

Probabilidade I – SME0800

Parte 4: Variáveis Aleatórias

Juliana Cobre

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC

Universidade de São Paulo - USP



Variáveis aleatórias

Definição: Sejam $\mathcal{E}$ um experimento

Variáveis aleatórias

Definição: Sejam $\mathcal{E}$ um experimento e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$.

Variáveis aleatórias

Definição: Sejam $\mathcal{E}$ um experimento e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$

Variáveis aleatórias

Definição: Sejam $\mathcal{E}$ um experimento e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$,

Variáveis aleatórias

Definição: Sejam $\mathcal{E}$ um experimento e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é chamada de variável aleatória (v.a.)

Variáveis aleatórias

Definição: Sejam $\mathcal{E}$ um experimento e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função X que associa a cada elemento $\omega \in \Omega$ um número real, $X(\omega)$, é chamada de variável aleatória (v.a.)

Notação: Letras maiúsculas, comumente do fim do alfabeto, X, W, Y, Z .

Variáveis aleatórias

Notas

- ▶ Nem toda função pode ser uma v.a.

$$X(\omega) = x \quad X(\omega) \in I$$

Variáveis aleatórias

Notas

- ▶ Nem toda função pode ser uma v.a.

$$X(\omega) = x \quad X(\omega) \in I$$

- ▶ Quando o resultado ω de Ω já é uma característica numérica de interesse, fazemos $X(\omega) = \omega$.

Variáveis aleatórias

Notas

- ▶ Nem toda função pode ser uma v.a.

$$X(\omega) = x \quad X(\omega) \in I$$

- ▶ Quando o resultado ω de Ω já é uma característica numérica de interesse, fazemos $X(\omega) = \omega$.
- ▶ A função X não precisa ser bijetora.

Variáveis aleatórias

Exemplo: Lançamento de duas moedas

$$\Omega = \{CC, KC, CK, KK\}.$$

Definimos a v.a. X como sendo o número de caras (C). Então

Variáveis aleatórias

Notas

- ▶ Podemos considerar o conjunto de todos os possíveis valores de X , R_X , como um outro espaço amostral.

Notas

- ▶ Podemos considerar o conjunto de todos os possíveis valores de X , R_X , como um outro espaço amostral. E o Ω original corresponde ao resultado do experimento (possivelmente não numérico).

Notas

- ▶ Podemos considerar o conjunto de todos os possíveis valores de X , R_X , como um outro espaço amostral. E o Ω original corresponde ao resultado do experimento (possivelmente não numérico). Já R_X é o espaço amostral associado à v.a. X .

Notas

- ▶ Podemos considerar o conjunto de todos os possíveis valores de X , R_X , como um outro espaço amostral. E o Ω original corresponde ao resultado do experimento (possivelmente não numérico). Já R_X é o espaço amostral associado à v.a. X .
- ▶ Como estamos mais interessados nos valores de X , acabamos ignorando o espaço amostral.

Notas

- ▶ Podemos considerar o conjunto de todos os possíveis valores de X , R_X , como um outro espaço amostral. E o Ω original corresponde ao resultado do experimento (possivelmente não numérico). Já R_X é o espaço amostral associado à v.a. X .
- ▶ Como estamos mais interessados nos valores de X , acabamos ignorando o espaço amostral. Até abusamos e escrevemos apenas X ao invés de $X(\omega)$.

Variáveis aleatórias

Exemplo: Três moedas são atiradas sobre uma mesa. Quando pararem, a fase “aleatória” do experimento terminou. Um resultado simples ω poderia consistir na descrição detalhada de como e onde as moedas pararam. Possivelmente estaremos interessados em certas características numéricas associadas ao experimento.

Variáveis aleatórias

Exemplo: Três moedas são atiradas sobre uma mesa. Quando pararem, a fase “aleatória” do experimento terminou. Um resultado simples ω poderia consistir na descrição detalhada de como e onde as moedas pararam. Possivelmente estaremos interessados em certas características numéricas associadas ao experimento.

$X(\omega)$ = número de caras que apareceram.

Variáveis aleatórias

Exemplo: Três moedas são atiradas sobre uma mesa. Quando pararem, a fase “aleatória” do experimento terminou. Um resultado simples ω poderia consistir na descrição detalhada de como e onde as moedas pararam. Possivelmente estaremos interessados em certas características numéricas associadas ao experimento.

$X(\omega)$ = número de caras que apareceram.

$Y(\omega)$ = distância máxima entre duas moedas quaisquer.

Variáveis aleatórias

Exemplo: Três moedas são atiradas sobre uma mesa. Quando pararem, a fase “aleatória” do experimento terminou. Um resultado simples ω poderia consistir na descrição detalhada de como e onde as moedas pararam. Possivelmente estaremos interessados em certas características numéricas associadas ao experimento.

$X(\omega)$ = número de caras que apareceram.

$Y(\omega)$ = distância máxima entre duas moedas quaisquer.

$Z(\omega)$ = distância mínima das moedas a um ponto qualquer.

Variáveis aleatórias

Nota: Para os valores assumidos pelas v.a. usaremos letras minúsculas.

Variáveis aleatórias

Nota: Para os valores assumidos pelas v.a. usaremos letras minúsculas. Por exemplo, $x = 1,5$.

Variáveis aleatórias discretas

Definição: X é uma v.a. discreta se X é uma v.a. com contradomínio, R_X , finito ou infinito enumerável.

Variáveis aleatórias discretas

Definição: X é uma v.a. discreta se X é uma v.a. com contradomínio, R_X , finito ou infinito enumerável.

Exemplo: X : número de pedestres que passam em frente a certa loja por um minuto.

Variáveis aleatórias discretas

Definição: X é uma v.a. discreta se X é uma v.a. com contradomínio, R_X , finito ou infinito enumerável.

Exemplo: X : número de pedestres que passam em frente a certa loja por um minuto.

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \}$$

Variáveis aleatórias discretas

Definição: X é uma v.a. discreta se X é uma v.a. com contradomínio, R_X , finito ou infinito enumerável.

Exemplo: X : número de pedestres que passam em frente a certa loja por um minuto.

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \}$$

ou

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$$

Variáveis aleatórias discretas

Definição: X é uma v.a. discreta se X é uma v.a. com contradomínio, R_X , finito ou infinito enumerável.

Exemplo: X : número de pedestres que passam em frente a certa loja por um minuto.

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \}$$

ou

$$R_X = \{0, 1, 2, 3, \dots, N\}$$



N é o número máximo de pessoas possíveis de passarem em um minuto.

Variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume valores $\{x_1, x_2, \dots, \}$. A função de probabilidade, p , da v.a. X satisfaz

Variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume valores $\{x_1, x_2, \dots, \}$. A função de probabilidade, p , da v.a. X satisfaz

$$\textcircled{1} \quad P(X = x_i) = p(x_i)$$

Variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume valores $\{x_1, x_2, \dots\}$. A função de probabilidade, p , da v.a. X satisfaz

$$\textcircled{1} \quad P(X = x_i) = p(x_i)$$

$$\textcircled{2} \quad p(x_i) \geq 0, \forall i$$

Variáveis aleatórias discretas

Definição: Seja X uma v.a. discreta que assume valores $\{x_1, x_2, \dots\}$. A função de probabilidade, p , da v.a. X satisfaz

① $P(X = x_i) = p(x_i)$

② $p(x_i) \geq 0, \forall i$

③ $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1.$

Probabilidade de um evento

Probabilidade de um evento

Nota: B pode ser um intervalo discreto, uma reunião de pontos ou um único ponto.

Probabilidade de um evento

Exemplo: Seja X uma v.a. discreta tal que $R_X = \{1, 2, 3, 4\}$ e também

x_i	1	2	3	4
$p(x_i)$	0,1	0,4		0,3

Variáveis aleatórias contínuas

Definição: Uma v.a. X , definida sobre um Ω e assumindo valores num intervalo de números reais é chamada de v.a. contínua.

Exemplo: X : peso em kg de um saco de batatas.

Variáveis aleatórias contínuas

Definição: Seja X uma v.a. contínua. Uma função densidade de probabilidade (fdp) de X deve satisfazer as condições a seguir

Variáveis aleatórias contínuas

Definição: Seja X uma v.a. contínua. Uma função densidade de probabilidade (fdp) de X deve satisfazer as condições a seguir

① $f(x) \geq 0, \forall x$

Variáveis aleatórias contínuas

Definição: Seja X uma v.a. contínua. Uma função densidade de probabilidade (fdp) de X deve satisfazer as condições a seguir

① $f(x) \geq 0, \forall x$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Variáveis aleatórias contínuas

Definição: Seja X uma v.a. contínua. Uma função densidade de probabilidade (fdp) de X deve satisfazer as condições a seguir

① $f(x) \geq 0, \forall x$

② $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

③ $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, para quaisquer a, b , com $-\infty < a < b < \infty$.

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

▶ Se X é uma v.a. contínua então

e

.

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

► Se X é uma v.a. contínua então

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx =$$

e

.

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

► Se X é uma v.a. contínua então

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

e

.

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

► Se X é uma v.a. contínua então

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

e

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

- ▶ Se X é uma v.a. contínua então

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

e

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

- ▶ Sempre que a fdp for especificada somente em determinados valores do domínio, devemos supor que seja zero em todos os demais.

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

- ▶ Se X é uma v.a. contínua então

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

e

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

- ▶ Sempre que a fdp for especificada somente em determinados valores do domínio, devemos supor que seja zero em todos os demais.
- ▶ $f(x)$ não representa a probabilidade de coisa alguma!

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

- ▶ Se X é uma v.a. contínua então

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

e

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

- ▶ Sempre que a fdp for especificada somente em determinados valores do domínio, devemos supor que seja zero em todos os demais.
- ▶ $f(x)$ não representa a probabilidade de coisa alguma! $f(x)$ é uma densidade.

Variáveis aleatórias contínuas

Notas

- ▶ Se X é uma v.a. contínua então

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x) dx = 0$$

e

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

- ▶ Sempre que a fdp for especificada somente em determinados valores do domínio, devemos supor que seja zero em todos os demais.
- ▶ $f(x)$ não representa a probabilidade de coisa alguma! $f(x)$ é uma densidade.

$\int_a^b f(x) dx$ é a massa total contida em $[a, b]$.

Variáveis aleatórias

Definição: Seja X uma v.a. discreta ou contínua. A função de distribuição acumulada (fda) da v.a. X , F é definida como

Variáveis aleatórias

Definição: Seja X uma v.a. discreta ou contínua. A função de distribuição acumulada (fda) da v.a. X , F é definida como

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Variáveis aleatórias

Definição: Seja X uma v.a. discreta ou contínua. A função de distribuição acumulada (fda) da v.a. X , F é definida como

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Resultado

a) Se X for uma v.a. discreta com fp p então

$$F(x) = \sum_j p(x_j), \quad j \text{ são os índices tais que } x_j \leq x.$$

Variáveis aleatórias

Definição: Seja X uma v.a. discreta ou contínua. A função de distribuição acumulada (fda) da v.a. X , F é definida como

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Resultado

a) Se X for uma v.a. discreta com fp p então

$$F(x) = \sum_j p(x_j), \quad j \text{ são os índices tais que } x_j \leq x.$$

b) Se X for uma v.a. contínua com fdp f então

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Variáveis aleatórias

Definição: Seja X uma v.a. discreta ou contínua. A função de distribuição acumulada (fda) da v.a. X , F é definida como

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Resultado

a) Se X for uma v.a. discreta com fp p então

$$F(x) = \sum_j p(x_j), \quad j \text{ são os índices tais que } x_j \leq x.$$

b) Se X for uma v.a. contínua com fdp f então

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Demonstração: Imediata da definição de fda.

Variáveis aleatórias

Exemplo: Seja X uma v.a. discreta tal que

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Variáveis aleatórias

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Temos que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$, então

Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias

Notas

- ▶ Se X é uma v.a. discreta o gráfico de F tem “saltos” em x_j de tamanho $p(x_j)$.

Notas

- ▶ Se X é uma v.a. discreta o gráfico de F tem “saltos” em x_j de tamanho $p(x_j)$.
- ▶ Se X é uma v.a. contínua então F será contínua para todo x .

Resultado: A função F é não decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Variáveis aleatórias

Resultado: A função F é não decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Demonstração: Sejam os eventos $A = \{X \leq x_1\}$ e $B = \{X \leq x_2\}$.

Variáveis aleatórias

Resultado: A função F é não decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Demonstração: Sejam os eventos $A = \{X \leq x_1\}$ e $B = \{X \leq x_2\}$. Como $x_1 \leq x_2$ então $A \subset B$ e, pelo que já vimos, neste caso

Variáveis aleatórias

Resultado: A função F é não decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Demonstração: Sejam os eventos $A = \{X \leq x_1\}$ e $B = \{X \leq x_2\}$. Como $x_1 \leq x_2$ então $A \subset B$ e, pelo que já vimos, neste caso

$$P(A) \leq P(B)$$

ou seja

Variáveis aleatórias

Resultado: A função F é não decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Demonstração: Sejam os eventos $A = \{X \leq x_1\}$ e $B = \{X \leq x_2\}$. Como $x_1 \leq x_2$ então $A \subset B$ e, pelo que já vimos, neste caso

$$P(A) \leq P(B)$$

ou seja

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

Variáveis aleatórias

Resultado: A função F é não decrescente, isto é, se $x_1 \leq x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Demonstração: Sejam os eventos $A = \{X \leq x_1\}$ e $B = \{X \leq x_2\}$. Como $x_1 \leq x_2$ então $A \subset B$ e, pelo que já vimos, neste caso

$$P(A) \leq P(B)$$

ou seja

$$F(x_1) \leq F(x_2) \quad (\text{casos discreto e contínuo}).$$

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Variáveis aleatórias

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Demonstração Considere uma v.a. contínua, então

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Demonstração Considere uma v.a. contínua, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(u) du =$$

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Demonstração Considere uma v.a. contínua, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 0$$

Variáveis aleatórias

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Demonstração Considere uma v.a. contínua, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(u) du =$$

Variáveis aleatórias

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Demonstração Considere uma v.a. contínua, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 1.$$

Variáveis aleatórias

Resultado

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Demonstração Considere uma v.a. contínua, então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 1.$$

Exercício: Caso discreto.

Resultado

(a) Seja X uma v.a. discreta com possíveis valores $x_1 < x_2 < \dots$. Seja F a fda de X . Então

$$p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1}).$$

Variáveis aleatórias

Resultado

(a) Seja X uma v.a. discreta com possíveis valores $x_1 < x_2 < \dots$. Seja F a fda de X . Então

$$p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1}).$$

(b) Seja F a fda de uma v.a. contínua com fdp f então

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x),$$

para todo x no qual F seja derivável.

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

$$F(x_j) = P(X \leq x_j) =$$

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

$$\begin{aligned} F(x_j) = P(X \leq x_j) &= P(\{X = x_j\} \cup \{X = x_{j-1}\} \cup \dots \cup \{X = x_1\}) \\ &= \end{aligned}$$

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

$$\begin{aligned} F(x_j) &= P(X \leq x_j) = P(\{X = x_j\} \cup \{X = x_{j-1}\} \cup \dots \cup \{X = x_1\}) \\ &= p(x_j) + p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1). \end{aligned}$$

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

$$\begin{aligned} F(x_j) &= P(X \leq x_j) = P(\{X = x_j\} \cup \{X = x_{j-1}\} \cup \dots \cup \{X = x_1\}) \\ &= p(x_j) + p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1). \end{aligned}$$

Analogamente

$$F(x_{j-1}) = P(X \leq x_{j-1}) = p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1).$$

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

$$\begin{aligned} F(x_j) &= P(X \leq x_j) = P(\{X = x_j\} \cup \{X = x_{j-1}\} \cup \dots \cup \{X = x_1\}) \\ &= p(x_j) + p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1). \end{aligned}$$

Analogamente

$$F(x_{j-1}) = P(X \leq x_{j-1}) = p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1).$$

Portanto

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = p(x_j) = P(X = x_j).$$

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

$$\begin{aligned} F(x_j) &= P(X \leq x_j) = P(\{X = x_j\} \cup \{X = x_{j-1}\} \cup \dots \cup \{X = x_1\}) \\ &= p(x_j) + p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1). \end{aligned}$$

Analogamente

$$F(x_{j-1}) = P(X \leq x_{j-1}) = p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1).$$

Portanto

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = p(x_j) = P(X = x_j).$$

(b) Se F é fda então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$.

Variáveis aleatórias

Demonstração

(a) Como $x_1 < x_2 < \dots$ temos

$$\begin{aligned} F(x_j) &= P(X \leq x_j) = P(\{X = x_j\} \cup \{X = x_{j-1}\} \cup \dots \cup \{X = x_1\}) \\ &= p(x_j) + p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1). \end{aligned}$$

Analogamente

$$F(x_{j-1}) = P(X \leq x_{j-1}) = p(x_{j-1}) + \dots + p(x_1).$$

Portanto

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = p(x_j) = P(X = x_j).$$

(b) Se F é fda então $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x no qual F seja derivável.

Variáveis aleatórias

Nota

Variáveis aleatórias

Nota

Interpretação: “Quantidade de probabilidade no intervalo $(x, x + h)$ em relação ao comprimento de h ” $\Rightarrow$

Variáveis aleatórias

Nota

Interpretação: “Quantidade de probabilidade no intervalo $(x, x + h)$ em relação ao comprimento de h ” $\Rightarrow$ função densidade de probabilidade.

Variáveis aleatórias

Exemplo: Seja X uma v.a. com fda dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Eventos equivalentes

Seja X uma v.a. definida em Ω . Então $Y = H(X)$ é uma v.a., pois para todo $\omega \in \Omega$, temos $y = H[X(\omega)]$.

Eventos equivalentes

Definição: Sejam B e D tais que $B = \{x \in R_X : H(x) \in D\}$, ou seja,

Eventos equivalentes

Definição: Sejam B e D tais que $B = \{x \in R_X : H(x) \in D\}$, ou seja, B é o conjunto de todos os valores de X tais que $H(x) \in D$.

Eventos equivalentes

Definição: Sejam B e D tais que $B = \{x \in R_X : H(x) \in D\}$, ou seja, B é o conjunto de todos os valores de X tais que $H(x) \in D$. Dessa forma B e D são chamados eventos equivalentes.

Eventos equivalentes

Definição: Sejam B e D tais que $B = \{x \in R_X : H(x) \in D\}$, ou seja, B é o conjunto de todos os valores de X tais que $H(x) \in D$. Dessa forma B e D são chamados eventos equivalentes.

Nota: Eventos equivalentes são associados a diferentes espaços amostrais:

Eventos equivalentes

Definição: Sejam B e D tais que $B = \{x \in R_X : H(x) \in D\}$, ou seja, B é o conjunto de todos os valores de X tais que $H(x) \in D$. Dessa forma B e D são chamados eventos equivalentes.

Nota: Eventos equivalentes são associados a diferentes espaços amostrais: $B \subset R_X$ e

Eventos equivalentes

Definição: Sejam B e D tais que $B = \{x \in R_X : H(x) \in D\}$, ou seja, B é o conjunto de todos os valores de X tais que $H(x) \in D$. Dessa forma B e D são chamados eventos equivalentes.

Nota: Eventos equivalentes são associados a diferentes espaços amostrais: $B \subset R_X$ e $D \subset R_Y$.

Eventos equivalentes

Exemplo: Seja X uma v.a. que representa o raio de um tubo. Seja $H(x) = \pi x^2$ uma função. Determine o evento equivalente a $B = X > 2$ em relação à v.a. $H(X)$.

Eventos equivalentes

Definição: Sejam X uma v.a. definida em Ω e R_X o seu contradomínio.



Eventos equivalentes

Definição: Sejam X uma v.a. definida em Ω e R_X o seu contradomínio. Sejam H uma função real e Y uma v.a. tal que $Y = H(X)$ com contradomínio R_Y .



Eventos equivalentes

Definição: Sejam X uma v.a. definida em Ω e R_X o seu contradomínio. Sejam H uma função real e Y uma v.a. tal que $Y = H(X)$ com contradomínio R_Y . Para qualquer evento $D \subset R_Y$ definiremos

$$P(D) = P(x \in R_X : H(x) \in D).$$



Eventos equivalentes

Definição: Sejam X uma v.a. definida em Ω e R_X o seu contradomínio. Sejam H uma função real e Y uma v.a. tal que $Y = H(X)$ com contradomínio R_Y . Para qualquer evento $D \subset R_Y$ definiremos

$$P(D) = P(x \in R_X : H(x) \in D).$$

Notas

- ▶ A definição acima torna possível calcular probabilidades que envolvam eventos associados a Y , se conhecermos a distribuição de probabilidade de X e se pudermos determinar o evento equivalente em questão.



Eventos equivalentes

Definição: Sejam X uma v.a. definida em Ω e R_X o seu contradomínio. Sejam H uma função real e Y uma v.a. tal que $Y = H(X)$ com contradomínio R_Y . Para qualquer evento $D \subset R_Y$ definiremos

$$P(D) = P(x \in R_X : H(x) \in D).$$

Notas

- ▶ A definição acima torna possível calcular probabilidades que envolvam eventos associados a Y , se conhecermos a distribuição de probabilidade de X e se pudermos determinar o evento equivalente em questão.



$$P(D) = P(x \in R_X : H(x) \in D) =$$

Eventos equivalentes

Definição: Sejam X uma v.a. definida em Ω e R_X o seu contradomínio. Sejam H uma função real e Y uma v.a. tal que $Y = H(X)$ com contradomínio R_Y . Para qualquer evento $D \subset R_Y$ definiremos

$$P(D) = P(x \in R_X : H(x) \in D).$$

Notas

- ▶ A definição acima torna possível calcular probabilidades que envolvam eventos associados a Y , se conhecermos a distribuição de probabilidade de X e se pudermos determinar o evento equivalente em questão.



$$P(D) = P(x \in R_X : H(x) \in D) = P(\omega \in \Omega : H[X(\omega)] \in D).$$

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Pergunta: Como determinar a fp ou a fdp de $Y = H(X)$?

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Pergunta: Como determinar a fp ou a fdp de $Y = H(X)$?

Caso 1: X v.a. discreta e $H(X)$ uma função discreta.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Pergunta: Como determinar a fp ou a fdp de $Y = H(X)$?

Caso 1: X v.a. discreta e $H(X)$ uma função discreta.

Procedimento geral: Sejam $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ os valores de X tais que $H(x_{i_j}) = y_i$ para todo j .

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Pergunta: Como determinar a fp ou a fdp de $Y = H(X)$?

Caso 1: X v.a. discreta e $H(X)$ uma função discreta.

Procedimento geral: Sejam $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ os valores de X tais que $H(x_{i_j}) = y_i$ para todo j .
Então $P(Y = y_i) = p(x_{i_1}) + p(x_{i_2}) + \dots$

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Exemplo: Seja X uma v.a. discreta tal que $R_X = \{-1, 0, 1\}$ e $p_X(-1) = \frac{1}{3}$, $p_X(0) = \frac{1}{2}$ e $p_X(1) = \frac{1}{6}$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Exemplo: Seja X uma v.a. discreta tal que $R_X = \{-1, 0, 1\}$ e $p_X(-1) = \frac{1}{3}$, $p_X(0) = \frac{1}{2}$ e $p_X(1) = \frac{1}{6}$. Obtenha a fp de $Y = 3X + 1$ e de

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Exemplo: Seja X uma v.a. discreta tal que $R_X = \{-1, 0, 1\}$ e $p_X(-1) = \frac{1}{3}$, $p_X(0) = \frac{1}{2}$ e $p_X(1) = \frac{1}{6}$. Obtenha a fp de $Y = 3X + 1$ e de $W = X^2$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Exemplo: Seja X uma v.a. discreta tal que $R_X = \{-1, 0, 1\}$ e $p_X(-1) = \frac{1}{3}$, $p_X(0) = \frac{1}{2}$ e $p_X(1) = \frac{1}{6}$. Obtenha a fp de $Y = 3X + 1$ e de $W = X^2$.

Solução:

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 2: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função discreta.

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua com $R_X = \mathbb{R}$ e $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$. Obtenha a fp de Y .

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 2: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função discreta.

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua com $R_X = \mathbb{R}$ e $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$. Obtenha a fp de Y .

Solução:

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 2: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função discreta.

Procedimento geral: Seja $A \subset R_X$ equivalente a $Y = \{y_i\}$ então

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua com $R_X = \mathbb{R}$ e $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$. Obtenha a fp de Y .

Solução:

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 2: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função discreta.

Procedimento geral: Seja $A \subset R_X$ equivalente a $Y = \{y_i\}$ então

$$p_Y(y_i) = P(Y = y_i) =$$

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua com $R_X = \mathbb{R}$ e $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$. Obtenha a fp de Y .

Solução:

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 2: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função discreta.

Procedimento geral: Seja $A \subset R_X$ equivalente a $Y = \{y_i\}$ então

$$p_Y(y_i) = P(Y = y_i) = \int_A f(x) dx$$

Exemplo: Seja X uma v.a. contínua com $R_X = \mathbb{R}$ e $Y = \begin{cases} 1, & X \geq 0 \\ -1, & X < 0 \end{cases}$. Obtenha a fp de Y .

Solução:

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 3: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função contínua.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 3: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função contínua.

Procedimento geral

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 3: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função contínua.

Procedimento geral

(1) Obter a fda de Y , F_Y , achando o evento A no contradomínio de X equivalente a $\{Y \leq y\}$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 3: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função contínua.

Procedimento geral

- (1) Obter a fda de Y , F_Y , achando o evento A no contradomínio de X equivalente a $\{Y \leq y\}$.
- (2) Derivar $F_Y(y)$ para obter $f_Y(y)$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Caso 3: X v.a. contínua e $H(X)$ uma função contínua.

Procedimento geral

- (1) Obter a fda de Y , F_Y , achando o evento A no contradomínio de X equivalente a $\{Y \leq y\}$.
- (2) Derivar $F_Y(y)$ para obter $f_Y(y)$.
- (3) Determinar aqueles valores de y para os quais $f_Y(y) > 0$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Exemplo: Seja X uma v.a. tal que a fdp é

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Seja $Y = H(X) = e^{-X}$. Obtenha $f_Y(y)$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Exemplo: Seja X uma v.a. tal que a fdp é

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Seja $Y = H(X) = e^{-X}$. Obtenha $f_Y(y)$.

Solução:

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Continuação: Como $f_X(x) > 0$ para $0 < x < 1$ então para $\frac{1}{e} < y < 1$ temos $g(y) > 0$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Resultado: Seja X uma v.a. contínua com fdp f_X tal que $f_X(x) > 0$ para $a < x < b$. Seja $H(x)$ uma função estritamente monótona (crescente ou decrescente) e derivável para todo x . Então a fdp de $Y = H(X)$ é dada por

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}(H^{-1}(y)) \right|,$$

em que H^{-1} é a função inversa de H .

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Demonstração: (a) Suponha H estritamente crescente.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Demonstração: (b) Suponha H estritamente decrescente.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Nota: Se H for crescente então f_Y será não nula para y tais que $H(a) < y < H(b)$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Nota: Se H for crescente então f_Y será não nula para y tais que $H(a) < y < H(b)$. Se H for decrescente então f_Y será não nula para y tais que $H(b) < y < H(a)$.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Nota: Se H for crescente então f_Y será não nula para y tais que $H(a) < y < H(b)$. Se H for decrescente então f_Y será não nula para y tais que $H(b) < y < H(a)$.

Exemplo: Refazer o exemplo anterior.

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Resultado: Seja X uma v.a. contínua com fdp f_X . Se $Y = X^2$, então a v.a. Y tem a fdp dada por

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Resultado: Seja X uma v.a. contínua com fdp f_X . Se $Y = X^2$, então a v.a. Y tem a fdp dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})].$$

Eventos equivalentes: Transformação de variáveis

Resultado: Seja X uma v.a. contínua com fdp f_X . Se $Y = X^2$, então a v.a. Y tem a fdp dada por

$$f_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})].$$

Demonstração:

Vetores aleatórios

Motivação: Observar duas ou mais características simultaneamente.

Vetores aleatórios

Motivação: Observar duas ou mais características simultaneamente. Exemplo: Estatura (H) e peso (W) de uma pessoa escolhida, (h,w) .

Vetores aleatórios

Motivação: Observar duas ou mais características simultaneamente. Exemplo: Estatura (H) e peso (W) de uma pessoa escolhida, (h,w) .

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento aleatório e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$.

Vetores aleatórios

Motivação: Observar duas ou mais características simultaneamente. Exemplo: Estatura (H) e peso (W) de uma pessoa escolhida, (h,w) .

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento aleatório e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Sejam $X = X(\omega)$ e $Y = Y(\omega)$ duas funções que associam um número real a cada $\omega \in \Omega$.

Vetores aleatórios

Motivação: Observar duas ou mais características simultaneamente. Exemplo: Estatura (H) e peso (W) de uma pessoa escolhida, (h,w) .

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento aleatório e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Sejam $X = X(\omega)$ e $Y = Y(\omega)$ duas funções que associam um número real a cada $\omega \in \Omega$. Definimos (X, Y) como sendo uma v.a. bidimensional (vetor aleatório).

Vetores aleatórios

Motivação: Observar duas ou mais características simultaneamente. Exemplo: Estatura (H) e peso (W) de uma pessoa escolhida, (h, w) .

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento aleatório e Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Sejam $X = X(\omega)$ e $Y = Y(\omega)$ duas funções que associam um número real a cada $\omega \in \Omega$. Definimos (X, Y) como sendo uma v.a. bidimensional (vetor aleatório).

Nota: Analogamente, se tivermos n funções, temos

$X_1, X_2, \dots, X_n$ um vetor aleatório n – dimensional.

Vetores aleatórios

Nota: Por comodidade de notação, vamos nos restringir neste curso a um vetor aleatório bidimensional. Analogamente pode ser feito para um vetor aleatório n -dimensional.

Vetores aleatórios

Nota: Por comodidade de notação, vamos nos restringir neste curso a um vetor aleatório bidimensional. Analogamente pode ser feito para um vetor aleatório n -dimensional.

Definição: (X, Y) é um vetor aleatório discreto bidimensional se os possíveis valores de (X, Y) forem finitos ou infinitos enumeráveis, isto é, (X, Y) assumem valores (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots$, e $j = 1, 2, \dots$.

Vetores aleatórios

Nota: Por comodidade de notação, vamos nos restringir neste curso a um vetor aleatório bidimensional. Analogamente pode ser feito para um vetor aleatório n -dimensional.

Definição: (X, Y) é um vetor aleatório discreto bidimensional se os possíveis valores de (X, Y) forem finitos ou infinitos enumeráveis, isto é, (X, Y) assumem valores (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots$, e $j = 1, 2, \dots$.

Notas

- ▶ Vetores aleatórios contínuos serão estudados em Probabilidade II.

Vetores aleatórios

Nota: Por comodidade de notação, vamos nos restringir neste curso a um vetor aleatório bidimensional. Analogamente pode ser feito para um vetor aleatório n -dimensional.

Definição: (X, Y) é um vetor aleatório discreto bidimensional se os possíveis valores de (X, Y) forem finitos ou infinitos enumeráveis, isto é, (X, Y) assumem valores (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots$, e $j = 1, 2, \dots$.

Notas

- ▶ Vetores aleatórios contínuos serão estudados em Probabilidade II.
- ▶ É possível existir vetores aleatórios com componentes contínuas e outras discretas.

Vetores aleatórios

Nota: Por comodidade de notação, vamos nos restringir neste curso a um vetor aleatório bidimensional. Analogamente pode ser feito para um vetor aleatório n -dimensional.

Definição: (X, Y) é um vetor aleatório discreto bidimensional se os possíveis valores de (X, Y) forem finitos ou infinitos enumeráveis, isto é, (X, Y) assumem valores (x_i, y_j) , $i = 1, 2, \dots$, e $j = 1, 2, \dots$.

Notas

- ▶ Vetores aleatórios contínuos serão estudados em Probabilidade II.
- ▶ É possível existir vetores aleatórios com componentes contínuas e outras discretas.
- ▶ X e Y podem estar associados a espaços amostrais diferentes.

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional).

Assim

$$P(B) = \sum_B \sum p(x_i, y_j)$$

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). Definimos a função de probabilidade conjunta de (X, Y) como sendo

Assim

$$P(B) = \sum_B \sum p(x_i, y_j)$$

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). Definimos a função de probabilidade conjunta de (X, Y) como sendo $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ para cada possível resultado (x_i, y_j) tal que

Assim

$$P(B) = \sum \sum_B p(x_i, y_j)$$

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). Definimos a função de probabilidade conjunta de (X, Y) como sendo $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ para cada possível resultado (x_i, y_j) tal que

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x_i, y_j) .

Assim

$$P(B) = \sum_B \sum p(x_i, y_j)$$

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). Definimos a função de probabilidade conjunta de (X, Y) como sendo $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ para cada possível resultado (x_i, y_j) tal que

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x_i, y_j) .
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$.

Assim

$$P(B) = \sum_B \sum p(x_i, y_j)$$

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). Definimos a função de probabilidade conjunta de (X, Y) como sendo $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ para cada possível resultado (x_i, y_j) tal que

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x_i, y_j) .
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$.

Nota: A distribuição de probabilidade de (X, Y) é induzida pela probabilidade dos eventos associados ao espaço amostral Ω . Mas estaremos focados em um evento do contradomínio de (X, Y) .

Assim

$$P(B) = \sum_B \sum p(x_i, y_j)$$

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). Definimos a função de probabilidade conjunta de (X, Y) como sendo $p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$ para cada possível resultado (x_i, y_j) tal que

1. $p(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x_i, y_j) .
2. $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$.

Nota: A distribuição de probabilidade de (X, Y) é induzida pela probabilidade dos eventos associados ao espaço amostral Ω . Mas estaremos focados em um evento do contradomínio de (X, Y) . Notemos que para $B \subset R_{X \times Y}$

$$P(B) = P[(X(\omega), Y(\omega)) \in B] = P(\omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in B).$$

Assim

$$P(B) = \sum_B \sum p(x_i, y_j)$$

Vetores aleatórios

Exemplo: Duas moedas equilibradas são lançadas de forma independente. Sejam

X : número de caras nos dois lançamentos.

Y : função indicadora de faces iguais nos dois lançamentos.

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). A função de distribuição acumulada conjunta (fda) F do vetor aleatório (X, Y) é definida por

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). A função de distribuição acumulada conjunta (fda) F do vetor aleatório (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). A função de distribuição acumulada conjunta (fda) F do vetor aleatório (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Exemplo: Obter a fda do exemplo anterior.

Vetores aleatórios

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório (bidimensional). A função de distribuição acumulada conjunta (fda) F do vetor aleatório (X, Y) é definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Exemplo: Obter a fda do exemplo anterior.

Solução:

Vetores aleatórios

Continuação:

Distribuição de probabilidade marginal

Motivação: Temos (X, Y) , mas podemos estar interessados apenas em X ou Y .

Distribuição de probabilidade marginal

Motivação: Temos (X, Y) , mas podemos estar interessados apenas em X ou Y .

Definição: A distribuição de probabilidade marginal de X é a função definida para $x_1, x_2, \dots$ tal que

Distribuição de probabilidade marginal

Motivação: Temos (X, Y) , mas podemos estar interessados apenas em X ou Y .

Definição: A distribuição de probabilidade marginal de X é a função definida para $x_1, x_2, \dots$ tal que

$$p(x_i) = P(X = x_i) =$$

Distribuição de probabilidade marginal

Motivação: Temos (X, Y) , mas podemos estar interessados apenas em X ou Y .

Definição: A distribuição de probabilidade marginal de X é a função definida para $x_1, x_2, \dots$ tal que

$$p(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } Y = y_2 \text{ ou } \dots) =$$

Distribuição de probabilidade marginal

Motivação: Temos (X, Y) , mas podemos estar interessados apenas em X ou Y .

Definição: A distribuição de probabilidade marginal de X é a função definida para $x_1, x_2, \dots$ tal que

$$p(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } Y = y_2 \text{ ou } \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j).$$

Distribuição de probabilidade marginal

Motivação: Temos (X, Y) , mas podemos estar interessados apenas em X ou Y .

Definição: A distribuição de probabilidade marginal de X é a função definida para $x_1, x_2, \dots$ tal que

$$p(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1 \text{ ou } Y = y_2 \text{ ou } \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j).$$

Nota: Análogo para a distribuição de probabilidade marginal de Y (ou mais variáveis).

Distribuição de probabilidade marginal

Exemplo: Obter as distribuições de probabilidade marginais do exemplo anterior.

Distribuição de probabilidade condicional

Motivação: Se $Y = y_j$, qual é a probabilidade de $X = x_i$?

Distribuição de probabilidade condicional

Motivação: Se $Y = y_j$, qual é a probabilidade de $X = x_i$?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório.

Distribuição de probabilidade condicional

Motivação: Se $Y = y_j$, qual é a probabilidade de $X = x_i$?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório. Sejam $B_1 \subset R_X$ e $B_2 \subset R_Y$, com $P(Y \in B_2) > 0$.

Distribuição de probabilidade condicional

Motivação: Se $Y = y_j$, qual é a probabilidade de $X = x_i$?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório. Sejam $B_1 \subset R_X$ e $B_2 \subset R_Y$, com $P(Y \in B_2) > 0$. Definimos a distribuição condicional de X dado $Y \in B_2$ por

Distribuição de probabilidade condicional

Motivação: Se $Y = y_j$, qual é a probabilidade de $X = x_i$?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório. Sejam $B_1 \subset R_X$ e $B_2 \subset R_Y$, com $P(Y \in B_2) > 0$. Definimos a distribuição condicional de X dado $Y \in B_2$ por

$$P(X \in B_1 | Y \in B_2) = \frac{P([X \in B_1] \cap [Y \in B_2])}{P(Y \in B_2)}.$$

Distribuição de probabilidade condicional

Motivação: Se $Y = y_j$, qual é a probabilidade de $X = x_i$?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório. Sejam $B_1 \subset R_X$ e $B_2 \subset R_Y$, com $P(Y \in B_2) > 0$. Definimos a distribuição condicional de X dado $Y \in B_2$ por

$$P(X \in B_1 | Y \in B_2) = \frac{P([X \in B_1] \cap [Y \in B_2])}{P(Y \in B_2)}.$$

Se $P(Y \in B_2) = 0$, definimos $P(X \in B_1 | Y \in B_2) = P(X \in B_1)$.

Teorema da Probabilidade Total

Resultado:

$$P(X \in B) = \sum_y P(X \in B | Y = y) P(Y = y).$$

Teorema da Probabilidade Total

Resultado:

$$P(X \in B) = \sum_y P(X \in B | Y = y)P(Y = y).$$

Demonstração:

Teorema da Probabilidade Total

Resultado:

$$P(X \in B) = \sum_y P(X \in B | Y = y) P(Y = y).$$

Demonstração: Por definição temos

Teorema da Probabilidade Total

Nota: Se $B = (-\infty, x], x \in \mathbb{R}$, obtemos a função distribuição condicional de X dado $Y = y$

Teorema da Probabilidade Total

Exemplo: A tabela representa a função de probabilidade conjunta entre os números de crianças atendidas com alergia (X) e com pneumonia (Y).

$X \ Y$	0	1	2	$P(X = x)$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$
3	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	1

Condicionalando à ocorrência ou não de casos de pneumonia, como se comporta o número de crianças alérgicas?

Teorema da Probabilidade Total

Solução:

Variáveis aleatórias independentes

Motivação: O resultado da v.a. Y influencia o resultado da v.a. X ?

Variáveis aleatórias independentes

Motivação: O resultado da v.a. Y influencia o resultado da v.a. X ?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório. Sejam $B_1 \subset R_X$ e $B_2 \subset R_Y$.

Variáveis aleatórias independentes

Motivação: O resultado da v.a. Y influencia o resultado da v.a. X ?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório. Sejam $B_1 \subset R_X$ e $B_2 \subset R_Y$. Dizemos que X e Y são independentes se, e somente se,

Variáveis aleatórias independentes

Motivação: O resultado da v.a. Y influencia o resultado da v.a. X ?

Definição: Seja (X, Y) um vetor aleatório. Sejam $B_1 \subset R_X$ e $B_2 \subset R_Y$. Dizemos que X e Y são independentes se, e somente se,

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2), \forall B_1, \forall B_2.$$

Variáveis aleatórias independentes

Resultado: Seja (X, Y) um vetor aleatório. X e Y são independentes se, e somente se,

Variáveis aleatórias independentes

Resultado: Seja (X, Y) um vetor aleatório. X e Y são independentes se, e somente se,

$$P(X \in B_1 | Y \in B_2) = P(X \in B_1), \forall B_1, \forall B_2$$

.

Variáveis aleatórias independentes

Resultado: Seja (X, Y) um vetor aleatório. X e Y são independentes se, e somente se,

$$P(X \in B_1 | Y \in B_2) = P(X \in B_1), \forall B_1, \forall B_2$$

.
Demonstração:

Variáveis aleatórias independentes

Continuação:

Variáveis aleatórias independentes

Exemplo: No exemplo anterior as v.a. X e Y são independentes?

Variáveis aleatórias independentes

Exemplo: No exemplo anterior as v.a. X e Y são independentes?

Solução:

Variáveis aleatórias independentes

Exemplo: Sejam X e Y v.a. independentes e identicamente distribuídas (iid), com valores -1 e 1 com mesma probabilidade.

Variáveis aleatórias independentes

Exemplo: Sejam X e Y v.a. independentes e identicamente distribuídas (iid), com valores -1 e 1 com mesma probabilidade. Verifique se X e $Z = XY$ são independentes.

Variáveis aleatórias independentes

Exemplo: Sejam X e Y v.a. independentes e identicamente distribuídas (iid), com valores -1 e 1 com mesma probabilidade. Verifique se X e $Z = XY$ são independentes.

Solução:

Variáveis aleatórias independentes