Probabilidade I – SME0800

Parte 8: Distribuições de Probabilidade Contínuas

Juliana Cobre

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC

Universidade de São Paulo - USP

Distribuição Uniforme Contínua

Definição: Dizemos que uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, se sua fdp é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Distribuição Uniforme Contínua

Definição: Dizemos que uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, se sua fdp é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Notação: $X \sim U[a, b]$.

Distribuição Uniforme Contínua

Definição: Dizemos que uma v.a. contínua X tem distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, se sua fdp é dada por

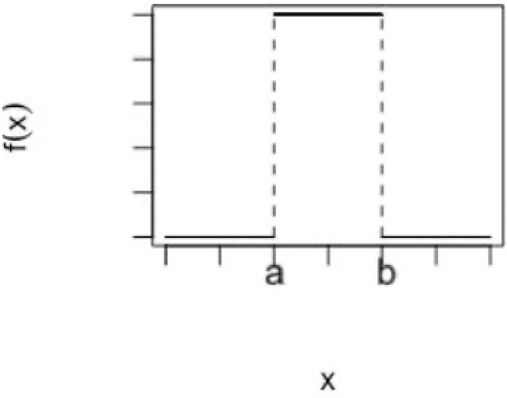
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

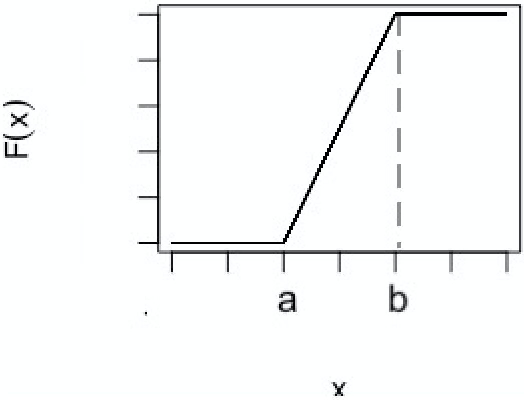
Notação: $X \sim U[a, b]$.

Nota: O intervalo pode ser aberto ou fechado, até mesmo aberto e fechado (de um lado e de outro).

Distribuição Uniforme Contínua

Representação gráfica:





Distribuição Uniforme Contínua

Exemplo: Assume-se que a duração X de uma conferência tem distribuição uniforme no intervalo [0,4].

Distribuição Uniforme Contínua

Exemplo: Assume-se que a duração X de uma conferência tem distribuição uniforme no intervalo [0,4].

(a) Qual é a probabilidade de que qualquer conferência dure pelo menos três horas?

Exemplo: Assume-se que a duração X de uma conferência tem distribuição uniforme no intervalo [0,4].

(a) Qual é a probabilidade de que qualquer conferência dure pelo menos três horas?

(b) Qual é o valor esperado da duração de uma conferência?

Exemplo: Assume-se que a duração X de uma conferência tem distribuição uniforme no intervalo [0,4].

(a) Qual é a probabilidade de que qualquer conferência dure pelo menos três horas?

(b) Qual é o valor esperado da duração de uma conferência?

Solução:

Distribuição Uniforme Contínua

Resultado: Se $X \sim U[a, b]$ então

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribuição Uniforme Contínua

Resultado: Se $X \sim U[a, b]$ então

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Demonstração:

Distribuição Uniforme Contínua

Demonstração (continuação):

Distribuição Normal

Definição: A v.a. contínua X tem distribuição normal (ou gaussiana) com parâmetros de locação $\mu, -\infty < \mu < \infty$, e de forma $\sigma, \sigma > 0$, se sua fdp for dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

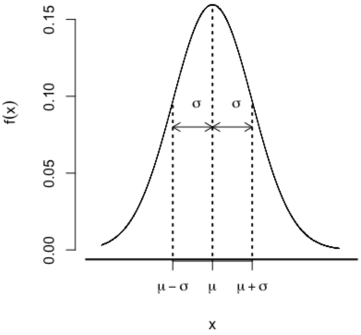
Distribuição Normal

Definição: A v.a. contínua X tem distribuição normal (ou gaussiana) com parâmetros de locação $\mu, -\infty < \mu < \infty$, e de forma $\sigma, \sigma > 0$, se sua fdp for dada por

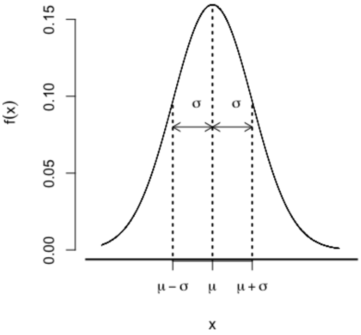
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Notação: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Representação gráfica da fdp



Representação gráfica da fdp

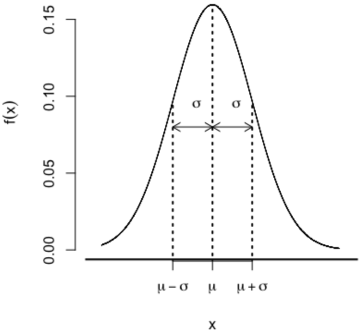


Notas

- O gráfico da fdp de uma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ é simétrico com relação a μ.

Distribuição Normal

Representação gráfica da fdp

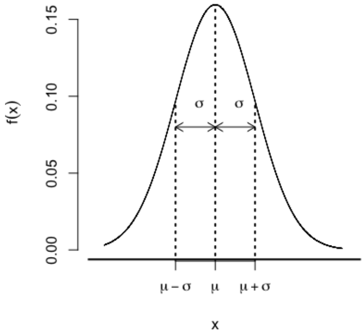


Notas

- O gráfico da fdp de uma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ é simétrico com relação a μ.
- Troca de concavidade em $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

Distribuição Normal

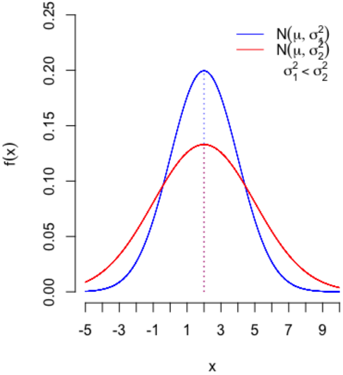
Representação gráfica da fdp



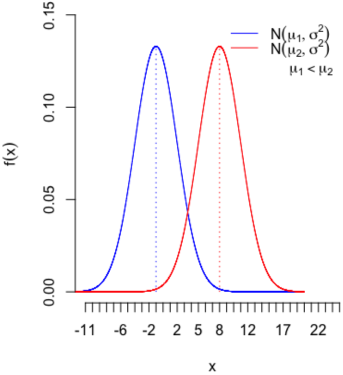
Notas

- O gráfico da fdp de uma $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ é simétrico com relação a μ.
- Troca de concavidade em $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.
- É mais "achatado" quanto maior for o valor de σ.

Médias iguais e variâncias diferentes



Médias diferentes e mesma variância



Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad Var(X) = \sigma^2.$$

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad Var(X) = \sigma^2.$$

<u>Demonstração:</u>

Distribuição Normal

Demonstração (continuação):

Distribuição Normal

Demonstração (continuação):

Distribuição Normal

Notas:

- Os dois parâmetros μ e σ caracterizam a distribuição normal, ou seja, a esperança e o desvio padrão caracterizam a distribuição normal.

Distribuição Normal

Notas:

- Os dois parâmetros μ e σ caracterizam a distribuição normal, ou seja, a esperança e o desvio padrão caracterizam a distribuição normal.

- Se $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, dizemos que X tem distribuição normal padrão. Neste caso denotamos sua fdp por
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$, então

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$, então

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$, então

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

Demonstração:

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX + b$, então

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

<u>Demonstração:</u> Pelas propriedades de esperança e variância temos

Demonstração (continuação):

Distribuição Normal

Demonstração (continuação): Para provar que Y segue uma distribuição normal devemos fazer a transformação

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Demonstração:

Cálculo da probabilidade de uma v.a. com distribuição normal: Suponha que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e queremos calcular

$$P(a \leq X \leq b) =$$

Distribuição Normal

Cálculo da probabilidade de uma v.a. com distribuição normal: Suponha que $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e queremos calcular

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Distribuição Normal

Cálculo da probabilidade de uma v.a. com distribuição normal: Suponha que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e queremos calcular

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Devemos usar métodos de integração numérica, pois não existe primitiva para a função $e^{-x^2/2}$.

Cálculo da probabilidade de uma v.a. com distribuição normal: Suponha que $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e queremos calcular

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Devemos usar métodos de integração numérica, pois não existe primitiva para a função $e^{-x^2/2}$. No caso de $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (normal padrão), os valores da fda estão tabelados.

Notação:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Distribuição Normal

Notação:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

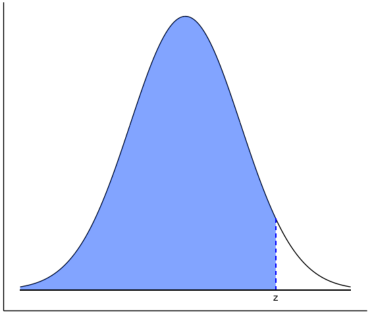
Nota: $\Phi(x)$ representa a área

Distribuição Normal

Notação:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Nota: $\Phi(x)$ representa a área



Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, então

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, então

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

<u>Demonstração:</u>

Exemplo: Considere $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e calcule $P(X < -1,64)$ e $P(X < 1,64)$.

Distribuição Normal: Uso da tabela

Padronização de uma v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$**:** Apenas a normal padrão está tabelada. No entanto podemos transformar a v.a. X com distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ em uma v.a. com distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ e o cálculo da probabilidade é o mesmo.

Distribuição Normal

Exemplo: Considere $X \sim \mathcal{N}(4, 25)$ e calcule $P(X < -0,2)$ e $P(-3,4 < X < 10,4)$.

Distribuição Normal

Exemplo: Considere $X \sim \mathcal{N}(4, 25)$ e calcule $P(X < -0,2)$ e $P(-3,4 < X < 10,4)$.

Solução:

Distribuição Normal

Resultado: $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Resultado: $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Demonstração:

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1.$$

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1.$$

Demonstração: Exercício.

Distribuição Normal

Resultado: Se $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ então

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1.$$

Demonstração: Exercício.

Interpretação: A probabilidade de que uma v.a. com distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ tome valores até k desvios padrões do valor esperado depende somente de k, e é dado pela proposição anterior.

Distribuição Normal

Exemplo: Seja $X \sim \mathcal{N}(2, 9)$. Obtenha c tal que $P(X > c) = 0,90$.

Exemplo: Seja $X \sim \mathcal{N}(2, 9)$. Obtenha c tal que $P(X > c) = 0,90$.

Solução:

Distribuição Normal

Exemplo: Certo tipo de bateria dura, em média, três anos, com desvio padrão 0,5 ano. Assumindo que a vida dos armazenadores é distribuída normalmente, encontre a probabilidade de que certo armazenador dure pelo menos 2,3 anos.

Exemplo: Certo tipo de bateria dura, em média, três anos, com desvio padrão 0,5 ano. Assumindo que a vida dos armazenadores é distribuída normalmente, encontre a probabilidade de que certo armazenador dure pelo menos 2,3 anos.

Solução:

Exemplo: Certo tipo de bateria dura, em média, três anos, com desvio padrão 0,5 ano. Assumindo que a vida dos armazenadores é distribuída normalmente, encontre a probabilidade de que certo armazenador dure pelo menos 2,3 anos.

Solução:

X: tempo de vida da bateria (em anos).

Perguntas: É plausível supor que um tempo tenha distribuição $\mathcal{N}(3; 0,5^2)$? Tempo não é sempre positivo?

Resposta: Para responder a isso, vamos calcular $P(X < 0)$, com $X \sim \mathcal{N}(3; 0,5^2)$.

Distribuição Exponencial

Definição: Uma v.a. contínua, X, positiva tem <u>distribuição exponencial</u> com parâmetro $\alpha > 0$, se sua fdp é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

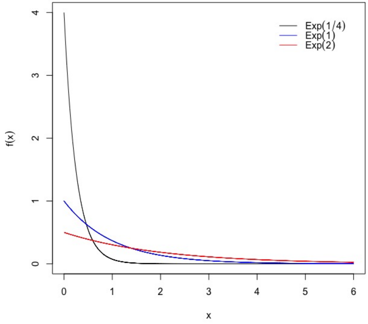
Distribuição Exponencial

Definição: Uma v.a. contínua, X, positiva tem <u>distribuição exponencial</u> com parâmetro $\alpha > 0$, se sua fdp é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Notação: $X \sim \text{Exp}(\alpha)$.

Representação gráfica



Distribuição Exponencial

Resultado: Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ então

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Distribuição Exponencial

Resultado: Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ então

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

<u>Demonstração:</u>

Distribuição Exponencial

Resultado: Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ então

$$E(X) = \alpha \quad \text{e} \quad Var(X) = \alpha^2.$$

Distribuição Exponencial

Resultado: Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ então

$$E(X) = \alpha \quad \text{e} \quad Var(X) = \alpha^2.$$

<u>Demonstração:</u>

Demonstração:

Distribuição Exponencial

Exemplo: Suponha que a duração de um fusível é X tal que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$.

Distribuição Exponencial

Exemplo: Suponha que a duração de um fusível é X tal que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$. Se o fusível é fabricado por um processo I, ele apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas.

Distribuição Exponencial

Exemplo: Suponha que a duração de um fusível é X tal que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$. Se o fusível é fabricado por um processo I, ele apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas. Se for fabricado pelo processo II, sua duração de vida esperada é de 150 dólares.

Distribuição Exponencial

Exemplo: Suponha que a duração de um fusível é X tal que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$. Se o fusível é fabricado por um processo I, ele apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas. Se for fabricado pelo processo II, sua duração de vida esperada é de 150 dólares. O processo II é duas vezes mais caro que o I, que custa c dólares.

Distribuição Exponencial

Exemplo: Suponha que a duração de um fusível é X tal que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$. Se o fusível é fabricado por um processo I, ele apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas. Se for fabricado pelo processo II, sua duração de vida esperada é de 150 dólares. O processo II é duas vezes mais caro que o I, que custa c dólares. Se um fusível dura menos de 200 horas, uma multa de k dólares é aplicada ao fabricante.

Distribuição Exponencial

Exemplo: Suponha que a duração de um fusível é X tal que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$. Se o fusível é fabricado por um processo I, ele apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas. Se for fabricado pelo processo II, sua duração de vida esperada é de 150 dólares. O processo II é duas vezes mais caro que o I, que custa c dólares. Se um fusível dura menos de 200 horas, uma multa de k dólares é aplicada ao fabricante. Qual processo deve ser empregado?

Distribuição Exponencial

Exemplo: Suponha que a duração de um fusível é X tal que $X \sim \text{Exp}(\alpha)$. Se o fusível é fabricado por um processo I, ele apresenta uma duração de vida esperada de 100 horas. Se for fabricado pelo processo II, sua duração de vida esperada é de 150 dólares. O processo II é duas vezes mais caro que o I, que custa c dólares. Se um fusível dura menos de 200 horas, uma multa de k dólares é aplicada ao fabricante. Qual processo deve ser empregado?

Solução:

Solução (continuação):

Solução (continuação):

Nota 1: É possível usar outra parametrização da distribuição exponencial como a seguir

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

Distribuição Exponencial

Nota 1: É possível usar outra parametrização da distribuição exponencial como a seguir

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

sendo também denotada por $X \sim Exp(\lambda)$.

Nota 1: É possível usar outra parametrização da distribuição exponencial como a seguir

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

sendo também denotada por $X \sim Exp(\lambda)$. No entanto, neste caso

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

Distribuição Exponencial

Nota 1: É possível usar outra parametrização da distribuição exponencial como a seguir

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

sendo também denotada por $X \sim Exp(\lambda)$. No entanto, neste caso

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

ou seja, o parâmetro da distribuição não representa o valor esperado da v.a.

Distribuição Exponencial

Nota 1: É possível usar outra parametrização da distribuição exponencial como a seguir

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

sendo também denotada por $X \sim Exp(\lambda)$. No entanto, neste caso

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

ou seja, o parâmetro da distribuição não representa o valor esperado da v.a.

Nota 2: Temos que $\lambda = \frac{1}{\alpha}$, em comparação à parametrização anterior.

Distribuição Exponencial

Resultado: Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ então

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

Distribuição Exponencial

Resultado: Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ então

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

Interpretação: "Falta de memória" da distribuição exponencial.

Distribuição Exponencial

Resultado: Se $X \sim \text{Exp}(\alpha)$ então

$$P(X > s + t | X > s) = P(X > t).$$

Interpretação: "Falta de memória" da distribuição exponencial.

Demonstração:

Distribuição Exponencial

Relação com o processo de Poisson: A distribuição modela o número de eventos em certo intervalo de tempo. Se $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então $1/\lambda$ pode ser interpretado como o número médio de eventos por unidade (de tempo, de espaço, de medida, etc).

Distribuição Exponencial

Relação com o processo de Poisson: A distribuição modela o número de eventos em certo intervalo de tempo. Se $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então $1/\lambda$ pode ser interpretado como o número médio de eventos por unidade (de tempo, de espaço, de medida, etc).

- X: tempo até o primeiro evento.

Distribuição Exponencial

Relação com o processo de Poisson (continuação):

Exemplo: Em uma rede de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas como um processo de Poisson com média de 20 conexões por hora. Qual a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

Distribuição Exponencial

Exemplo: Em uma rede de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas como um processo de Poisson com média de 20 conexões por hora. Qual a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

<u>Solução:</u>