Equação de onda e métodos espectrais

- Resolução numérica de equações de onda do tipo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x}}$$

- Métodos espectrais (análise de Fourier)

Solução numérica da Eq. de Onda

Solução aproximada de: $$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 x}}$$

Aproximação da 2a derivada.

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \approx \frac{y(x,t+\Delta t) - 2y(x,t) + y(x,t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{y(x+\Delta x,t) - 2y(x,t) + y(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$

Para determinar a evolução temporal, queremos uma eq do tipo:

$$y(x,t+\Delta t) = F[y(x,t' \leq t)]$$

Solução numérica da Eq. de Onda

Aproximação da 2a derivada.

$$y(x,t+\Delta t)-2y(x,t)+y(x,t-\Delta t) = \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}[y(x+\Delta x,t)-2y(x,t)+y(x-\Delta x,t)]$$

Definimos o parâmetro adimensional: $r \equiv \dfrac{c\Delta t}{\Delta x}$

E temos uma expressão para y(x,t+Δt):

$$\boxed{y(x,t+\Delta t) = 2(1-r^2)y(x,t) + r^2[y(x+\Delta x,t)+y(x-\Delta x,t)] - y(x,t-\Delta t)}$$

que nos permite determinar a evolução temporal dados: *r* , y(x,t), y(x±Δx,t) e y(x,t-Δt).

Solução numérica da Eq. de Onda

Expressão discretizada: $$y(x,t) \rightarrow y(x_i,t_n) \equiv y(i,n)$$

$$x_i = (i-1)\,\Delta x \qquad t_n = (n-1)\,\Delta t \qquad r \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

A expressão para y(i,n+1) será

$$\boxed{y(i,n+1) = 2(1-r^2)y(i,n) + r^2[y(i+1,n) + y(i-1,n)] - y(i,n-1)}$$

que nos permite determinar a evolução temporal dados: *r* , y(i,n), y(i±1,t) e y(i,n-1).

Condições iniciais e de contorno

Condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x, t \leq 0) = f(x) & \text{(escolha)} \\ \left.\dfrac{\partial}{\partial t} y(x,t)\right|_{t \leq 0} = v(x) & \text{(tomaremos=0)} \end{cases}$$

Condições de contorno:

$$\begin{cases} y(x_p, t) = y_p = \text{const} \quad \forall t \\ \text{e/ou} \qquad\qquad \text{(p-> pontos específicos)} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} y(x_p, t) = y'_p = \text{const} \quad \forall t \end{cases}$$

Exemplo de condição de contorno: $y(x_p=0,t)=0$ para qualquer t.

Aula 10 – Tarefa (Fazer upload!)

Uma onda (ideal) descrita pela função y(x,t) se propaga com velocidade *c*=50m/s em uma corda com extremos em x_0=0 e x_1=1m.

- *Considere que inicialmente a y(x,0) tem o perfil de um pulso gaussiano centrado na posição x_c=0,3m e k=1000 m^{-1}:*

$$y(x, t \leq 0) = e^{-k(x-x_c)^2}$$

- *Os extremos da corda estão presos. Ou seja, as condições de contorno são:* $$y(x_0, t) = y(x_1, t) = 0 \quad \forall t$$
- *Faça um script que calule y(x,t) de t=0 a t=0,01s com passo Δt=0,0001 e r=c(Δt/Δx) =1*
- *Determine o Δx a ser usado a partir dos dados acima.*

Aula 10 – Tarefa - Dicas

- *Debug: seguem os valores de y(i=60,61,62,63,n=1,2,3,4,5).*

```
n=1: tempo=0.0000  y(60,n)=0.9753 y(61,n)=1.0000 y(62,n)=0.9753 y(63,n)=0.9048
n=2: tempo=0.0001  y(60,n)=0.9295 y(61,n)=0.9506 y(62,n)=0.9295 y(63,n)=0.8690
n=3: tempo=0.0002  y(60,n)=0.8443 y(61,n)=0.8591 y(62,n)=0.8443 y(63,n)=0.8013
n=4: tempo=0.0003  y(60,n)=0.7309 y(61,n)=0.7380 y(62,n)=0.7309 y(63,n)=0.7092
n=5: tempo=0.0004  y(60,n)=0.6029 y(61,n)=0.6027 y(62,n)=0.6029 y(63,n)=0.6022
```

- *Para mostrar o resultado, você pode fazer um "filme".*
- *A idéia é fazer um plot de y(i,n) vs x_i para cada valor de n ("time frame") e "juntar" tudo, salvando em um arquivo .avi .*
- *Veja um exemplo de um "filme" de uma queda livre no arquivo*

  Aula10_ExMovie.m

- *É possível salvar em outros formatos (pequise na documentação).*