$ instável.
 10.86. $14,2^\circ$.
 10.88. (a) $Q \cos \theta = P \cos \frac{\theta}{2}$. (b) $65,1^\circ$.
 10.90. $\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{m_B}{m_A} = \sin \beta$.

Índice Analítico

A

Ação e reação, 4, 391-392
 Aceleração da gravidade, 6-7
 Adição
 de binários, 155-156
 de forças concorrentes, 180-182
 de forças concorrentes no espaço, 70
 de forças concorrentes no plano, 25, 42
 de vetores, 20-24
 Alavanca articulada, análise de,
 714, 717
 Ângulo
 de atrito cinético, 533
 de atrito estático, 532
 de avanço, 558
 de repouso, 534
 Apoio, pino e suporte, 257
 Apoios
 de junta ou articulação esférica, 257
 de vigas, 465-466
 fixos, 219-220, 257
 reações, 217, 258
 Aristóteles, 2
 Arquimedes, 2

Articulações, 218, 257
 Atrito, 529-603
 ângulo de, 532-534
 cinético, 530
 círculo de, 572
 coeficiente de, 530-533
 de correia, 584-587
 de Coulomb, 529
 de giro, 572-574
 em eixos, 571-572
 em rodas, 574-576
 estático, 530
 leis do, 530-533
 seco, 530
 Avanço
 ângulo de, 558
 de um parafuso, 558

B

Baricentro, 287-340
 Bernoulli, Jean, 708
 Binários, 150-158
 adição de, 155-156
 equivalente, 152-154

C

Cabos
 com cargas concentradas, 494-496
 com cargas distribuídas, 496-514
 parabólicos, 497-500
 reações no, 217, 258
 vão, 499, 513
 Calculadoras
 precisão, 13
 uso de, 28, 30, 40, 44, 53, 68
 Cargas distribuídas, 327, 465
 Catenária, 510-514
 Centímetro, 10
 Centro
 de pressão, 330, 607, 632
 de simetria, 293
 Centróides, 289-310, 340-344
 de formas comuns de superfícies, 295
 de formas comuns de superfícies, 296
 de formas usuais de sólidos, 344
 de superfícies e linhas
 compostas, 298
 de superfícies e retas, 289-310
 determinação por integração, 310,
 345, 347
 de volumes, 289-359
 Círculo de Mohr, 641-642
 Coeficiente
 de atrito cinético, 531
 de atrito estático, 531
 de resistência ao rolamento, 575
 Componentes
 da força, 24, 34, 71, 76
 de momento, 113-116
 de produto vetorial, 107-108
 Composição de forças (*ver* Adição de
 forças)
 Compressão, 102, 372, 458
 Cordas flexíveis (*ver* Cabos)
 Corpo rígido, 3, 100
 diagrama de corpo livre, 216
 equilíbrio no espaço, 255-279
 equilíbrio no plano, 215-286

Corpos compostos
 centróides de, 345
 momentos de inércia de, 662
 Correia de transmissão, 587
 Correia em V, 587
 Co-senos diretores, 64
 Coulomb, atrito de, 529
 Cunhas, 557-558

D

D'Alembert, Jean, 2
 Decímetro, 10
 Decomposição de uma força
 em componentes
 no espaço, 62-63, 70-71
 no plano, 24-26, 34-35
 dada em uma força aplicada em 0
 e um binário, 157-158
 Deslocamento, 708
 virtual, 712
 Determinante
 para o momento de uma força
 em relação a um eixo, 137
 em relação a um ponto, 109
 para o produto misto, 135
 para o produto vetorial, 107
 Diagrama
 de corpo livre, 12, 50-52, 216
 de um ponto material, 50-52
 de um corpo rígido, 216
 de força cortante, 469
 de momento fletor, 469
 Direção de uma força, 13
 Dobradiças, 257, 258

E

Eixos
 de simetria, 293
 de um tórsor, 178
 inclinados, momentos de inércia,
 636, 639, 682, 684

Elementos redundantes, 391
 Elementos submetidos à ação de várias forças, 404, 457
 Embreagens a disco, 572
 Energia potencial, 739
 Equações de equilíbrio
 para um corpo rígido, 216
 para um ponto material, 48, 80
 Equilíbrio
 de um ponto material, 48, 50-52, 80
 no espaço, 80
 no plano, 48-50
 equações (*ver* Equações de equilíbrio)
 estabilidade do, 743-744
 indiferente, 743-744
 Escalares, 15
 Espaço, 2
 Estática, definição de, 1
 Estruturas, 404-408
 análise de, 369-431
 bidimensionais, 111
 determinadas, 407
 forças internas nas, 369
 indeterminadas, 408

F

Flexa, 499, 514
 Flexão, 458
 Forças
 concorrentes, 24-25, 175
 conservativas, 741
 coplanares, 22, 175
 cortante, 458, 467-485
 de entrada, 430
 de saída, 430
 de vinculação, 217
 distribuídas, 369, 604
 em um elemento, 374
 equivalentes, 100-102, 219
 externas, 100
 interna, 102
 resultantes, 15, 70, 171
 (*ver também* Adição de forças;

Adição de vetores)
 sobre um ponto material
 no espaço, 62-71
 no plano, 15-25

G

Giração, raio de, 610, 654
 Grama, 9
 Graus de liberdade, 741
 Gravidade, aceleração da, 6
 Gravitação
 constante de, 5
 lei de Newton da, 4-6
 Guldinus, teorema de, 312-314

H

Hamilton, Sir William R., 2
 Hastes, 218

I

Inércia
 eixos principais
 para uma massa, 685
 para uma superfície, 636
 elipsóide de, 684-685
 momentos de (*ver* Momentos de inércia)
 produtos de
 de massas, 682-683
 de superfícies, 635
 teorema dos eixos paralelos para produtos de, 635, 684
 Instabilidade geométrica, 223

J

Joule, 710
 Junta ou articulação esférica, 257

L

Lagrange, J. L., 2
 Leis de Newton
 da gravitação, 5-6
 do movimento
 primeira, 3, 49
 segunda, 3
 terceira, 4, 369
 Lei do paralelogramo, 3, 16
 Litro, 11

M

Macacos, 558
 Mancal, 257, 258, 571-574
 axial, 572
 de deslizamento, 571-572
 de escora, 572-574
 terminal, 572
 Máquina, 430
 ideal, 717
 real, 717
 Massa, 2
 específica, 290, 657
 momento de inércia de, 654-684
 Mecânica
 definição de, 1
 Newtoniana, 2
 princípios da, 2-4
 Megagrama, 9
 Método dos nós, 374-380
 Método das seções, 389-390
 Metro, 7
 Milímetro, 9
 Módulo de uma força, 74-75
 Momento
 de um binário, 150
 de primeira ordem, 172, 347
 de segunda ordem, 605-607
 de uma força
 em relação a um eixo, 137-140
 em relação a um ponto, 109-111
 fletor, 458, 467-468

Momento estático
 de superfície, 292
 de volume, 347
 Momentos de inércia, 604-694
 de superfícies, 604-641
 teorema dos eixos paralelos para, 619
 de superfícies compostas, 622
 de corpos compostos, 662
 de formas geométricas comuns, 623, 663
 de corpo, 654-684
 teorema dos eixos paralelos para, 655-657
 de placas delgadas, 657-658
 determinação por integração, 607-608
 eixos inclinados, 637, 638, 682, 683
 polar, 611
 principais, 637, 683
 retangular, 608, 655
 Movimento, Leis de Newton do (*ver* Leis de Newton)

N

Newton, *sir* Isaac, 2, 3
 Nós, método dos, 374-380

P

Pappus, teorema de, 352-314
 Parafusos, 558-559
 de rosca quadrada, 558-559
 Pascal (unidade), 328-329
 Passo
 de uma rosca, 559
 de um tursor, 178
 Peso específico, 290, 342
 Pinos, 218, 372
 Plano de simetria, 343
 Pólo, 608
 Pontes pênséis, 495
 Ponto de aplicação de uma força, 12, 99

Ponto material, 3, 15
 diagrama de corpo livre de, 50-52
 equilíbrio de
 no espaço, 80
 no plano, 48-50
 Precisão numérica, 13-14
 Principais, eixos de simetria
 de massas, 684-685
 de superfícies, 639
 Princípio
 de transmissibilidade, 3, 100
 dos trabalhos virtuais, 712-714
 Princípios de Mecânica, 2-6
 Problemas, métodos de resolução de,
 12-13
 Produto
 de um escalar por um vetor, 23
 escalar, 130-134
 misto, 135-137
 vetorial, 103-106
 Produto de inércia
 de massa, 683
 de superfícies, 635
 Propriedade associativa para soma de
 vetores, 23
 Propriedade comutativa
 para produtos escalares, 130
 para soma de vetores, 20
 Propriedade distributiva
 para produto escalar, 130
 para produtos vetoriais, 105

R

Raios de giração, 610, 654
 Reações
 determinadas, 222
 em suportes (vínculos) e conexões,
 217, 258
 esticamente determinadas, 222
 esticamente indeterminadas,
 222, 259

Redução de um sistema de forças,
 171-179
 Regra
 da mão direita, 110
 do polígono, 22
 do triângulo, 20
 Relatividade, teoria da, 2
 Rendimento mecânico, 417, 418
 Repouso, ângulo de, 534
 Resistência ao rolamento, 574-576
 coeficiente de, 576
 Reta de ação, 15, 99
 Revolução
 corpos de, 312, 659
 superfícies de, 312
 Rodas, 257, 258, 574
 Roletes, 217, 256, 257

S

Sentido de uma força, 15
 Simetria
 centro de, 293
 eixos de, 293
 plano de, 348
 Sistema
 força-binário, 99, 157
 Internacional de Unidades (SI), 6-11
 Sistemas
 de forças, 171-204
 de forças equivalentes, 173-174
 de vetores equipolentes, 174
 Subtração de vetores, 21
 Superfícies
 ásperas, 218, 258
 de revolução, 312
 lisas, 257, 258
 submersas, forças sobre, 329, 366
 Superfícies compostas
 centróides de, 298
 momentos de inércia de, 622
 Suportes (vínculos), 257, 716

T

Tempo, 2
 Teorema de Varignon, 112
 Teorema dos eixos paralelos
 para momentos de inércia
 de massa, 655-657
 de superfícies, 620
 para produtos de inércia
 de massas, 683
 de superfície, 635
 Tirante, 402
 Torsor, 178
 Trabalho
 produzido e recebido, 717, 718
 de forças sobre um corpo rígido, 711
 de um binário, 711, 736
 de uma força, 708, 735
 de uma força exercida por uma mola,
 737
 de um peso, 736
 virtual, 712
 Transmissibilidade, princípio de, 3, 100
 Treliças, 370-392
 compostas, 391-392
 determinadas, 391
 espaciais, 380-381
 hiperestáticas, 391
 indeterminadas, 392
 rígidas, 372, 392

simples, 372, 374
 típicas, 371, 372

U

Unidade, 6-11
 (ver também Sistema Internacional de
 Unidades)

V

Vetores, 17
 binários, 156-157
 coplanares, 22
 deslizantes, 18, 101
 fixos, 17
 livres, 18
 unitários, 34, 72, 75
 Vigas
 apoios de, 465-466
 carregamento de, 465
 combinadas, 466
 tipos de, 466
 Vinculação, 716
 completa, 222
 ineficaz, 224, 258
 parcial, 222, 258
 Vínculos, 257, 716

Edmar Kson Ferreira