

Probabilidade I – SME0800

Parte 3: Probabilidade

Juliana Cobre

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC

Universidade de São Paulo - USP



Alguns conceitos

Fenômeno aleatório:

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Exemplo: número de carros que passam em certo local num dia.

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Exemplo: número de carros que passam em certo local num dia.

Espaço amostral:

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Exemplo: número de carros que passam em certo local num dia.

Espaço amostral: Conjunto de todos os resultados possíveis de certo fenômeno aleatório.

Notação: Ω .

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Exemplo: número de carros que passam em certo local num dia.

Espaço amostral: Conjunto de todos os resultados possíveis de certo fenômeno aleatório.

Notação: Ω .

Exemplo: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Exemplo: número de carros que passam em certo local num dia.

Espaço amostral: Conjunto de todos os resultados possíveis de certo fenômeno aleatório.

Notação: Ω .

Exemplo: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Eventos:

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Exemplo: número de carros que passam em certo local num dia.

Espaço amostral: Conjunto de todos os resultados possíveis de certo fenômeno aleatório.

Notação: Ω .

Exemplo: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Eventos: Subconjuntos de Ω . Notação: letras maiúsculas e o conjunto vazio é denotado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Alguns conceitos

Fenômeno aleatório: Acontecimento cujos resultados não podem ser previstos.

Exemplo: número de carros que passam em certo local num dia.

Espaço amostral: Conjunto de todos os resultados possíveis de certo fenômeno aleatório.

Notação: Ω .

Exemplo: $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Eventos: Subconjuntos de Ω . Notação: letras maiúsculas e o conjunto vazio é denotado por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$.

Alguns conceitos

Nota: Para o mesmo fenômeno aleatório podemos associar vários espaços amostrais, dependendo do interesse do estudo.

Alguns conceitos

Nota: Para o mesmo fenômeno aleatório podemos associar vários espaços amostrais, dependendo do interesse do estudo.

Exemplo: Uma rede de computadores está em operação contínua, mas pode sofrer defeito a qualquer momento.

Alguns conceitos

Nota: Para o mesmo fenômeno aleatório podemos associar vários espaços amostrais, dependendo do interesse do estudo.

Exemplo: Uma rede de computadores está em operação contínua, mas pode sofrer defeito a qualquer momento.

- ▶ Se estivermos interessados no número de falhas diárias temos como espaço amostral

Alguns conceitos

Nota: Para o mesmo fenômeno aleatório podemos associar vários espaços amostrais, dependendo do interesse do estudo.

Exemplo: Uma rede de computadores está em operação contínua, mas pode sofrer defeito a qualquer momento.

- ▶ Se estivermos interessados no número de falhas diárias temos como espaço amostral
- ▶ Se o interesse é observar a hora do dia em que ocorre falha, o espaço amostral é

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B :

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B :

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos:

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos: Quando $A \cap B = \emptyset$.

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos: Quando $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo: $A \cap \{5, 7\} = \emptyset$.

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos: Quando $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo: $A \cap \{5, 7\} = \emptyset$.

Eventos complementares:

Notação: A^c .

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos: Quando $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo: $A \cap \{5, 7\} = \emptyset$.

Eventos complementares: Se a união é o espaço amostral e sua interseção é vazia

Notação: A^c .

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos: Quando $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo: $A \cap \{5, 7\} = \emptyset$.

Eventos complementares: Se a união é o espaço amostral e sua interseção é vazia, ou seja, $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$. Notação: A^c .

Alguns conceitos

União de dois eventos A e B : Ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B . Notação: $A \cup B$.

Exemplo: $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Interseção do evento A com o B : Ocorrência simultânea dos eventos A e B . Notação: $A \cap B$.

Exemplo: $A \cap B = \{2\}$.

Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos: Quando $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo: $A \cap \{5, 7\} = \emptyset$.

Eventos complementares: Se a união é o espaço amostral e sua interseção é vazia, ou seja, $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^c = \emptyset$. Notação: A^c .

Exemplo: $A^c = \{3, 4, 5, \dots\}$.

Alguns conceitos

Diferença do evento A com o B :

Alguns conceitos

Diferença do evento A com o B : Todos os elementos de A , exceto os que também estejam em B . Notação: $A - B$ ou $A \cap B^c$.

Alguns conceitos

Diferença do evento A com o B : Todos os elementos de A , exceto os que também estejam em B . Notação: $A - B$ ou $A \cap B^c$.

Exemplo: $A \cap B^c = \{0, 1\}$.

Alguns conceitos

Diferença do evento A com o B : Todos os elementos de A , exceto os que também estejam em B . Notação: $A - B$ ou $A \cap B^c$.

Exemplo: $A \cap B^c = \{0, 1\}$.

Partição de Ω :

Alguns conceitos

Diferença do evento A com o B : Todos os elementos de A , exceto os que também estejam em B . Notação: $A - B$ ou $A \cap B^c$.

Exemplo: $A \cap B^c = \{0, 1\}$.

Partição de Ω : $B_1, B_2, \dots, B_k$ formam uma partição de Ω se são disjuntos e se sua união é Ω , ou seja,

Alguns conceitos

Diferença do evento A com o B : Todos os elementos de A , exceto os que também estejam em B . Notação: $A - B$ ou $A \cap B^c$.

Exemplo: $A \cap B^c = \{0, 1\}$.

Partição de Ω : $B_1, B_2, \dots, B_k$ formam uma partição de Ω se são disjuntos e se sua união é Ω , ou seja,

$$\bigcup_{i=1}^k B_i = \Omega, \text{ sendo } B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j.$$

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento.

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$.

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função $P(\cdot)$, definida nos subconjuntos de Ω (eventos),

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função $P(\cdot)$, definida nos subconjuntos de Ω (eventos), e com valores em $[0, 1]$,

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função $P(\cdot)$, definida nos subconjuntos de Ω (eventos), e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz as condições (Axiomas de Kolmogorov):

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função $P(\cdot)$, definida nos subconjuntos de Ω (eventos), e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz as condições (Axiomas de Kolmogorov):

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega;$

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função $P(\cdot)$, definida nos subconjuntos de Ω (eventos), e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz as condições (Axiomas de Kolmogorov):

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;

Definição: Seja $\mathcal{E}$ um experimento. Seja Ω um espaço amostral associado a $\mathcal{E}$. Uma função $P(\cdot)$, definida nos subconjuntos de Ω (eventos), e com valores em $[0, 1]$, é uma probabilidade se satisfaz as condições (Axiomas de Kolmogorov):

- (i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$;
- (iii) $P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$, com A_j dois a dois disjuntos.

Nota 1: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω .

Nota 1: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω . Então $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominado **espaço de probabilidade**.

Nota 1: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω . Então $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominado **espaço de probabilidade**.

Nota 2: Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados

Nota 1: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω . Então $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominado **espaço de probabilidade**.

Nota 2: Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados **eventos**

Nota 1: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω . Então $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominado **espaço de probabilidade**.

Nota 2: Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados **eventos** e é somente a eles que se atribui probabilidade.

Probabilidade

Nota 1: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω . Então $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominado **espaço de probabilidade**.

Nota 2: Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados **eventos** e é somente a eles que se atribui probabilidade.

Nota 3: Neste curso vamos aprender algumas formas de obter uma função de probabilidade associada a um espaço amostral.

Probabilidade

Nota 1: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω . Então $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominado **espaço de probabilidade**.

Nota 2: Os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados **eventos** e é somente a eles que se atribui probabilidade.

Nota 3: Neste curso vamos aprender algumas formas de obter uma função de probabilidade associada a um espaço amostral.

Nota 4: Neste curso vamos considerar que a classe de subconjuntos $\mathcal{F}$ pode ser uma álgebra ou uma σ -álgebra.

Álgebra e σ -álgebra

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se satisfizer (i) a (iii) dados por

Álgebra e σ -álgebra

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se satisfizer (i) a (iii) dados por

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

Álgebra e σ -álgebra

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se satisfizer (i) a (iii) dados por

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;

Álgebra e σ -álgebra

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se satisfizer (i) a (iii) dados por

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
- (iii) $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Álgebra e σ -álgebra

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se satisfizer (i) a (iii) dados por

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
- (iii) $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **σ -álgebra** se satisfizer (i) a (ii) da definição acima e (iii') dado por

Álgebra e σ -álgebra

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se satisfizer (i) a (iii) dados por

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
- (iii) $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **σ -álgebra** se satisfizer (i) a (ii) da definição acima e (iii') dado por

- (iii') Se $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \dots$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

Álgebra e σ -álgebra

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **álgebra** se satisfizer (i) a (iii) dados por

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
- (iii) $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Definição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de subconjuntos de Ω , um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **σ -álgebra** se satisfizer (i) a (ii) da definição acima e (iii') dado por

- (iii') Se $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, 2, \dots$, então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

Nota: Toda σ -álgebra é uma álgebra, mas nem toda álgebra é uma σ -álgebra.

Probabilidade

Exemplo: Considere o lançamento de um dado justo de seis faces como experimento. Quais seriam o espaço amostral, a classe de subconjuntos e uma função de probabilidade associada a este experimento?

Probabilidade

Propriedades

Propriedades

① $P(\emptyset) = 0$

Propriedades

① $P(\emptyset) = 0$

② $P(A) = 1 - P(A^c)$

Propriedades

- ① $P(\emptyset) = 0$
- ② $P(A) = 1 - P(A^c)$
- ③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriedades

- ① $P(\emptyset) = 0$
- ② $P(A) = 1 - P(A^c)$
- ③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ④ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Propriedades

- ① $P(\emptyset) = 0$
- ② $P(A) = 1 - P(A^c)$
- ③ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- ④ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- ⑤ Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

Demonstração 1: Para qualquer evento A podemos escrever

Demonstração 1: Para qualquer evento A podemos escrever $A = A \cup \emptyset$

Demonstração 1: Para qualquer evento A podemos escrever $A = A \cup \emptyset$ e A e $\emptyset$ são mutuamente exclusivos, então

Demonstração 2:

Demonstração 2: Seja $\Omega = A \cup A^c$

Demonstração 2: Seja $\Omega = A \cup A^c$ e A e A^c são mutuamente exclusivos, então

Demonstração 3:

.

Demonstração 3: Ideia é escrever $A \cup B$ e B através de dois eventos .

Demonstração 3: Ideia é escrever $A \cup B$ e B através de dois eventos disjuntos.

Demonstração 3:

Demonstração 4:

Demonstração 4: Ideia é escrever $(A \cup B) \cup C$ através de dois eventos

Demonstração 4: Ideia é escrever $(A \cup B) \cup C$ através de dois eventos disjuntos.

Demonstração 4:

Demonstração 5:

.

Demonstração 5: Ideia é decompor B em dois eventos .

Demonstração 5: Ideia é decompor B em dois eventos disjuntos.

Probabilidade condicional

Ideia: A informação do que ocorreu numa etapa pode influenciar as probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Probabilidade condicional

Ideia: A informação do que ocorreu numa etapa pode influenciar as probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Definição: Dados dois eventos A e B , a **probabilidade condicional** de A dado que ocorreu B

Probabilidade condicional

Ideia: A informação do que ocorreu numa etapa pode influenciar as probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Definição: Dados dois eventos A e B , a **probabilidade condicional** de A dado que ocorreu B é representada por $P(A|B)$

Probabilidade condicional

Ideia: A informação do que ocorreu numa etapa pode influenciar as probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Definição: Dados dois eventos A e B , a **probabilidade condicional** de A dado que ocorreu B é representada por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

Probabilidade condicional

Ideia: A informação do que ocorreu numa etapa pode influenciar as probabilidades de ocorrências das etapas sucessivas.

Definição: Dados dois eventos A e B , a **probabilidade condicional** de A dado que ocorreu B é representada por $P(A|B)$ e dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

Se $P(B) = 0$, definimos $P(A|B) = P(A)$.

Probabilidade condicional

Exemplo: Considere o lançamento de um dado justo.

Probabilidade condicional

Exemplo: Considere o lançamento de um dado justo. Calcule a probabilidade de ter saído o número 2 dado que saiu um número par.

Probabilidade condicional

Probabilidade condicional

Nota: Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço reduzido B , ao invés de ser em relação espaço amostral original Ω .

Probabilidade condicional

Nota: Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço reduzido B , ao invés de ser em relação ao espaço amostral original Ω .

Propriedades

Probabilidade condicional

Nota: Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço reduzido B , ao invés de ser em relação ao espaço amostral original Ω .

Propriedades

① $0 \leq P(A|B) \leq 1$

Probabilidade condicional

Nota: Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço reduzido B , ao invés de ser em relação ao espaço amostral original Ω .

Propriedades

- ① $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- ② $P(\Omega|B) = 1$

Probabilidade condicional

Nota: Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço reduzido B , ao invés de ser em relação ao espaço amostral original Ω .

Propriedades

- ① $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- ② $P(\Omega|B) = 1$
- ③ $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Probabilidade condicional

Nota: Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço reduzido B , ao invés de ser em relação ao espaço amostral original Ω .

Propriedades

- ① $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- ② $P(\Omega|B) = 1$
- ③ $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- ④ $P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = P(A)$

Probabilidade condicional

Nota: Sempre que calculamos $P(A|B)$, estamos essencialmente calculando $P(A)$ em relação ao espaço reduzido B , ao invés de ser em relação ao espaço amostral original Ω .

Propriedades

- ① $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- ② $P(\Omega|B) = 1$
- ③ $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- ④ $P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = P(A)$

Exercício: Demonstrar as propriedades acima.

Teorema da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Teorema da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Teorema da multiplicação caso geral

Teorema da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Teorema da multiplicação caso geral

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1, A_2) \dots P(A_k|A_1, \dots, A_{k-1})$$

Teorema da multiplicação

Exemplo: Considere um lote fornecido por 20 peças defeituosas e 80 não defeituosas. Se escolhermos ao acaso duas peças, sem reposição, qual a probabilidade de que ambas as peças sejam defeituosas?

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$,

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$

Alguns casos particulares

- ① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

Alguns casos particulares

- ① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.
- ② Se $A \subset B$,

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$,

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.

③ Se $B \subset A$,

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.

③ Se $B \subset A$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.

③ Se $B \subset A$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)}$

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.

③ Se $B \subset A$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Alguns casos particulares

① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.

② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.

③ Se $B \subset A$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \geq P(A)$.

Alguns casos particulares

- ① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.
- ② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.
- ③ Se $B \subset A$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \geq P(A)$.
- ④ Nenhum desses casos,

Alguns casos particulares

- ① Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A|B) = 0 \leq P(A)$ pois A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.
- ② Se $A \subset B$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, já que $0 < P(B) < 1$.
- ③ Se $B \subset A$, então $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \geq P(A)$.
- ④ Nenhum desses casos, então nada podemos afirmar.

Probabilidade total

Teorema da Probabilidade Total: Seja $B_1, B_2, \dots, B_k$ uma partição do espaço amostral Ω , tal que $P(B_j) > 0, \forall j$. Seja A um conjunto qualquer em Ω . Então

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(A|B_j)P(B_j).$$

Demonstração:

Probabilidade total

Exemplo: Considere aquele lote com 20 peças defeituosas e 80 não defeituosas. Retiro uma peça do lote e ela é defeituosa. Qual a probabilidade de retirar mais uma peça do lote e ela também ser defeituosa?

Probabilidade total

Exemplo: Uma montadora trabalha com 3 fornecedores F_1 , F_2 e F_3 de forma que 20% de certa peça provém de F_1 , 30% de F_2 e 50% de F_3 . Uma inspeção determinou que a porcentagem de peças defeituosas era de 20%, 5% e 2%, respectivamente de F_1 , F_2 e F_3 . Qual a probabilidade de retirarmos uma destas peças e ela ser defeituosa?

Pergunta

Pergunta: E se quisermos saber qual a probabilidade de uma peça com defeito ser proveniente da fábrica I?

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes Seja $B_1, B_2, \dots, B_k$ uma partição do espaço amostral Ω , tal que $P(B_j) > 0, \forall j$. Seja A um conjunto qualquer em Ω . Então

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{j=1}^k P(A|B_j)P(B_j)}, j = 1, \dots, k$$

ou

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}, j = 1, \dots, k.$$

Demonstração:

Teorema de Bayes

Exemplo (continuação): Uma montadora trabalha com 3 fornecedores F_1 , F_2 e F_3 de forma que 20% de certa peça provém de F_1 , 30% de F_2 e 50% de F_3 . Uma inspeção determinou que a porcentagem de peças defeituosas era de 20%, 5% e 2%, respectivamente de F_1 , F_2 e F_3 . Se retirarmos uma peça com defeito, qual a probabilidade que tenha vindo de F_1 ?

Independência

Nota 1: $A \cap B = \emptyset$ eventos mutuamente exclusivos

Independência

Nota 1: $A \cap B = \emptyset$ eventos mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(B|A) = 0$

Independência

Nota 1: $A \cap B = \emptyset$ eventos mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(B|A) = 0$ ($P(A|B) = 0$).

Independência

Nota 1: $A \cap B = \emptyset$ eventos mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(B|A) = 0$ ($P(A|B) = 0$).

Nota 2: $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$.

Independência

Nota 1: $A \cap B = \emptyset$ eventos mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(B|A) = 0$ ($P(A|B) = 0$).

Nota 2: $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$.

Nota 3: Nas situações das Notas 1 e 2, saber que A ocorreu nos dá informação sobre a ocorrência de B .

Independência

Nota 1: $A \cap B = \emptyset$ eventos mutuamente exclusivos $\Rightarrow P(B|A) = 0$ ($P(A|B) = 0$).

Nota 2: $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$.

Nota 3: Nas situações das Notas 1 e 2, saber que A ocorreu nos dá informação sobre a ocorrência de B .

Nota 4: Nem sempre isso acontece.

Independência

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Sejam os eventos

Independência

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Sejam os eventos
A: o primeiro dado mostra um número par.

Independência

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Sejam os eventos

A : o primeiro dado mostra um número par.

B : o segundo dado mostra um 5 ou um 6.

Independência

Exemplo: Um dado equilibrado é lançado duas vezes. Sejam os eventos

A : o primeiro dado mostra um número par.

B : o segundo dado mostra um 5 ou um 6.

Saber que ocorreu B interfere no resultado de A ?

Independência

Definição: A e B são eventos **independentes** se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Independência

Definição: A e B são eventos **independentes** se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definição: A e C são eventos **condicionalmente independentes** se, e somente se,

$$P(A \cap C|B) = P(A|B)P(C|B).$$

Independência

Definição: A e B são eventos **independentes** se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definição: A e C são eventos **condicionalmente independentes** se, e somente se,

$$P(A \cap C|B) = P(A|B)P(C|B).$$

Definição: Os eventos $A_1, A_2, \dots, A_k$ em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ são **independentes** se, para toda coleção de números $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq k$ tivermos

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_n}) = P(A_{j_1})P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_n}).$$

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

1. $A \cap B = \emptyset$, sendo $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

2. $A \cap B \neq \emptyset$, sendo $P(A) > 0$ e/ou $P(B) > 0$.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

Exemplo:

D : a pessoa tem diabetes.

H : a pessoa tem hipertensão.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

Exemplo:

D : a pessoa tem diabetes.

H : a pessoa tem hipertensão.

Sabemos que a diabetes possibilita a hipertensão.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

Exemplo:

D : a pessoa tem diabetes.

H : a pessoa tem hipertensão.

Sabemos que a diabetes possibilita a hipertensão.

Dados do Ministério da Saúde: 22,7% da população tem hipertensão e 5,8% da população tem diabetes.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

Exemplo:

D : a pessoa tem diabetes.

H : a pessoa tem hipertensão.

Sabemos que a diabetes possibilita a hipertensão.

Dados do Ministério da Saúde: 22,7% da população tem hipertensão e 5,8% da população tem diabetes. Metade dos que tem diabetes tem hipertensão.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

Exemplo:

S : a pessoa tem sinusite.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

Exemplo:

S : a pessoa tem sinusite.

U : a pessoa tem unha encravada.

Eventos disjuntos *versus* eventos independentes

Exemplo:

S : a pessoa tem sinusite.

U : a pessoa tem unha encravada.

Podemos considerar as “doenças” biologicamente independentes.

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

1. Resultados igualmente prováveis:

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

1. **Resultados igualmente prováveis:** Se todos os k resultados forem igualmente possíveis, então a probabilidade de acontecer um deles chamado de i , $i = 1, \dots, k$, é

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

1. Resultados igualmente prováveis: Se todos os k resultados forem igualmente possíveis, então a probabilidade de acontecer um deles chamado de i , $i = 1, \dots, k$, é

$$P(i) = \frac{1}{k}.$$

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

1. Resultados igualmente prováveis: Se todos os k resultados forem igualmente possíveis, então a probabilidade de acontecer um deles chamado de i , $i = 1, \dots, k$, é

$$P(i) = \frac{1}{k}.$$

Se A é a reunião de r dos k possíveis resultados, então

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

1. Resultados igualmente prováveis: Se todos os k resultados forem igualmente possíveis, então a probabilidade de acontecer um deles chamado de i , $i = 1, \dots, k$, é

$$P(i) = \frac{1}{k}.$$

Se A é a reunião de r dos k possíveis resultados, então

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

1. Resultados igualmente prováveis: Se todos os k resultados forem igualmente possíveis, então a probabilidade de acontecer um deles chamado de i , $i = 1, \dots, k$, é

$$P(i) = \frac{1}{k}.$$

Se A é a reunião de r dos k possíveis resultados, então

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Exemplo: Considere o exemplo das 20 peças defeituosas e 80 não defeituosas.

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

2. Frequência de ocorrências

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

2. Frequência de ocorrências

Exemplo:

Número de filhos	mães
1	5
2	10
3	3
4	2
Total	20

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

3. Através do comportamento do fenômeno:

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

3. Através do comportamento do fenômeno: Distribuição do fenômeno

Nota: Estudaremos algumas distribuições discretas e contínuas neste curso.

Como atribuir probabilidade aos elementos de Ω ?

3. Através do comportamento do fenômeno: Distribuição do fenômeno

Nota: Estudaremos algumas distribuições discretas e contínuas neste curso.

Para isso: Estudaremos o conceito de variáveis aleatórias na Parte 4.