

# Probabilidade I – SME0800

## Parte 10: Tópicos de Probabilidade II

**Juliana Cobre**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC

Universidade de São Paulo - USP



# Distribuição F-Snedecor

## Características

- ▶ Suporte em  $[0, \infty)$ ;
- ▶ Requer informações de dois graus de liberdade:  $gl_1$  g.l. do numerador e  $gl_2$  g.l. do denominador;
- ▶ Assimétrica;
- ▶ Também é tabelada.

# Distribuição F-Snedecor

## Representação gráfica

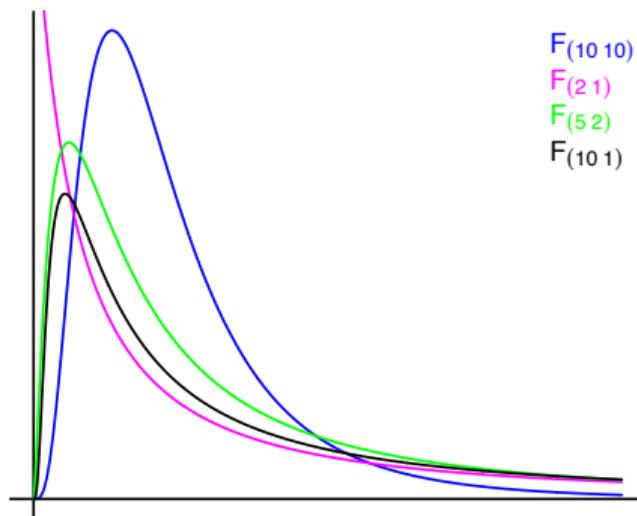


Figure: Fdp para diferentes g.l. da distribuição F-Snedecor.

# Distribuição F-Snedecor

No R

$$\text{df}(q, g11, g12) = d$$

$$\text{pf}(q, g11, g12) = p$$

$$\text{qf}(p, g11, g12) = q$$

$\text{rf}(n, g11, g12)$ : vetor com  $n$  valores gerados de uma  $F(g11, g12)$ .

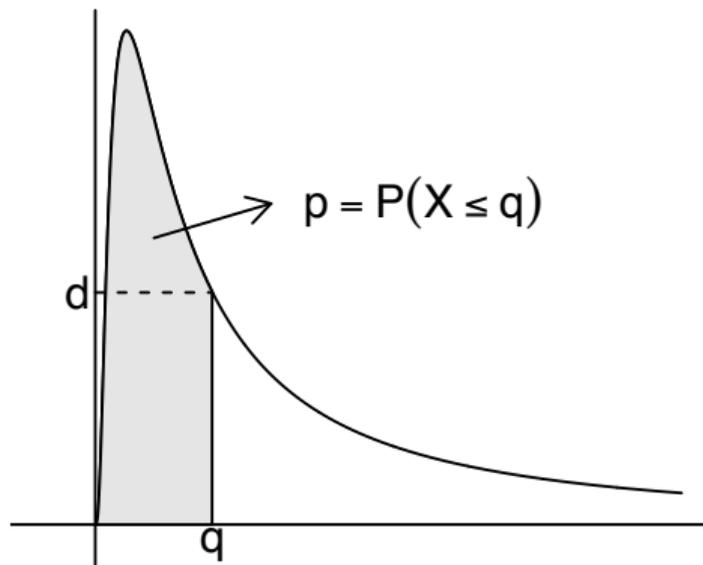


Figure: Quantil e probabilidade acumulada.

# Distribuição F-Snedecor

$v_2$	$v_1$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161,45	199,50	215,70	224,18	230,16	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	242,98
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40
3	10,13	9,55	9,27	9,11	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20
26	4,23	3,37	2,97	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87
240	3,88	3,03	2,64	2,41	2,25	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83
480	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81
960	3,85	3,01	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80
$\infty$	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79

Figure: Tabela da distribuição F-Snedecor para 95% de probabilidade acumulada.

# Distribuição Qui-quadrado

## Características

- ▶ Suporte em  $[0, \infty)$ ;
- ▶ Requer informações de um grau de liberdade:  $k$ ;
- ▶ Assimétrica;
- ▶ Quanto maior o número de g.l., mais próximo da simetria sua fdp fica.
- ▶ Também é tabelada.

# Distribuição Qui-quadrado

## Representação gráfica

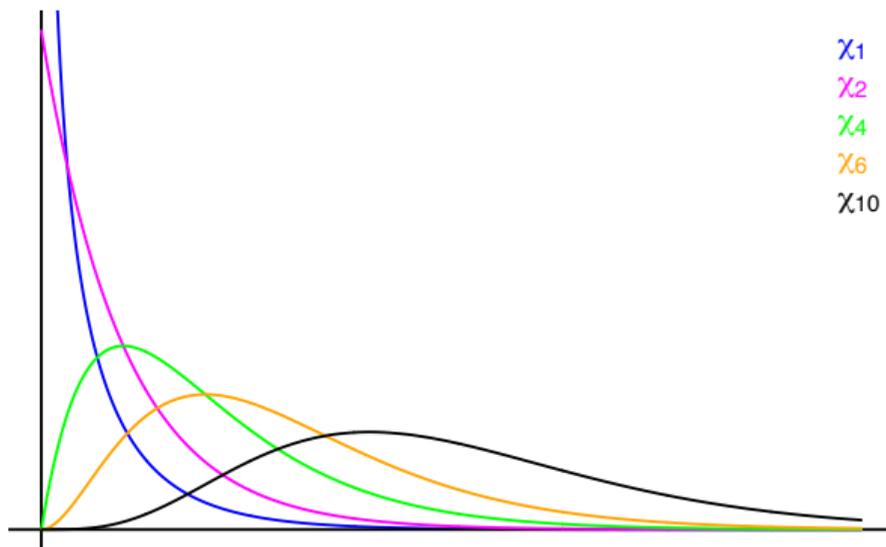


Figure: Fdp para diferentes g.l. da distribuição Qui-quadrado.

# Distribuição Qui-quadrado

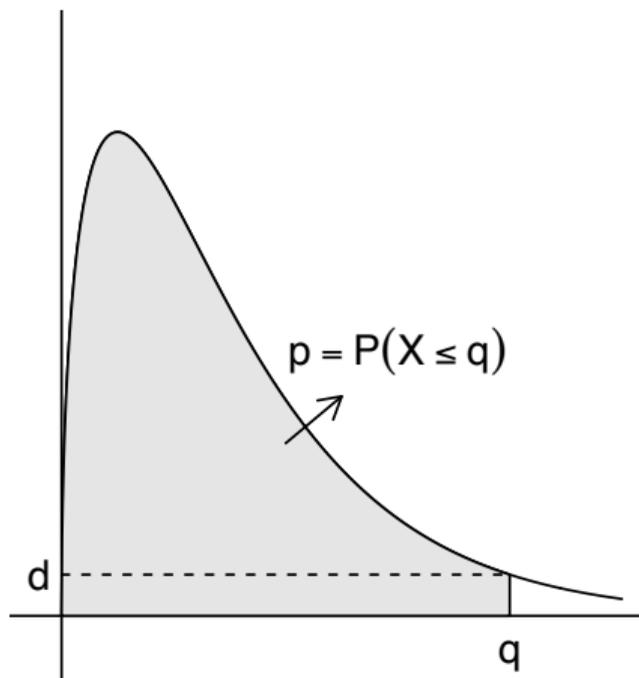
## No R

$$\text{dchisq}(q,k) = d$$

$$\text{pchisq}(q,k) = p$$

$$\text{qchisq}(p,k) = q$$

$\text{rchisq}(n,k)$ : vetor com  $n$  valores gerados de uma  $\chi_k$ .



# Distribuição Qui-quadrado

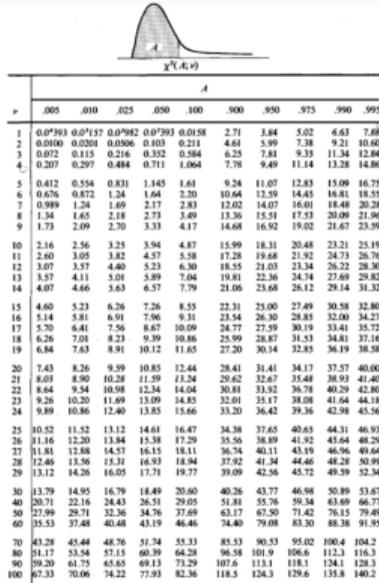


Figure: Tabela da distribuição Qui-quadrado.

# Distribuição t-Student

## Características

- ▶ Suporte em  $\mathbb{R}$ ;
- ▶ Requer informações de um grau de liberdade:  $\nu$ ;
- ▶ Simétrica;
- ▶ Quanto maior o número de g.l., mais próxima da distribuição normal.
- ▶ Também é tabelada.

# Distribuição t-Student

## Representação gráfica

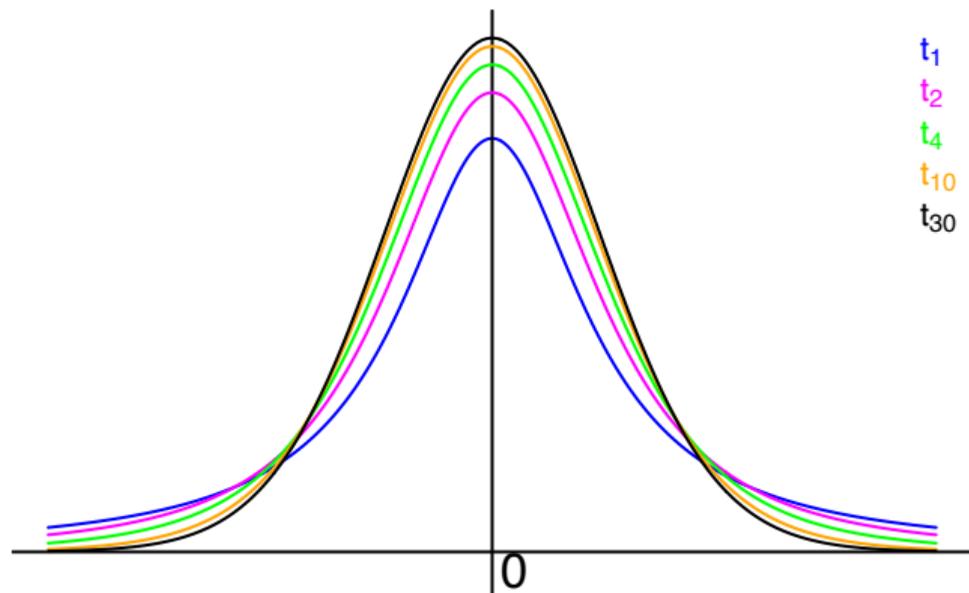


Figure: Fdp para diferentes g.l. da distribuição t-Student.

# Distribuição t-Student

## No R

$$\text{dt}(q, \nu) = d$$

$$\text{pt}(q, \nu) = p$$

$$\text{qt}(p, \nu) = q$$

$\text{rt}(n, \nu)$ : vetor com  $n$  valores gerados de uma  $t_\nu$ .

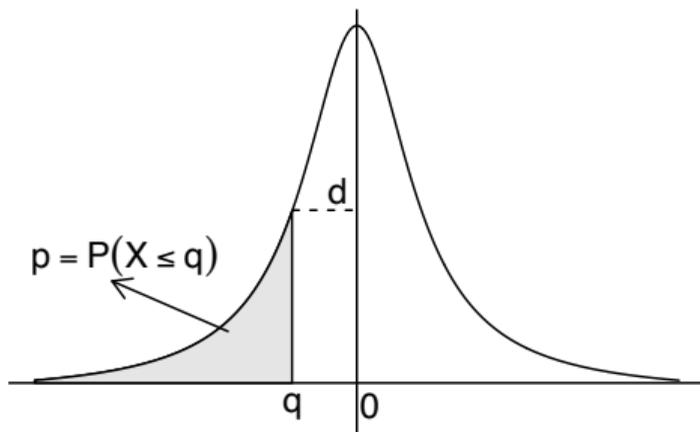


Figure: Quantil e probabilidade acumulada.

# Distribuição t-Student

## No R

$$\text{dt}(q, \nu) = d$$

$$\text{pt}(q, \nu) = p$$

$$\text{qt}(p, \nu) = q$$

$\text{rt}(n, \nu)$ : vetor com  $n$  valores gerados de uma  $t_\nu$ .

$$q = -b$$

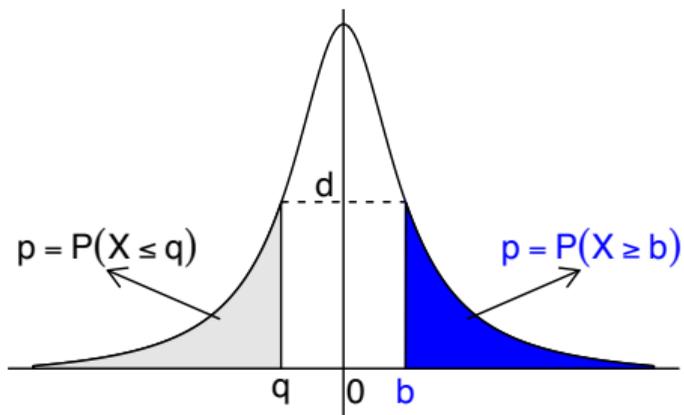


Figure: Quantil e probabilidade acumulada.

# Distribuição t-Student



v \ p	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	15,896	31,821	63,657
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	4,849	6,965	9,925
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	3,482	4,541	5,841
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	2,999	3,747	4,604
5	0,267	0,569	0,920	1,476	2,015	2,571	2,757	3,365	4,032
6	0,265	0,563	0,906	1,440	1,943	2,447	2,612	3,143	3,707
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,517	2,998	3,499
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,449	2,896	3,355
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,398	2,821	3,250
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,359	2,764	3,169
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,328	2,718	3,106
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,303	2,681	3,055
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,282	2,650	3,012
14	0,258	0,537	0,868	1,346	1,761	2,145	2,264	2,624	2,977
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,249	2,602	2,947
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,235	2,583	2,921
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,224	2,567	2,898
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,214	2,552	2,878
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,205	2,539	2,861
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,197	2,528	2,845
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,189	2,518	2,831
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,183	2,508	2,819
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,177	2,500	2,807
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,172	2,492	2,797
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,167	2,485	2,787
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,162	2,479	2,779
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,158	2,473	2,771
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,154	2,467	2,763
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,150	2,462	2,756
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,147	2,457	2,750
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,123	2,423	2,704
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,099	2,390	2,660
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,076	2,356	2,617
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576

Figure: Tabela da distribuição t-Student.

# Distribuição t-Student

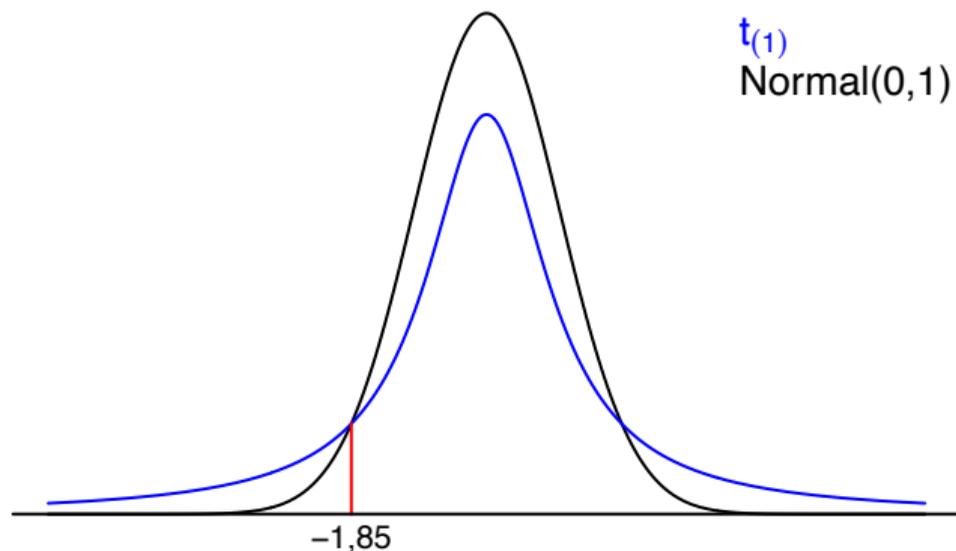


Figure: Distribuição t-Student e distribuição normal padrão.

## Convergência em distribuição

**Definição:** Sejam  $(F_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de funções de distribuição e  $F$  uma função de distribuição. Dizemos que  $(F_n)_{n \geq 1}$  converge em distribuição para  $F$  se, para todo número real  $x$ , em que  $F$  é contínua, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

**Notação:**  $F_n \xrightarrow{D} F$ .

## Convergência em distribuição

**Exemplo:** Considere  $F_n(x)$  como sendo a fda de uma distribuição t-Student com  $n$  graus de liberdade e  $F(x)$  como sendo a fda da distribuição normal padrão. Podemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Portanto  $t_n \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$ .

# Convergência em distribuição

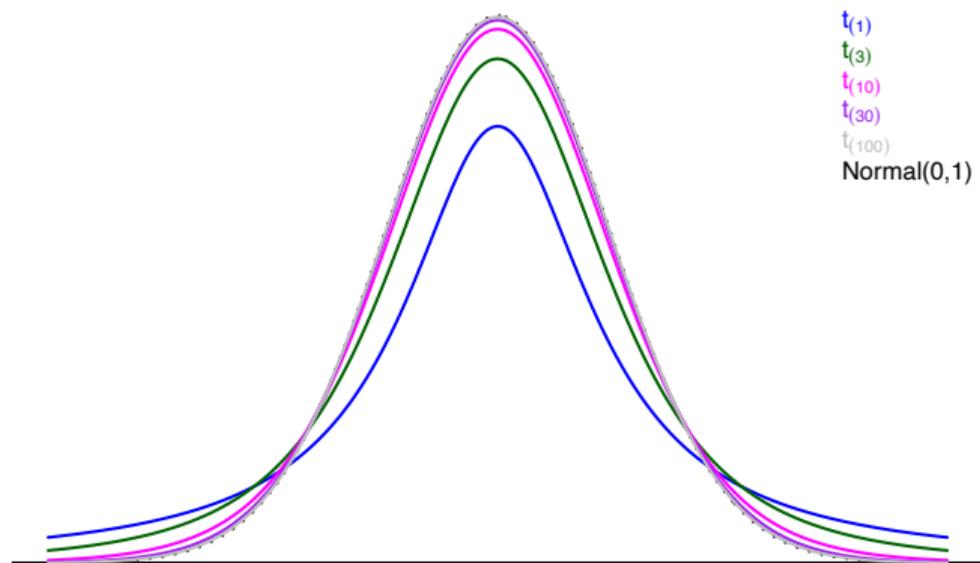


Figure: Distribuições t-Student e distribuição normal.

# Convergência em probabilidade

**Definição:** Sejam  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de v.a. Dizemos que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge em probabilidade para  $c$  se, para todo  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - c| < \varepsilon) = 1.$$

**Notação:**  $X_n \xrightarrow{P} c$ .

# Convergência em probabilidade

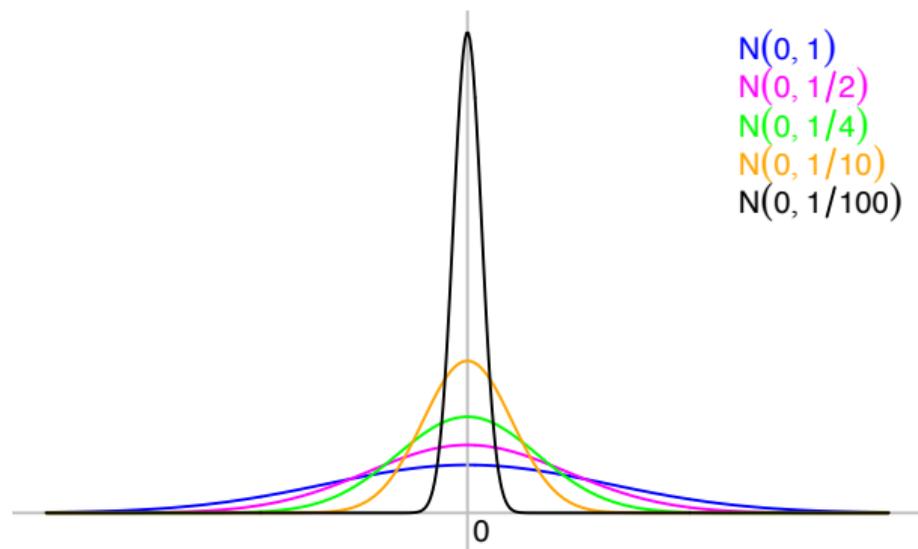


Figure: Fdp da distribuição normal com diferentes variâncias.

## Convergência em probabilidade

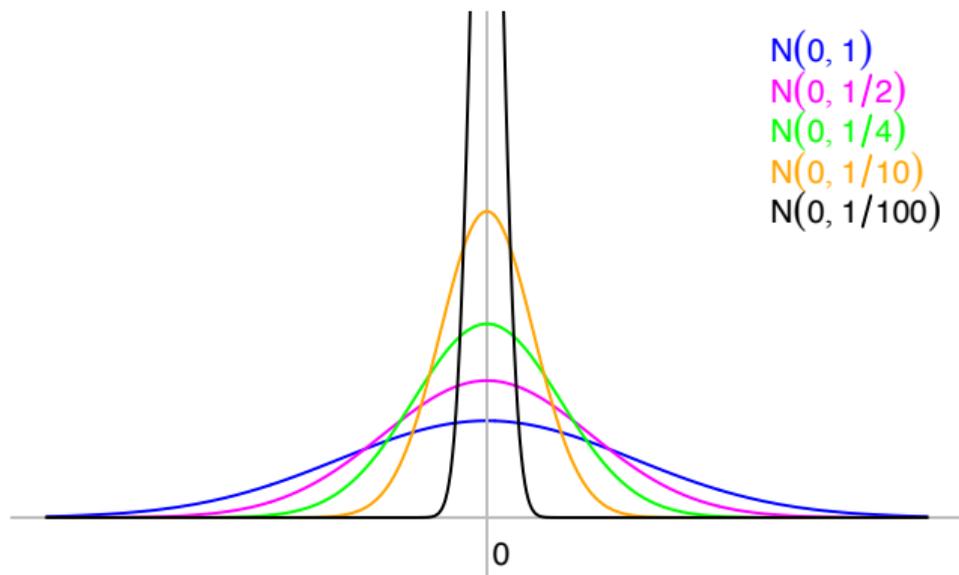


Figure: Fdp da distribuição normal com diferentes variâncias (zoom).

# Convergência em probabilidade

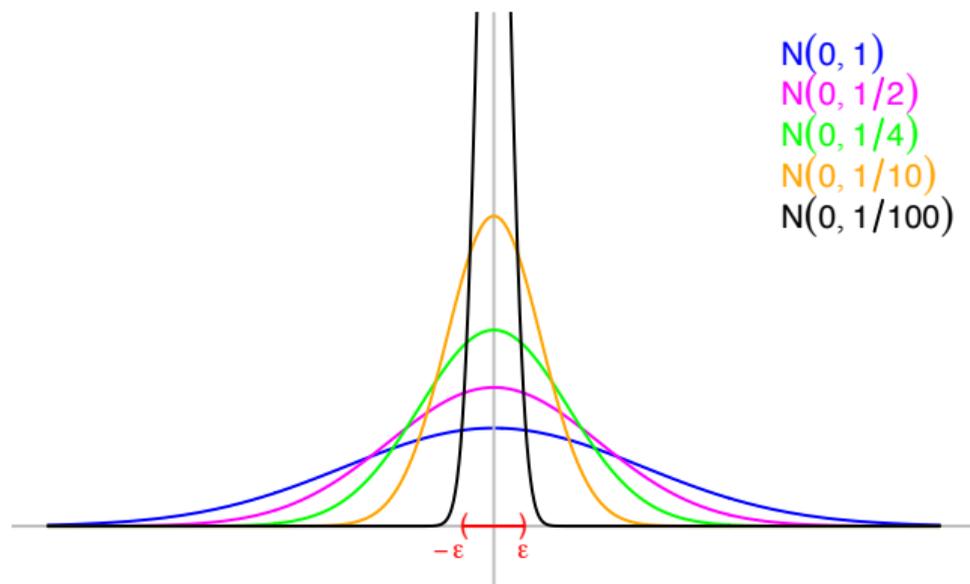


Figure: Fdp da distribuição normal com diferentes variâncias (zoom).

## Normalidade assintótica

**Definição:** Uma sequência de v.a.  $(X_n)_{n \geq 1}$  tem normalidade assintótica se sua distribuição converge para a distribuição normal, com certa média e com certa variância.

# Teorema Central do Limite

## Notas

- ▶ Existem várias versões/extensões do TCL.

# Teorema Central do Limite

## Notas

- ▶ Existem várias versões/extensões do TCL.
- ▶ É um resultado tão importante que é até chamado de “central”.

# Teorema Central do Limite

## Notas

- ▶ Existem várias versões/extensões do TCL.
- ▶ É um resultado tão importante que é até chamado de “central”.

**TCL:** Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de v.a. i.i.d. tais que  $E(X_i) = \mu < \infty$  e  $0 < \text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty, i = 1, 2, \dots, n$ . Então

$$\frac{\bar{X} - \mu}{(\sigma^2/n)^{1/2}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{ou} \quad \bar{X} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$