Probabilidade I – SME0800

Parte 7: Distribuições de Probabilidade Discretas

Juliana Cobre

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC

Universidade de São Paulo - USP

Distribuição Uniforme

Definição: Se uma v.a. discreta X assume valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ com igual probabilidade, dizemos que X segue uma distribuição uniforme discreta cuja fp é dada por

$$p(x) = \frac{1}{k}, \quad x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}.$$

Distribuição Uniforme

Exemplo: Considere o lançamento de um dado honesto.

Distribuição Uniforme

Exemplo: Considere o lançamento de um dado honesto. Então $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e cada resultado tem igual probabilidade de ser observado.

Distribuição Uniforme

Exemplo: Considere o lançamento de um dado honesto. Então $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e cada resultado tem igual probabilidade de ser observado. Seja X a v.a. que denota o número observado, então temos

Exemplo: Considere o lançamento de um dado honesto. Então $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e cada resultado tem igual probabilidade de ser observado. Seja X a v.a. que denota o número observado, então temos

$$p(x) = \frac{1}{6}, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Resultado: A média e a variância da distribuição uniforme discreta são

$$E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^2}{k}\right].$$

Demonstração:

Distribuição Uniforme

Exemplo: Ao lançarmos um dado qual é o valor esperado e a variância da v.a. que indica o número observado?

Distribuição Uniforme

Exemplo: Ao lançarmos um dado qual é o valor esperado e a variância da v.a. que indica o número observado?

Solução:

Distribuição de Bernoulli

Definição: A v.a. X que assume valores 0 e 1 com fp dada por

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

segue a chamada distribuição de Bernoulli.

Distribuição de Bernoulli

Definição: A v.a. X que assume valores 0 e 1 com fp dada por

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

segue a chamada distribuição de Bernoulli.

Notação: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Distribuição de Bernoulli

Definição: A v.a. X que assume valores 0 e 1 com fp dada por

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}$$

segue a chamada distribuição de Bernoulli.

Notação: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Nota: A realização de um experimento com dist. de Bernoulli(p) é chamada de ensaio de Bernoulli.

Distribuição de Bernoulli

Resultado: A média e a variânica de uma v.a. que segue uma distribuição de Bernoulli são dadas por

$$E(X) = p \quad \text{e} \quad Var(X) = p(1 - p).$$

Distribuição de Bernoulli

Resultado: A média e a variânica de uma v.a. que segue uma distribuição de Bernoulli são dadas por

$$E(X) = p \quad \text{e} \quad Var(X) = p(1-p).$$

<u>Demonstração:</u>

Exemplo: Um experimento considera sucesso se o tempo que uma pessoa gasta no caixa de um banco é menor do que 3 minutos e fracasso caso contrário. Segundo um especialista a probabilidade disso acontecer é 0,2. Qual a média e a variância de sucessos neste caso?

Distribuição binomial

Definição: Chama-se experimento binomial ao experimento

(a) que consiste em n ensaios de Bernoulli,

(b) cujos ensaios são independentes, e

(c) para o qual a probabilidade de sucesso em cada ensaio é sempre igual a p, $0 < p < 1$.

Distribuição binomial

Exemplo: Considere que uma moeda honesta é lançada 3 vezes e que sucesso é obter cara (c). Qual a probabilidade de observarmos duas caras?

Distribuição binomial

Exemplo: Considere que uma moeda honesta é lançada 3 vezes e que sucesso é obter cara (c). Qual a probabilidade de observarmos duas caras?

Solução:

Distribuição binomial

Solução (continuação):

Distribuição binomial

Nota: A permutação de n termos com k e $(n-k)$ repetidos, ou seja, o número de combinações de k sucessos e $n-k$ fracassos que podemos formar é

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Distribuição binomial

Definição: Seja X a v.a. que representa o número de sucessos num experimento binomial,

Distribuição binomial

Definição: Seja X a v.a. que representa o número de sucessos num experimento binomial, dizemos que X tem <u>distribuição binomial de parâmetros n e p</u>,

Distribuição binomial

Definição: Seja X a v.a. que representa o número de sucessos num experimento binomial, dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros n e p, e sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \forall x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Distribuição binomial

Definição: Seja X a v.a. que representa o número de sucessos num experimento binomial, dizemos que X tem distribuição binomial de parâmetros n e p, e sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \forall x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Notação: $\mathrm{b}(n, p)$ ou $\mathrm{Bin}(n, p)$.

Distribuição binomial

Resultado: A média e a variânica de uma v.a. que segue uma distribuição binomial são dadas por

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad Var(X) = np(1-p).$$

Distribuição binomial

Resultado: A média e a variânica de uma v.a. que segue uma distribuição binomial são dadas por

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad Var(X) = np(1-p).$$

<u>Demonstração:</u>

Distribuição binomial

Exemplo: A probabilidade de uma fábrica produzir um item com defeito é 10%. Qual o valor esperado de itens defeituosos em uma caixa com 20 desses itens? E a variância?

Solução:

Distribuição geométrica

Ideia: Realizamos ensaios de Bernoulli(p) independentes até que o primeiro sucesso ocorra.

X conta o número de ensaios.

Distribuição geométrica

Definição: Considerando ensaios de Bernoulli(p),

Distribuição geométrica

Definição: Considerando ensaios de Bernoulli(p), então a distribuição de probabilidade da v.a. X que representa o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra é chamada distribuição geométrica

Distribuição geométrica

Definição: Considerando ensaios de Bernoulli(p), então a distribuição de probabilidade da v.a. X que representa o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra é chamada distribuição geométrica e sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad \forall x \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Distribuição geométrica

Definição: Considerando ensaios de Bernoulli(p), então a distribuição de probabilidade da v.a. X que representa o número de tentativas até que o primeiro sucesso ocorra é chamada distribuição geométrica e sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad \forall x \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Notação: Geom(p).

Distribuição geométrica

Exemplo: Em média, um em cada 100 itens apresenta defeitos. Qual é a probabilidade de que o quinto item inspecionado seja o primeiro item defeituoso encontrado?

Exemplo: Em média, um em cada 100 itens apresenta defeitos. Qual é a probabilidade de que o quinto item inspecionado seja o primeiro item defeituoso encontrado?

Solução:

Distribuição geométrica

Exemplo: Em média, um em cada 100 itens apresenta defeitos. Qual é a probabilidade de que o quinto item inspecionado seja o primeiro item defeituoso encontrado?

Solução:

X: número de itens inspecionados até que um defeituoso apareça.

Distribuição geométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Geom}(p)$ então

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Distribuição geométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Geom}(p)$ então

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

<u>Demonstração:</u>

Distribuição geométrica

Demonstração (continuação):

Distribuição geométrica

Demonstração (continuação):

Distribuição geométrica

Exemplo: A realização de um experimento custa \$1000,00. Se o experimento falhar tem um custo adicional de \$300,00. A probabilidade de sucesso é 0,2. Experimentos independentes serão realizados até que haja o primeiro sucesso. Qual será o custo esperado do procedimento completo?

Distribuição geométrica

Exemplo: A realização de um experimento custa \$1000,00. Se o experimento falhar tem um custo adicional de \$300,00. A probabilidade de sucesso é 0,2. Experimentos independentes serão realizados até que haja o primeiro sucesso. Qual será o custo esperado do procedimento completo?

Solução:

Distribuição geométrica

Exemplo: A realização de um experimento custa \$1000,00. Se o experimento falhar tem um custo adicional de \$300,00. A probabilidade de sucesso é 0,2. Experimentos independentes serão realizados até que haja o primeiro sucesso. Qual será o custo esperado do procedimento completo?

Solução:

C : custo

X: número de experimentos necessários.

Distribuição geométrica

Nota: Se Y denota o número de fracassos antes do primeiro sucesso, temos $Y = X - 1$. Então

Distribuição geométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então

$$P(X \geq s + t | X > s) = P(X \geq t).$$

Distribuição geométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então

$$P(X \geq s + t | X > s) = P(X \geq t).$$

Nota: Esse resultado é conhecido como a **propriedade da falta de memória da distribuição geométrica.**

Distribuição geométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então

$$P(X \geq s + t | X > s) = P(X \geq t).$$

Nota: Esse resultado é conhecido como a **propriedade da falta de memória da distribuição geométrica.**

Demonstração:

Demonstração (continuação):

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Experimento binomial negativo: Realizar ensaios de Bernoulli até que k sucessos ocorram.

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Definição: Consideramos ensaios de Bernoulli(p), então a distribuição de probabilidade da v.a. X que representa o número de tentativas até que k sucessos sejam observados

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Definição: Consideramos ensaios de Bernoulli(p), então a distribuição de probabilidade da v.a. X que representa o número de tentativas até que k sucessos sejam observados é chamada distribuição binomial negativa e sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x \in \{k, k+1, k+2, \ldots\}.$$

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Definição: Consideramos ensaios de Bernoulli(p), então a distribuição de probabilidade da v.a. X que representa o número de tentativas até que k sucessos sejam observados é chamada distribuição binomial negativa e sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad x \in \{k, k+1, k+2, \ldots\}.$$

Notação: $\text{BN}(k, p)$.

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Exemplo: Em um campeonato, o time que ganha 4 jogos em sete será o vencedor. Suponha que o time A tenha 0,55 probabilidade de ganhar do time B e que ambos os times se enfrentam nos jogos do campeonato.

(a) Qual é a probabilidade de que A vença o campeonato em seis jogos?
(b) Qual é a probabilidade de que A vença o campeonato?

Solução:

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Solução:

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Resultado: Se $X \sim \text{BN}(k, p)$, então

$$E(X) = \frac{k}{p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Resultado: Se $X \sim \text{BN}(k, p)$, então

$$E(X) = \frac{k}{p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

<u>Demonstração:</u>

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Resultado: Se $X \sim \text{BN}(k, p)$, então

$$E(X) = \frac{k}{p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

Demonstração: Notemos que sendo

Y_1: número de repetições até que ocorra o 1º sucesso.

Y_2: número de repetições depois do 1º sucesso até que ocorra o 2º sucesso.

$\vdots$

Y_k: número de repetições depois do $(k-1)$º sucesso até que ocorra o kº sucesso.

Distribuição binomial negativa (ou de Pascal)

Demonstração (continuação):

Distribuição hipergeométrica

Contexto: Uma população dividida segundo duas características da qual vamos extrair sem reposição n elementos e queremos saber a probabilidade de termos extraído x de um dos tipos, sendo que existem r desse tipo.

Distribuição hipergeométrica

Contexto (continuação): Seja X o número de peças do tipo A que queremos observar. Temos $\binom{r}{x}$ possibilidades de extração de x do tipo A e $\binom{N-r}{n-x}$ possibilidades de $n-x$ peças do tipo B, num total de $\binom{N}{n}$ possibilidades.

Distribuição hipergeométrica

Contexto (continuação): Seja X o número de peças do tipo A que queremos observar. Temos $\binom{r}{x}$ possibilidades de extração de x do tipo A e $\binom{N-r}{n-x}$ possibilidades de $n-x$ peças do tipo B, num total de $\binom{N}{n}$ possibilidades. Então

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+r) \leq x \leq min(r, n).$$

Distribuição hipergeométrica

Contexto (continuação): Seja X o número de peças do tipo A que queremos observar. Temos $\binom{r}{x}$ possibilidades de extração de x do tipo A e $\binom{N-r}{n-x}$ possibilidades de $n-x$ peças do tipo B, num total de $\binom{N}{n}$ possibilidades. Então

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+r) \leq x \leq min(r, n).$$

Definição: Considerando a situação descrita anteriormente, dizemos que a v.a. X tem distribuição hipergeométrica se sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+r) \leq x \leq min(r, n).$$

Distribuição hipergeométrica

Contexto (continuação): Seja X o número de peças do tipo A que queremos observar. Temos $\binom{r}{x}$ possibilidades de extração de x do tipo A e $\binom{N-r}{n-x}$ possibilidades de $n-x$ peças do tipo B, num total de $\binom{N}{n}$ possibilidades. Então

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+r) \leq x \leq min(r, n).$$

Definição: Considerando a situação descrita anteriormente, dizemos que a v.a. X tem distribuição hipergeométrica se sua fp é dada por

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, n-N+r) \leq x \leq min(r, n).$$

Notação: Hiper(N, r, n)

Distribuição hipergeométrica

Exemplo: Um lote de 50 motores é produzido e há 3 defeituosos entre eles. Para que passe pelo controle de qualidade, 5 desses motores são escolhidos (sem reposição) e todos devem ser perfeitos. Se um ou mais itens defeituosos são encontrados, todos os motores serão inspecionados. Qual a probabilidade de que uma inspeção 100% ocorra?

Distribuição hipergeométrica

Exemplo: Um lote de 50 motores é produzido e há 3 defeituosos entre eles. Para que passe pelo controle de qualidade, 5 desses motores são escolhidos (sem reposição) e todos devem ser perfeitos. Se um ou mais itens defeituosos são encontrados, todos os motores serão inspecionados. Qual a probabilidade de que uma inspeção 100% ocorra?

Solução:

Distribuição hipergeométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ então

$$E(X) = \frac{nr}{N} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{nr(N-n)}{N(N-1)}\left(1 - \frac{r}{N}\right).$$

Distribuição hipergeométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ então

$$E(X) = \frac{nr}{N} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{nr(N-n)}{N(N-1)}\left(1 - \frac{r}{N}\right).$$

Demonstração: Omitida.

Resultado: Se $X \sim$ Hiper(N, r, n) então

$$E(X) = \frac{nr}{N} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{nr(N-n)}{N(N-1)}\left(1 - \frac{r}{N}\right).$$

Demonstração: Omitida.

Nota: Se fizermos $p = \frac{r}{N}$, podemos escrever

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad Var(X) = np(1-p)\underbrace{\frac{N-n}{N-1}} \quad .$$

Distribuição hipergeométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ então

$$E(X) = \frac{nr}{N} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{nr(N-n)}{N(N-1)}\left(1 - \frac{r}{N}\right).$$

<u>Demonstração:</u> Omitida.

Nota: Se fizermos $p = \frac{r}{N}$, podemos escrever

$$E(X) = np \quad \text{e} \quad Var(X) = np(1-p)\underbrace{\frac{N-n}{N-1}}_{\text{fator de correção}} \quad .$$

Portanto, se N for grande, $Var(X)$ com $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ é aproximadamente igual a quando $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Distribuição hipergeométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ então

$$p(x) = P(X = x) \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{para } N \text{ grande.}$$

Distribuição hipergeométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ então

$$p(x) = P(X = x) \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{para } N \text{ grande.}$$

<u>Demonstração:</u> Omitida.

Distribuição hipergeométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ então

$$p(x) = P(X = x) \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{para } N \text{ grande.}$$

Demonstração: Omitida.

Notas

- O teorema anterior nos diz que a distribuição hipergeométrica se aproxima de uma distribuição binomial quando N é grande, ou seja, não faz diferença extrair sem ou com reposição.

Distribuição hipergeométrica

Resultado: Se $X \sim \text{Hiper}(N, r, n)$ então

$$p(x) = P(X = x) \approx \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad \text{para } N \text{ grande.}$$

Demonstração: Omitida.

Notas

- O teorema anterior nos diz que a distribuição hipergeométrica se aproxima de uma distribuição binomial quando N é grande, ou seja, não faz diferença extrair sem ou com reposição.

- Podemos considerar N grande se $\dfrac{n}{N} < 0,1$.

Distribuição de Poisson

Definição: Seja X uma v.a. discreta, tomando os valores $0, 1, 2, \ldots,$. Se

$$p(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

diremos que X tem <u>distribuição de Poisson</u>, com parâmetro $\lambda > 0$.

Distribuição de Poisson

Definição: Seja X uma v.a. discreta, tomando os valores $0, 1, 2, \ldots,$. Se

$$p(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

diremos que X tem <u>distribuição de Poisson</u>, com parâmetro $\lambda > 0$.

Notação: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

Distribuição de Poisson

Notas: A distribuição de Poisson é usada para dados de contagem (dados que contam o número de certo evento ocorrido) em certo intervalo de tempo, ou superfície ou volume. Por exemplo

Distribuição de Poisson

Notas: A distribuição de Poisson é usada para dados de contagem (dados que contam o número de certo evento ocorrido) em certo intervalo de tempo, ou superfície ou volume. Por exemplo

- número de chamadas recebidas por um telefone durante cinco minutos.

Distribuição de Poisson

Notas: A distribuição de Poisson é usada para dados de contagem (dados que contam o número de certo evento ocorrido) em certo intervalo de tempo, ou superfície ou volume. Por exemplo

- número de chamadas recebidas por um telefone durante cinco minutos.
- número de falhas de um computador num dia de operação.

Distribuição de Poisson

Notas: A distribuição de Poisson é usada para dados de contagem (dados que contam o número de certo evento ocorrido) em certo intervalo de tempo, ou superfície ou volume. Por exemplo

- número de chamadas recebidas por um telefone durante cinco minutos.
- número de falhas de um computador num dia de operação.
- número de relatórios de acidentes numa estrada numa semana.

Distribuição de Poisson

Resultado: Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad Var(X) = \lambda.$$

Distribuição de Poisson

Resultado: Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ então

$$E(X) = \lambda \quad \text{e} \quad Var(X) = \lambda.$$

<u>Demonstração:</u>

Distribuição de Poisson

Demonstração:

Distribuição de Poisson

Demonstração:

Distribuição de Poisson

Exemplo: O número médio de navios petroleiros que chegam a cada dia em certo porto é dez. As instalações podem suportar até 15 navios por dia. Qual é a probabilidade de que, certo dia, navios terão de ser mandados embora, assumindo que a distribuição do número de navios que chegam é Poisson?

Distribuição de Poisson

Exemplo: O número médio de navios petroleiros que chegam a cada dia em certo porto é dez. As instalações podem suportar até 15 navios por dia. Qual é a probabilidade de que, certo dia, navios terão de ser mandados embora, assumindo que a distribuição do número de navios que chegam é Poisson?

<u>Solução:</u>

Distribuição de Poisson

Exemplo: O número médio de navios petroleiros que chegam a cada dia em certo porto é dez. As instalações podem suportar até 15 navios por dia. Qual é a probabilidade de que, certo dia, navios terão de ser mandados embora, assumindo que a distribuição do número de navios que chegam é Poisson?

Solução:

X: número de navios que chegam num dia.

Distribuição de Poisson

Exemplo: O número médio de navios petroleiros que chegam a cada dia em certo porto é dez. As instalações podem suportar até 15 navios por dia. Qual é a probabilidade de que, certo dia, navios terão de ser mandados embora, assumindo que a distribuição do número de navios que chegam é Poisson?

Solução:

X: número de navios que chegam num dia.

A: evento "mandar navio embora".

Distribuição de Poisson

Resultado: A função geradora de momentos da v.a. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ é

$$M_X(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}.$$

Demonstração:

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação: chamadas telefônicas são recebidas por uma central.

X: número de chamadas nos próximos três minutos.

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Supomos que a probabilidade de receber chamadas telefônicas é igual em qualquer momento.

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Fazer o intervalo mais curto para diminuir a chance de termos duas ou mais chamadas num mesmo intervalo.

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Fazer o intervalo mais curto para diminuir a chance de termos duas ou mais chamadas num mesmo intervalo.

$P(\text{sucesso}) =$

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Fazer o intervalo mais curto para diminuir a chance de termos duas ou mais chamadas num mesmo intervalo.

$P(\text{sucesso}) =$

$P(\text{duas chamadas em 3 minutos}) =$

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Note que em ambas as situações o valor esperado é o mesmo

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Continuar o processo fazendo n cada vez maior (aumentar o número de intervalos), p cada vez menor de forma que np fique constante.

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Continuar o processo fazendo n cada vez maior (aumentar o número de intervalos), p cada vez menor de forma que np fique constante. Podemos chamar $np = \lambda$. Assim

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Fazendo $n \to \infty$, de forma que $np = \lambda$ seja constante, devemos ter $p \to 0$. Então

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Fazendo $n \to \infty$, de forma que $np = \lambda$ seja constante, devemos ter $p \to 0$. Então

$$\lim_{n \to \infty} P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

A distribuição Poisson como limite da binomial

Situação (continuação): Fazendo $n \to \infty$, de forma que $np = \lambda$ seja constante, devemos ter $p \to 0$. Então

$$\lim_{n \to \infty} P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

que é a fp de uma Poisson(λ).

A distribuição Poisson como limite da binomial

Exemplo: Seja $X \sim \text{Bin}(30;\, 0{,}01)$. Então

Probabilidade exata

Probabilidade aproximada

A distribuição Poisson como limite da binomial

Exemplo (O Paradigma de Poisson): Vamos entender um pouco a aproximação anterior. Suponha que os experimentos sejam independentes com probabilidade de sucessos p_i, em que todos $p_i, i = 1, \ldots, n$, são pequenos. Seja $X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$ e $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

A distribuição Poisson como limite da binomial

Exemplo (continuação):