Da física básica ao Einstein

Como foi o começo de uma nova era da ciência

IFUSP
Instituto de Física da USP

Pedro Antonio

Conteúdo

1 Introdução

Na sociedade atual, vemos que Einstein é uma pessoa mundialmente conhecida, chegando ao ponto do seu nome se tornar sinônimo de inteligência, muitos sabem o que Einstein fazia, sabem que ele foi o físico que criou a Teoria da Relatividade, mas afinal, o que é essa teoria? o que ela nos traz? Qual o significado dela e porque ela é tão importante? Qual a história dela?

Essas são algumas perguntas que buscaremos responder neste texto, porém, sabemos que física normalmente é conhecida no dia-a-dia, para a maioria das pessoas, como algo difícil de ser entendido, sendo assim, partiremos de conceitos básicos e iniciais de física, para o entendimento deste assunto.

Um segundo obstáculo para nossos objetivos é a exigência de certo nível de matemática para melhor compreensão do assunto. A matemática visada aqui será a mais conhecida, isto é, a "matemática básica" que, sumariamente, abarca o conteúdo do ensino médio. Além disso, iremos nos restringir ao conteúdo da física que vai ao encontro do objetivo aqui proposto: compreender a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), que marca o início dos estudos de relatividade de Einstein. Dessa maneira, não serão abordados conteúdos como a Teoria da Relatividade Geral, parte mais aprofundada da TRR.

A primeira pergunta a ser respondida sobre os estudos de Einstein é a inovação que sua pesquisa trouxe para a física. Seu grande diferencial foi elaborar 2 postulados – afirmações que mesmo sem evidências empíricas são adotadas como condição para construir uma teoria – que dizem o seguinte:

- **1º postulado:** As Leis da Física devem ser a mesma em quaisquer referenciais inerciais.
- **2º postulado:** A velocidade da luz tem o mesmo valor quando medida a partir de qualquer referencial inercial.

Para isso, temos que entender alguns conceitos, começando pelo o que aparece em ambos os postulados: *O referencial inercial.* Essa e outras perguntas de caráter mais introdutórios serão respondidas na seção "Conceitos prévios", onde serão comentados desde os conceitos mais simples até os mais avançados de matemática e física. Eles serão considerados a base de nosso estudo. Um outro fator importante diz respeito ao 1º postulado, envolvido em uma questão histórica em que havia um grande questionamento no campo da física sobre um problema da época: *O que está errado? As transformações de Galileo ou as Equações de Maxwell?* Por fim temos a velocidade da luz, fator determinante para a resolução desta questão.

2 Conceitos prévios

Conforme mencionado, para o entendimento do assunto é necessário alguns conceitos prévios, tanto na área da matemática quanto na área da física. Dessa maneira, o critério para a separação dos conceitos foi determinado pela área a que eles pertencem.

2.1 Matemática

Na matemática há alguns conceitos necessários, e estes foram estruturados na ordem cronológica dos estudos da área.

2.1.1 Vetor

Um dos assunto da matemática se refere a parte vetorial, na qual consiste no estudo dos vetores. Outra parte importante é aquela do cálculo, que consiste na continuação dos estudos de funções, iniciados na educação básica. Juntos eles formam o cálculo vetorial, um dos tópicos abordados neste projeto, principalmente no entendimento do eletromagnetismo.

Os vetores em si são uma representação matemática, mas seu melhor entendimento é dado por meio das grandezas vetoriais, vistas principalmente na física. Nesta área temos dois tipos de grandezas:

- **Gradezas escalares**: Seu valor numérico para seu entendimento pleno. Este valor é normalmente conhecido como "módulo" nas grandezas vetoriais. Um exemplo de grandeza escalar é o tempo, por exemplo a sentença: "São 18h" abarca por si toda a informação necessária.

- **Grandezas vetoriais**: Exigem que sejam conhecidos o módulo (o que também pode ser sinônimo de intensidade e de magnitude de um vetor), a direção e o sentido para que seja compreendida. A gravidade, por exemplo, é uma grandeza vetorial, caso específico de aceleração, ela tem um módulo de aproximadamente 9,8 m/s², sua direção é vertical e seu sentido é para baixo ou ao Sul (↓), de forma que ela sempre aponta para o centro da Terra.

2.1.1.1 Versor Dentro do estudo dos vetores existem os versores, normalmente utilizados apenas para representar o direcionamento dentro do cotidiano da matemática. Para entendermos os versores, é interessante dar um passo atrás e falarmos e discutir os vetores.

Quando falamos que $\vec{a} = 3\vec{b}$, significa que o vetor $\vec{a}$ tem a mesma direção e sentido que o vetor $\vec{b}$. Porém o módulo do vetor $\vec{a}$ é o triplo do módulo do vetor $\vec{b}$, por exemplo, se estamos em uma situação em que avistamos 2 carros - com velocidades: $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ - e dissermos que $\vec{v_1} = 3\vec{v_2}$, significa que a velocidade 1 tem a mesma direção e sentido que a velocidade 2. Se eles estão na mesma direção, significa que estão na mesma via, porém um possui o triplo da velocidade do outro. Logo, se um está numa faixa da rodovia com $\vec{v} = 50$ km/h, o outro estará com $\vec{v} = 150$ km/h, pois 50 multiplicado por 3 resulta em 150.

Retornando à ideia de versor, ele é o vetor de referência, de módulo igual a 1, para que o módulo do vetor trabalhado não seja alterado. Por exemplo, há um versor $\hat{e}$, caso eu determine que $\vec{\alpha} = 30\hat{e}$, estou escrevendo que o módulo de $\vec{\alpha}$ é 30 (onde podemos escrever que $\|\vec{\alpha}\| = 30$) e que ele vai na direção e sentido de $\hat{e}$. Por sua vez, se eu determinar que $\vec{\beta} = -\hat{e}$, significa que o módulo de $\vec{\beta}$ é 1 (então podemos escrever que $\|\vec{\beta}\| = 1$) e ele vai na mesma direção que $\hat{e}$, porém irá no sentido contrário. Retornando ao exemplo dos carros, se $\vec{v_1} = -\vec{v_2}$, significa que ambos têm a mesma velocidade em módulo, porém um está indo em direção ao outro. Lembre-se que este é um exemplo didático, eles não necessariamente irão se encontrar pois podem partir de posições distantes e ir em direções diferentes, ou seja, sair da zona leste para o norte enquanto o outro parte da zona oeste para o sul.

Os versores mais comuns são: $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ e $\hat{r}$, onde o $\hat{\imath}$ representa o versor no eixo OX, $\hat{\jmath}$ representa o versor no eixo OY e $\hat{k}$ representa o versor no eixo OZ, sendo esses vetores partindo da origem e indo em direção ao sentido positivo do eixo. Agora o versor $\hat{r}$ representa o versor radial, ou seja, é um versor que representa um raio da esfera, saindo de seu centro e indo em direção a borda da esfera.

2.1.1.2 Produto escalar O produto escalar é um dos tipos de multiplicação de vetores, na qual a sua multiplicação **não** resulta em um vetor, mas sim em um *escalar*, ou seja, apenas o valor numérico de uma grandeza.

O produto escalar pode ser representado da seguinte forma: $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$, onde c é uma grandeza escalar (número).

Para o cálculo do produto escalar entre 2 vetores, considere esses vetores como sendo $\vec{a} = (x, y, z)$ e $\vec{b} = (u, v, w)$, o produto escalar entre eles será dado por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = xu + yv + zw$$

Ou seja, é multiplicado os valores de cada coordenada do vetor $\vec{a}$ com a coordenada corresponde no vetor $\vec{b}$.

2.1.1.3 Produto vetorial O produto vetorial é um dos tipos de multiplicação de vetores, na qual a sua multiplicação resulta em um **vetor**, ou seja, deve ser módulo, direção e sentido no resultado final O produto escalar pode ser representado da seguinte forma: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, onde $\vec{w}$ é uma grandeza vetorial.

Para o cálculo do produto vetorial entre 2 vetores, considere esses vetores como sendo $\vec{\alpha} = (m, n, o)$ e $\vec{\beta} = (p, q, r)$, o produto vetorial entre eles será dado por:

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ m & n & o \\ p & q & r \end{vmatrix} = (nr - oq)\hat{\imath} - (mr - op)\hat{\jmath} + (mq - np)\hat{k}$$

Agora, imagine que $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\gamma}$, temos que $\vec{\gamma}$ tem as suas coordenadas dada pelo cálculo acima, ou seja, se:

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

Então:

$$\vec{\gamma} = (nr - oq)\hat{\imath} - (mr - op)\hat{\jmath} + (mq - np)\hat{k}$$

Conseguimos, assim, achar as coordenadas do vetor $\vec{\gamma}$ a partir dos vetores $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$.

Podemos também achar o módulo (também conhecido como magnitude ou intensidade) do vetor $\vec{\gamma}$, porém esse assunto não será útil para as equações realizadas nessa explicação, mas caso tenha curiosidade, o vetor $\overrightarrow{\gamma}$ poderá ter seu módulo calculado de 2 formas diferentes, são elas:

- **Sabendo previamente as suas coordenadas**

  Seja $\overrightarrow{\gamma} = (a, b, c)$, podemos calcular seu módulo (matematicamente representado por $\|\overrightarrow{\gamma}\|$)pela forma padrão de cálculo de módulo de vetores, ou seja, elevando suas coordenadas ao quadrado e retirando a raíz quadrada da soma, ou seja:

  $$\|\overrightarrow{\gamma}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- **Sabendo os módulos e o ângulo de $\vec{\alpha}$ e $\vec{\beta}$**

  Seja $\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}$, e sabendo os valores dos módulos de α (chamaremos de $\|\overrightarrow{\alpha}\|$) e de β (conhecido por $\|\overrightarrow{\beta}\|$), além de saber o ângulo entres os vetores $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$, na qual chamaremos de θ.

  Temos assim que:

  $$\|\overrightarrow{\gamma}\| = \|\overrightarrow{\alpha}\| \cdot \|\overrightarrow{\beta}\| \cdot sen(\theta)$$

2.1.2 Funções

Esse assunto consiste na ideia de um conceito matemático conhecido como funções, em uma analogia simples, uma função pode ser pensada como um meio de transporte, por exemplo: imagine que você saia da sua casa e vá até o mercado, nesse exemplo podemos perceber 3 coisas: a casa, o mercado e a locomoção.

A casa pode ser uma analogia para o conjunto de domínio, onde na matemática representa o conjunto de números que serão embarcados nessa função.

O mercado, nessa mesma analogia, seria o conjunto conhecido como contra-domínio, onde representa o conjunto de números que chegam vindo do domínio.

E a locomoção é o que conhecemos como função, na qual é o meio de transporte desse trajeto. Trajeto esse que pode ser feito de diferentes maneiras, como por exemplo: a pé, de carro, de moto, de skate, de patins, entre outros, esse trajeto, poderia, até mesmo, ser feito de formas pouco usuais, como por exemplo: de avião, de navio etc.

O que indica a melhor forma de fazer esse trajeto são as circunstâncias dele, como podemos ver que é mais comum pensarmos ir ao mercado de pé, de moto, de carro do que irmos de avião; isso nos traz a ideia de que não é porque algo é possível que é viável.

2.1.2.1 Funções de uma variável Explicado o conceito de função, vamos ao que nos traz a ideia de "função de uma variável", isso significa que estamos com uma função onde há apenas um termo mudando. Continuando do exemplo anterior, imagine que nesse trajeto ao mercado você irá de carro e só, agora imagine que um amigo resolve lhe acompanhar, e depois outro colega também irá. O que mudou nesse exemplo? O número de passageiros que irá ao mercado, e consequentemente mudou também o número de passageiros que chegará neste mesmo mercado; percebe-se também que o restante da história não mudou, não mudou a casa de onde se inicia o trajeto, não mudou o mercado que se destina, e não mudou o meio de transporte da viagem, mudou apenas o número de passageiros. Com isso, podemos ver que mantendo todos os elementos e mudando apenas o número de passageiros na partida, ainda assim mudará o número de passageiros na chegada.

Esse exemplo nos mostra que uma função (meio de transporte) que depende de uma variável (número de passageiros), essa função matematicamente, é representada por $y = f(x)$, a qual y representa o número de pessoas que chegará ao destino, enquanto x representa o número de pessoas que embarcará na viagem, $f(x)$ representará a função (meio de transporte) utilizado.

2.1.2.2 Funções de duas variáveis Continuando no exemplo acima, se inicialmente partisse sozinho de patins ao mercado, e com a chegada de seu amigo terá de deixar o patins em casa para ir de moto, e com a chegada do outro colega você terá de ir de carro. O que aconteceu nesse caso? Mudou o número de passageiros e o veículo utilizado, chegando então a uma função de duas variáveis.

Essa função matematicamente, é representada por $z = f(x, y)$, a qual z representa o número de pessoas que chegará ao destino, enquanto x representa o número de pessoas que embarcará na viagem, y o meio de transporte utilizado e $f(x, y)$ representará a relação entre as variáveis.

2.1.3 Limites

Um dos primeiros conceitos a serem estudados após o estudo das funções é o conceito de limite, o conceito de limite em si não é tão utilizado, porém ele serve de base para os conceitos mais utilizados, que são os conceitos de derivadas e de integrais.

Para começarmos, é necessário entender: *o que é o limite de uma função?* O limite de uma função é uma noção intuitiva do valor da função com base no seu comportamento, o que não necessariamente significa que o resultado do limite é o valor da função.

Podemos entender o limite com o uso de uma sequência, imagine a soma infinita:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...$$

Se fizermos a soma, temos que:

- $1 + \frac{1}{2} = 1,5$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1,75$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1,875$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1,938$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1,969$

Ou seja, podemos concluir que essa soma finita fica cada vez mais próxima de 2, então se acrescentarmos infinitos termos, essa soma resultaria em exatamente 2. De maneira matemática, temos que isso se caracteriza como uma progressão geométrica, na qual calculamos o que é normalmente conhecido como: "soma infinita", porém o nome mais correto, matematicamente, seria "limite da soma", afinal, não é possível ter uma soma de infinitos termos, apenas a intuição por meio desse comportamento.

Sendo assim demonstrado a noção intuitiva de limites por meio de uma soma numérica, vamos aplicar essa ideia no estudo das funções, onde temos a seguinte notação:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

E isso significa que estamos calculando um limite (notado por lim), conforme x se aproxima de a (na qual chamamos de $x \to a$), de uma expressão algébrica f(x) (simbolizado apenas por $f(x)$) que tem como resultado o valor L.

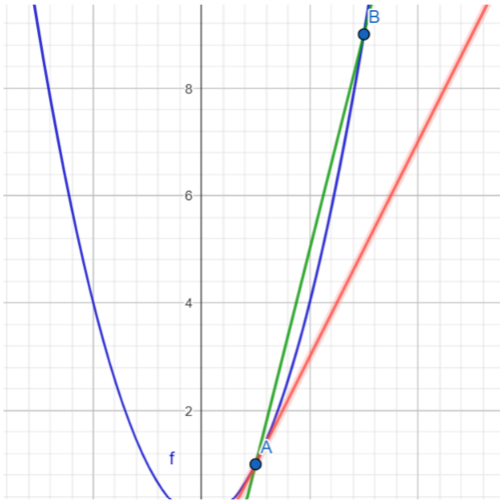
2.1.3.1 O limite e a reta tangente Podemos aplicar esse conceito de limite nos gráficos de funções; imagine que seja necessário calcular uma reta tangente a uma função, mas, pensando assim, *qual seria a necessidade de realizar esse cálculo?*

Imagine haja uma função muito complicada de ser trabalhada, mas o seu objetivo é analisar o comportamento de uma função em um ponto específico, na qual chamaremos de "a", ou mais precisamente de "x = a", com isso podemos fazer uma simplificação do trabalho e usar a reta tangente da função naquele ponto, ou seja, ao invés de ser trabalhada a função complicada, será trabalhada a função de forma mais simples: *a reta*.

Sendo assim, é necessário saber como calcular essa reta. Sabemos pela geometria que para desenhar uma reta é necessário dois pontos, ou um ponto e sua inclinação com a horizontal, na qual, se fôssemos desenhar fisicamente essa reta, usariamos um ponto e um transferidor para o segundo ponto dado pelo ângulo requisitado.

Agora, quando não se tem o transferidor, usamos o coeficiente angular, na qual podemos imaginar pelo nome, é o valor que trará o ângulo da reta. Lembrando que uma reta tem a sua forma de equação reduzida da por: $y = mx + n$, onde o termo que multiplica o “x”, nesse caso o “m”, é o coeficiente angular comentado, enquanto o outro termo, o “n”, conhecido como *termo independente*, visto que não realiza o processo de multiplicação com a variável “x”, é conhecido na reta por *coeficiente linear*, na qual dirá o valor em que a reta passa no eixo OY.

Sendo assim, podemos ver um exemplo didático dessa situação pela imagem a seguir:



Com isso, temos 3 funções em questão e 3 pontos no gráfico que serão explicadas no decorrer desse texto.

Podemos partir inicialmente da nossa função complicada de ser trabalhada, no caso a chamaremos de uma função $f(x)$, e queremos analisar o comportamento dessa função no ponto A e seus arredores. Fazendo-se assim o uso da reta tangente para a aproximação necessária para simplificar o meio de se atingir o objetivo, ou seja, como podemos observar pelo gráfico, a reta tangente e a função são muito parecidas no entorno do ponto analisado, podendo assim ser feita a troca de análise da função para a reta tangente.

Para isso há de ser necessário o coeficiente angular dessa reta tangente, porém isso não é possível de imediato, afinal o coeficiente angular está relacionado a inclinação da reta, qual sua forma matemática é dado pela seguinte equação:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

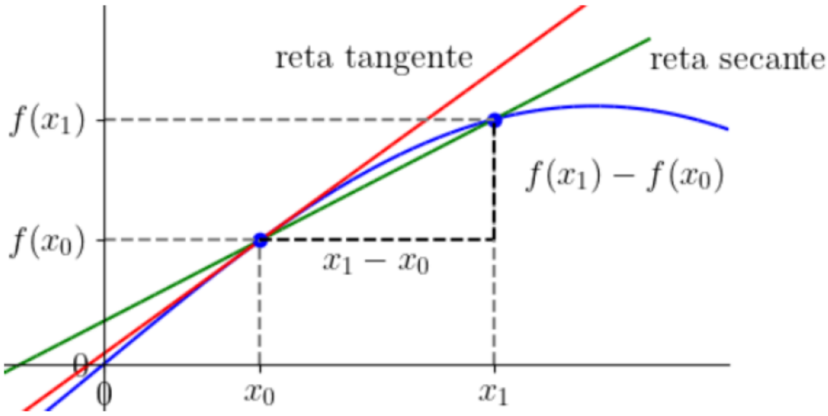
Onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são coordenadas de dois pontos desta reta, caso tenhamos apenas um ponto, temos que essa expressão pode ser trabalhada da seguinte forma:

$$a = \frac{y - y_p}{x - x_p} \Rightarrow y - y_p = a(x - x_p)$$

Na qual chegamos em uma forma de equação da reta, porém há de ser necessário um ponto dado por (x_p, y_p), e que no caso será o ponto analisado, e seu coeficiente angular (que continua sendo um problema a ser resolvido).

Para resolver este problema, utilizaremos uma reta que nos auxiliará nessa questão, no caso uma reta secante a função, ou seja, uma reta que passe por dois pontos desta função $f(x)$. Um destes pontos é o ponto a ser analisado, chamando suas coordenadas de $A = (x_0, y_0)$, enquanto o outro ponto estará a uma distância horizontal h, e terá suas coordenadas denotadas por $B = (x_1, y_1)$ de maneira que: $x_1 = x_0 + h$.

Sendo assim, podemos ter o seguinte gráfico:



Onde o ponto A recebe a passagem da função, da reta tangente e da reta secante, enquanto o ponto B, recebe a passagem da função e da reta secante.

Agora podemos nomear as equações das retas da seguinte forma:

- Reta secante: $y = mx + n$
- Reta tangente: $y = ax + b$

Como no caso da reta secante conseguimos obter dois pontos (A e B), podemos dizer que seu coeficiente angular pode ser dado pela equação abaixo:

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Pensando nisso, e analisando o gráfico, se fizermos com que o ponto B se aproxime do ponto A teremos que a reta secante ficará mais próxima da reta tangente, consequentemente o valor do coeficiente angular da reta secante ficará mais próximo da reta tangente.

Fizemos assim, uma noção intuitiva, onde se insere o conceito de limite, de maneira que se o ponto B se aproxima do ponto A, então m se aproxima de a.

Para representarmos isso matematicamente, sabendo que $x_1 = x_0 + h$, ou seja, $h = x_1 - x_0$, e como queremos que um ponto se aproxime do outro, dizemos que a diferença entre eles vai diminuir, se aproximando de zero, e ja visto que a diferença entre eles é o valor "h", podemos dizer que queremos o limite com "h" se aproximando de zero.

Agora já sabemos que queremos o limite, já sabemos que será o "h" que estará tendendo a zero, mas nos faltar inserir o "h" na expressão que será calculada o limite, ou seja, teremos que reescrever a equação do coeficiente angular "m" com o uso do "h", sendo assim temos:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Calcularemos assim o seguinte limite:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

Caso generalizarmos este ponto A, e ao invés de escrever ele usando $A = (x_0, y_0)$, podemos escrevê-lo como $A = (x, y)$, ou até $A = (x, f(x))$, na qual utilizariamos um termo genérico para o ponto, afinal, agora só estamos trabalhando com um único ponto que pode ter qualquer coordenada. Sendo assim, teríamos o limite reescrito da seguinte forma:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

E assim calculamos o valor do coeficiente angular da reta tangente a função $f(x)$ em ponto genérico (x, y).

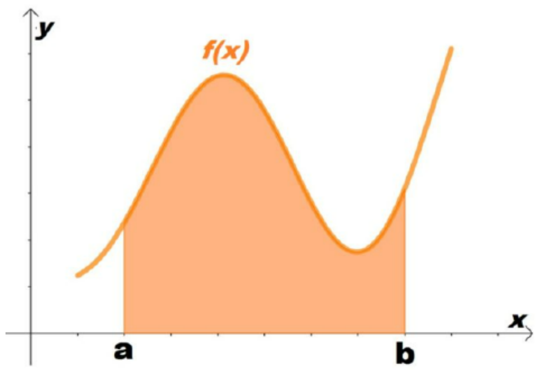
E esse coeficiente angular da reta tangente é a definição do conceito de derivada, na qual será explicado melhor posteriormente, seja a $\frac{df}{dx}$ a notação de derivada, podemos afirmar que:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

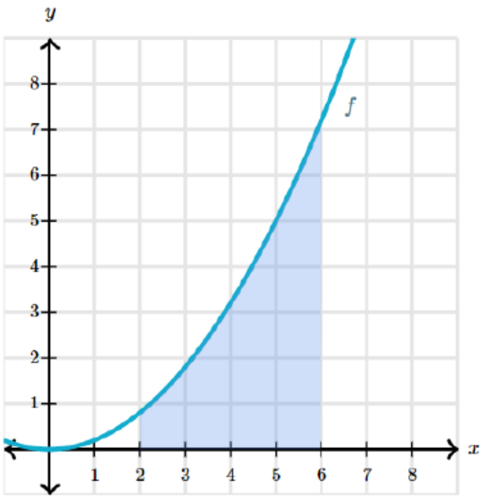
Fica assim definido de forma formal o conceito de derivada.

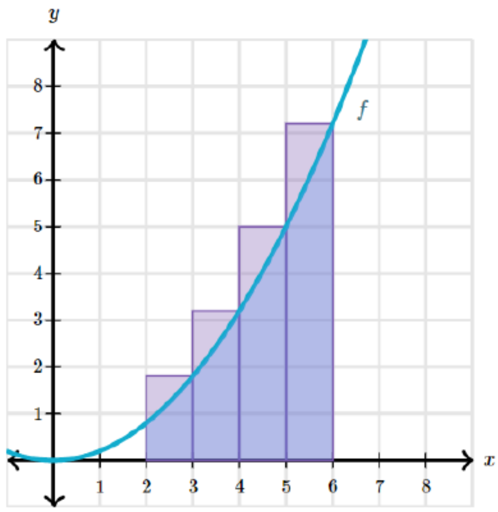
2.1.3.2 O limite e o cálculo de áreas Uma outra aplicação dos limites é no cálculo de áreas, imagine que haja uma função curva, ou mais precisamente uma função que apenas não seja uma reta, e buscamos calcular a área entre a função e o eixo OX, delimitada entre dois pontos, sendo eles "$x = a$" e "$x = b$" na qual $b > a$ (o valor de b é maior que o valor a).

Para exemplificar esse problema, temos a seguinte imagem:

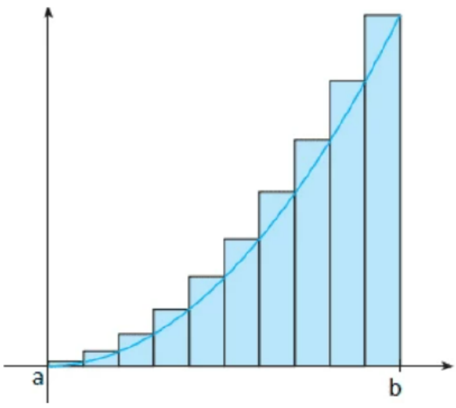


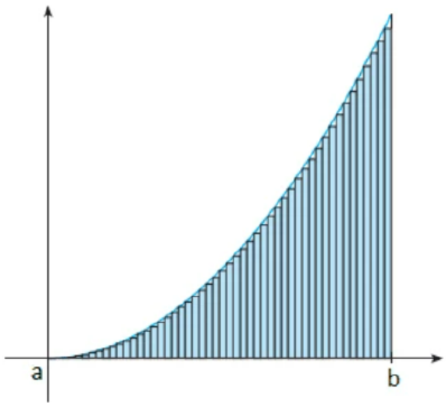
Para fazer o cálculo de uma área que não nos remete a uma figura geométrica conhecida, podemos então dividir esta área em várias figuras conhecidas, neste caso usaremos retângulos, afinal, a sua área pode ser dada pela simples forma: $base \times altura$, para isso, dividiremos a função da seguinte forma:





Na qual temos uma figura que representa a forma que queremos calcular e uma outra figura que trará a divisão desta mesma área em retângulos. Porém, podemos perceber que os retângulos possuem uma área maior (se somada às áreas de todos os retângulos) do que a área necessária; mas isso poderá ser resolvido caso seja acrescentado mais retângulos, ou seja, se dividirmos a área em mais retângulos, como podemos ver nas figuras abaixo:





Sendo assim, vimos que quanto maior o número de retângulos, mais precisa será a minha área, chamaremos então o número de retângulos de “n”.

Agora que foi feita esta análise sobre a influência da quantidade de retângulos no cálculo da área, vamos então ao cálculo da área dos retângulos.

A área de um retângulo pode ser dada pela fórmula *área = base x altura*, e neste caso, a base será um Δx, que pode ser dado pela seguinte equação:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

E a altura será feita com o uso de um ponto x_i, sendo i um índice que indica sobre qual retângulo estamos nos referenciando, ou seja, $i=1$, será o 1º retângulo, $i=2$, o 2º retângulo, até $i=n$, onde teremos o último retângulo, com isso o x_i será um ponto da base do retângulo i;

e assim cada retângulo tem um x_i e a sua altura será um $f(x_i)$, com isso podemos dizer que a área de um retângulo pode ser dada por:

$$A = f(x_i) \cdot \Delta x$$

Como temos um certo número de retângulos, temos que somar todas elas, de forma que teremos a seguinte equação:

$$A = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Onde podemos reduzir essa expressão para a notação de somatório da seguinte forma:

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Essa notação nos diz que inicia em $i = 1$ e vai até o $i = n$, mas não se preocupe muito em entender esse conceito de somatório, pense apenas na forma reduzida de escrever a equação anterior.

Retornando a expressão e o conceito da área, sabemos que quanto maior o número de retângulos, mais precisa fica minha área, então utilizaremos o conceito de limite para expressar que o limite de que o número de retângulos sejas infinito, nos trará o resultado exato da área que temos como objetivo. E assim podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

E isso nos traz a definição de integral, na qual podemos escrever essa área por meio de integral e sua definição, ou seja:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

E assim podemos chegar a seguinte igualdade (onde a maior mudança se refere ao Δx se tornar um diferencial de x, ou seja, um dx, mas isso será explicado melhor posteriormente):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Fica assim definido de forma formal o conceito de integral.

2.1.4 Derivada

O conceito de derivada que iremos adotar é a visão física do assunto, onde poderá ser explicado melhor na parte de aplicações. Na matemática, existem diversos tipos de funções, mas nem todas podem ser afetadas por esse conceito, ou seja, nem todas as funções são derivadas, para as funções serem derivadas elas devem ser contínuas, o que podemos entender da seguinte forma: se desenharmos essa função usando papel e caneta, a caneta desliza suavemente pelo papel, sem tirar a caneta do papel e sem fazer alguma mudança de direção de forma brusca, o que poderia gerar um "bico"; podemos pensar em função derivável como uma viagem em uma rodovia, onde todas as curvas (se houverem) serão as chamadas "curvas abertas" onde não virará muito o volante do veículo, ao contrário das curvas fechadas realizadas em cruzamentos da parte mais povoada da cidade, como a entradas em ruas e avenidas.

Retornando ao conceito da derivada, o seu uso durante as explicações será mais relacionado à ideia de "fluxões de função", na qual uma função é gerada e denominada de "função derivada" a partir de outra função, conhecida como "função primitiva". Na qual consiste no uso da derivada como taxa de variação, na qual uma função é gerada pela taxa de variação da função primitiva, ou seja, a função derivada será uma outra função que dirá como se comporta a taxa de variação da função inicial, pode parecer confuso de início, mas isso será melhor explicado e exemplificado quando falarmos do seu uso na física.

2.1.4.1 Notação A derivada como conhecemos hoje aparece normalmente como:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

Onde todas essas formas representam a mesma ideia, a derivada da função f com relação a x, ou seja, o quanto a função f mudou em relação a x. Caso tenhamos uma função que mude com o tempo, ou seja, uma $f(t)$, temos que sua derivada em relação ao tempo, ou seja $\frac{df}{dt}$, também denominada como derivada temporal, poderá ser escrita como:$\dot{f}$.

Podemos também repetir o processo de derivação, ou seja, se partimos de uma função primitiva $f(x)$, derivando ela chegaremos uma função derivada $g(x)$, ou seja, $g(x) = \frac{df}{dx}$. Agora, se adotarmos o mesmo processo, porém tomando $g(x)$ como a função primitiva, a função derivada dela será a função $h(x)$, ou seja, $h(x) = \frac{dg}{dx}$. Podemos assim, analisar a função $h(x)$ em relação a $f(x)$, onde teremos que:

$$h(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

Dizemos então que $h(x)$ é a segunda derivada de $f(x)$.

2.1.4.2 Derivada parcial Para vermos a taxa de variação de uma função de mais de uma variável, mudamos a letra "d" pela letra grega "∂" ; imaginando que tenhamos uma função dada por $f(x, y)$, podemos escrever a derivada de $f(x, y)$ em relação a x como sendo:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Sendo essa última forma uma contração mais usual da forma da esquerda.

Para analisarmos a segunda derivada da função $f(x, y)$ podemos deriva-la, inicialmente, em relação a x, onde temos $\frac{\partial f}{\partial x}$, e após isso, podemos deriva-la novamente em relação a x, chegando na segunda derivada:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Ou podemos fazer a segunda em derivada em relação a y, chegando assim em:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

O que fica conhecido como derivada mista da função $f(x,y)$.

2.1.5 Integral

O conceito de integral vem do processo conhecido como "anti-derivada" na qual consiste em partir de uma função derivada e chegar na sua função primitiva. Ao contrário do que fizemos na parte de derivadas, na parte de integral contaremos também com sua interpretação matemática, na qual pode ser dada por área ou volume, e a sua notação de integral de uma função $f(x)$ em relação a x pode ser dada por:

$$\int f(x)dx$$

Temos assim que:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \leftrightarrow f = \int f'(x)dx$$

Porém essa expressão não está correta matematicamente, há pequenos detalhes que impedem essa relação dessa forma, mas essa simplificação já é útil o suficiente para entendermos toda a discussão que queremos fazer sobre o assunto.

A explicação matemática disso, refere-se ao fato de funções primitivas distintas de um termo independente possuem derivadas iguais, mas a sua derivada não resultará em uma das funções, mas sim em uma função mais ampla na qual não é possível determinar o termo independente da sua função primitiva. Por exemplo: as funções:

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad e \qquad g(x) = x^2 + 3$$

São funções iguais (com exceção de seus termos independentes) que possuem a mesma derivada:

$$h(x) = 2x$$

Ou seja,

$$h(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} = 2x$$

Mas isso nos traz um leve erro pela nossa interpretação de:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \leftrightarrow f = \int f'(x)dx$$

Pois resultaria em:

$$f = g = \int h(x)dx$$

O que nos resulta em uma sentença falsa, visto que:

$$f(x) \neq g(x)$$

Para resolver esse problema, foi necessário pensar em termos de uma certa área, quando estamos realizando esse processo, temos que a integral trabalhada é conhecida como uma integral indefinida, para representar isso, temos uma função qualquer $p(x)$ na qual:

$$\int p(x)dx = P(x) + c$$

Esse “$+c$” é importante para generalizarmos a função que foi derivada, ou seja, como no processo de derivada o termo independente (simbolizado pela letra “c") se torna nulo, então não há como saber qual foi especificamente a função primitiva, chegamos assim ao conceito de *família de funções* de maneiras que podemos exemplificar da seguinte forma:

Sejam as funções:

$$\alpha(x) = x^2 + 1 \Longrightarrow \frac{d\alpha}{dx} = 2x$$

$$\beta(x) = x^2 \Longrightarrow \frac{d\beta}{dx} = 2x$$

$$\gamma(x) = x^2 - 9 \Longrightarrow \frac{d\gamma}{dx} = 2x$$

Temos assim que $\alpha(x)$, $\beta(x)$ e $\gamma(x)$ possuem a mesma derivada, percebemos que assim que toda função do tipo: $x^2 + c$, onde c representa um número real, tem sua derivada igual, independente do valor de c, com isso dizemos que as funções α, β e γ são de uma mesma *família*.

Agora pensando na ideia de que se partirmos da integral dada por: $\int 2xdx$, não conseguimos chegar precisamente em x^2, x^2+1 ou x^2-9, com isso há de ser necessário a generalização por meio da constante c, sendo assim temos que:

$$\int 2xdx = x^2 + c$$

Dito isso, podemos deixar de analisar a integral como “*anti-derivada*” e pensar na sua interpretação como área, sendo assim temos que as funções representam o mesmo gráfico, mudando apenas a sua posição vertical, então se desenharmos 2 figuras idênticas em locais diferentes elas terão a mesma área. Sendo assim uma área de função qualquer, chamada de $m(x)$, em que a área calculada parte do ponto “$x = a$” e vai até um ponto “$x = b$” temos o que conhecemos como integral definida, e é representada por:

$$\int_a^b m(x)dx$$

Aplicando essa ideia nas integrais comentadas anteriormente, como as funções são da mesma família, então elas possuem a mesma área, logo podemos representar que:

$$\int_a^b h(x)dx = f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$$

E essa expressão ficou conhecida como *Teorema Fundamental do Cálculo.*

2.1.5.1 Integral de linha A integral de linha é um dos tipos de integrais que conhecemos, ela se caracteriza pelo fato de que a integral deixa de ser sobre um intervalo numérico do tipo $[a, b]$ e passa ser sobre uma curva, linha ou caminho, normalmente chamado de C.

Essa integral é conhecida como integral de linha de um campo vetorial, sendo assim, é necessário dizer: *O que é um campo vetorial?*

Para responder essa pergunta, é necessário ver que normalmente trabalhamos com 2 tipos de campos e dizer o que é campo:

- **Campo**: É uma região do espaço, na qual sofrerá influência de algo, por exemplo: Um campo magnético é uma região do espaço que sofrerá influência magnética.

- **Campos escalares**: Cada ponto do espaço terá um **valor escalar** associado a ele.

- **Campos vetoriais**: Cada ponto do espaço terá um **vetor** associado a ele.

Para entendermos melhor esse assunto, pense em uma rodovia na qual vários veículos trafegam por ela, se pegarmos as *massas* de cada veículo teremos um *campo escalar*, afinal, a massa é uma grandeza escalar. Agora se pegarmos as *velocidades* de cada veículo, teremos um *campo vetorial.*

Retornando a integral de linha, temos que a sua interpretação mais comum é a sua interpretação como *trabalho*, uma grandeza na física que também é conhecida como *trabalho de uma força*, na qual se refere ao cálculo de energia feita por uma certa força.

O trabalho pode ser visto de maneira mais simples por meio de um exemplo: Imagine alguém puxando algum objeto, pode ser um menino puxando um carrinho de brinquedo, ou um senhor puxando um carrinho de feira; nestas situações temos o uso de uma *força* $(\vec{f})$, que realiza o ato de puxar, e também uma *distância* $(\vec{d})$ na qual esse objeto foi puxado. Essas grandezas são expressas na forma vetorial, afinal a força e distância tem um sentido, além de intensidade e direção.

Com isso, podemos calcular a energia gasta nesse processo por meio do produto escalar entre estes vetores, afinal, o trabalho é uma grandeza relacionada a energia, e energia é uma grandeza escalar, então o produto de vetores que resulta em escalar é o produto escalar. Sendo assim, podemos escrever o trabalho (W) da seguinte forma:

$$W = \vec{f} \cdot \vec{d}$$

Agora se esse deslocamento não for um deslocamento retilíneo (uma linha reta), temos o campo vetorial, também podemos ter uma força vetorial em várias direções, e com isso, temos a generalização do trabalho por meio da integral de linha C, o que é representado por:

$$W = \oint_C \vec{f} \cdot \vec{d}$$

2.1.5.2 Integral de superfície A integral de superfície é um dos tipos de integrais que conhecemos, ela se caracteriza pelo fato de que a integral deixa de ser sobre um intervalo numérico do tipo $[a,b]$ ou uma curva, nessa etapa a integral poderá ser útil para o cálculo de áreas (medida de espaço na forma bidimensional) e coisas relacionadas a elas. Vamos começar com o cálculo de área, quando tínhamos um gráfico nos eixos X e Y, utilizamos a integral para o cálculo da sua área, agora iremos expandir essa ideia, nessa etapa a área não será dada apenas limitada verticalmente entre o eixo X e a função e horizontalmente por a e b, agora a área será limitada por $[a,b]$ no eixo X e $[c,d]$ no eixo Y, e a consequência disso é que deixamos de utilizar uma função de uma variável para utilizar uma função de duas variáveis, ou seja, passamos de $y = f(x)$ para $z = f(x,y)$, onde podemos fazer essa transição na forma matemática:

$$\int_a^b f(x)dx \to \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

O que matematicamente significa que:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \to \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Onde podemos fazer primeiro o cálculo da integral na variável Y e depois integrar esse resultado na variável X, sendo esse processo independente da ordem.

Sendo assim, podemos generalizar e simplificar esse processo, onde ao invés de escrever dessa forma, utilizaremos uma área A que é interna ao retângulo $[a,b]x[c,d]$, ou qualquer que seja o formato dessa superfície, e consequentemente o $dxdy$ se tornará um diferencial dessa área (uma parte infinitamente pequena dessa área) com isso podemos generalizar a integral de superificie para a seguinte forma:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \to \iint_A f(x,y)da$$

Por fim, caso essa área seja uma área fechada, podemos escrever essa integral da seguinte forma:

$$\oiint_A f(x,y)dA$$

Esse tipo de integral pode ser útil para o cálculo de densidades superficiais, como por exemplo: Seja a função: $f(x,y)$ que representa a densidade demográfica de um local, ou seja, o número de habitantes por área nesse local, podemos calcular o numero de habitantes desse local com o uso da integral de superfície. E podemos calcular áreas desde que $f(x,y) = 1$

2.1.5.3 Integral de volume

Para o cálculo das integrais de volume será feito de forma análoga ao processo de integrais de superfície, com diferença que a função passará de $z = f(x,y)$ para $m = f(x,y,z)$, e m não será outro eixo, mas sim um outro tipo de função, como por exemplo a densidade de algum corpo, já que a densidade é $\rho = \frac{massa}{volume}$, podemos assim calcular a massa de um corpo fazendo a integral de volume de sua densidade, ou o seu volume se $f(x,y,z) = 1$, onde podemos ver isso matematicamente da seguinte forma:

Volume de um local:

$$\iiint 1 dxdydz$$

Massa de um corpo utilizando a densidade:

$$\iiint \rho(x,y,z) dxdydz$$

Agora podemos trabalhar com os limites da mesma forma que trabalhando na integral de superficie, onde podemos generalizar um volume V de uma certa região fechada, chegando assim a integral de volume da seguinte forma:

$$\oiiint_V f(x,y,z) dV$$

2.1.6 Operador Nabla

O conceito de um operador chamado "nabla" e pode ser representado da seguinte forma:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Nos traz alguns detalhes a ser trabalhados, como a aplicação do conceito de *derivada parcial* que foi explicado anteriormente, temos essa relação dada por meio das 3 coordenadas cartesianas que conhecemos pelos eixos OX, OY e OZ, sendo assim, faremos as derivadas parciais em relação a cada uma; outro detalhe importante é que estamos falando de uma separação por vírgula dentro dos parênteses, onde o 1º espaço corresponde ao valor (ou função) na coordenadas em X (no eixo OX), o 2º espaço vale o mesmo para a coordenada Y, e o 3º e último para a coordenada Z.

Os usos desse operador serão dados pelo o que conhecemos como gradiente, divergente e rotacional, e será melhor explicado abaixo.

2.1.6.1 Gradiente

O gradiente é um uso do operador nabla em funções escalares, conhecido também por: derivada direcional, na qual ele indica uma direção de crescimento ou decrescimento de uma função escalar, por exemplo: imagine que você esteja em local com uma fogueira, conforme você se aproxima você sente o calor da fogueira, e este vai sumindo conforme você irá se distanciando dela; o gradiente da função temperatura indicará essa sensação matematicamente.

O vetor gradiente de uma função f é dado por:

$$\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath},\ \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath},\ \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Um detalhe importante é que por definição, o gradiente é um vetor que terá seu sentido para fora da fogueira, esse detalhe é muito importante para os conceitos de campo elétrico ($\overrightarrow{E}$) e potencial elétrico (V), onde o campo elétrico é dado por:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla V} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath},\ \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath},\ \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Isso se deve ao fato do campo elétrico ter sua direção oposta a do potencial elétrico.

2.1.6.2 Divergente

O divergente de uma função é dado pelo produto escalar do operador nabla por uma função, sendo representado da seguinte forma:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (E_x, E_y, E_z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

E resulta em um escalar, visto que é um produto escalar.

E o rotacional é dado pelo produto vetorial do operador nabla por uma função, sendo representado da seguinte forma:

2.1.6.3 Rotacional

E o rotacional é dado pelo produto vetorial do operador nabla por uma função, sendo representado da seguinte forma:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

E assim finalizamos os conceitos prévios necessários para esse estudo. Para quem interessar: Nestes conceitos prévios de matemática foram utilizados conceitos onde normalmente são aprendidos em disciplinas do ensino médio (na própria matemática) e no ensino superior (álgebra linear e cálculo, onde a depender da instituição pode ser considerados de cálculo 1 ao cálculo 4, porém normalmente são conteúdos de cálculo 1 ao cálculo 3).

2.1.6.4 Laplaciano

Por fim, o laplaciano..................

2.1.7 Teoremas importantes

2.1.7.1 Teorema de Gauss

O teorema de Gauss, também conhecido como teorema da divergência é um teorema bem avançado do ponto de vista matemático, mas extremamente importante para o nosso caso, e ele é escrito da seguinte forma:

$$\oiint_A \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dA} = \oiiint_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}\, dV \tag{1}$$

Então ele relaciona uma integral de superfície a uma integral volumétrica de um divergente.

2.1.7.2 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes, também é um teorema bem avançado do ponto de vista matemático, mas extremamente importante para o nosso caso, e ele é escrito da seguinte forma:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \oiint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \vec{da} \tag{2}$$

Então ele relaciona uma integral de linha a uma integral de superfície de um rotacional.

2.2 Física

2.3 Sistema Internacional de unidades - S.I.

2.3.1 Referencial Inercial

2.3.2 Aplicações de matemática na física

2.3.2.1 velocidade como: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

2.3.2.2 Aceleração como: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

2.3.3 Equações de Maxwell

As equações de maxwell são as equações que nos dizem o funcionamento do eletromagnetismo, equações essas que iremos entenda-las agora, para isso temos que entender que o eletromagnetismo é uma da área física que veio da junção de 2 áreas: eletricidade e magnetismo, vamos assim entender inicialmente a eletricidade.

2.3.3.1 Eletricidade

Para entendermos a eletricidade, é importante separarmos ela em partes, não falaremos sobre toda a área que é bem vasta, sendo assim, vamos nos concentrar apenas no que é necessário para o nosso objetivo: entender a Teoria da Relatividade Restrita.

2.3.3.1.1 Eletricidade Básica

A eletricidade tem como base o elétron, que é um dos componentes dos átomos, mas o que são os átomos? Os átomos é o plural de átomo, sendo essa uma palavra que vem do grego, onde a = não e tomos = divisível, então átomo = não divisível, pois até onde a ciência teria evoluído naquela época, o átomo era a menor parte da matéria (sendo a matéria tudo aquilo que possui massa).

Com o avanço da ciência, foi possível descobrir as divisões do átomo, que são os prótons, nêutrons e elétrons; na qual os prótons e os nêutrons ficam no núcleo do átomo e os elétrons ficam orbitando em volta do núcleo, assim como a Lua faz com a Terra. Os elétrons possuem carga elétrica negativa, enquanto o próton tem carga positiva, mas de mesmo valor, que fica conhecido como carga elementar.

Para o estudo da eletricidade é necessário analisar um corpo (que pode ser uma pessoa, um objeto, um fluido etc) que é constituído por átomos e consequentemente elétrons, com isso há a carga elétrica desse corpo, na qual indica se o corpo tem um número ideal, ou excesso ou até mesmo a falta de elétrons.

Quando o corpo tem o mesmo número de prótons e de elétrons, ele é conhecido como um corpo neutro; agora quando ele tem excesso ou falta de elétrons ele é conhecido como um corpo carregado, e esse corpo carregado pode ser positivamente (quando há falta de elétrons, ou seja o corpo fica com mais prótons - parte positiva - do que elétrons - parte negativa) ou negativamente (quando há excesso de elétrons).

Esses corpos carregados possuem cargas, e seu valor é representado pela letra "q", além disso, eles interagem entre si por meio da uma força, que pode representar a atração ou repulsão desses corpos (na qual os corpos de mesmo sinal - ambos carregados positivamente ou negativamente - se repelem, enquanto os corpos de sinais opostos se atraem - um carregado positivamente e o outro negativamente), essa força é denominada como força elétrica.

Essa força pode ser calculada de acordo com a seguinte fórmula:

$$\overrightarrow{F_e} = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{d^2} \hat{d}$$

Fórmula essa que também é conhecida como Lei de Coulomb, na qual:

- $\overrightarrow{F_e}$: representa a força elétrica,
- k: representa a fração $\frac{1}{4\pi\epsilon}$, onde ϵ representa a permissividade no meio, ou seja, o quanto o local onde as cargas estão influenciará naquela força,
- q_1 e q_2: representam a carga elétrica dos corpos,
- d: representa a distância entre as cargas

Outro efeito de um corpo carregado é que ele gera uma região que outro corpo carregado pode ser influenciado por ele, essa região é denominada campo elétrico. E esse campo pode ser calculado por meio das fórmulas abaixo:

$$E = \frac{K \cdot Q}{d^2} = \frac{K \cdot Q}{r^2} = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon r^2}$$

Na qual as letras representam a mesmas coisas que ditas na parte da força elétrica, as únicas mudanças são: na troca de "q" por "Q_{int}" pois se refere a carga interna (ou também chamada de "englobada") do corpo, e outra mudança é na substituição de "d" por "r", afinal o campo elétrico tem a influência tridimensionalmente ao redor da carga, como se estivesse no centro de uma esfera, sendo assim, esse "r" representaria o raio da esfera, e o campo elétrico teria a mesma intensidade para todas as cargas que estivessem à mesma distância.

Podemos também escrever o campo elétrico na forma vetorial, onde ($\overrightarrow{E}$) é o campo elétrico e ($\hat{r}$) o versor radial; e assim escrevemos o campo elétrico da seguinte forma:

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon r^2} \hat{r}$$

2.3.3.1.2 Lei de Gauss Com isso que foi estudado, podemos perceber ser possível que uma certa área (que pode ser conhecido como uma superfície plana, do ponto de vista matemático, o que significa que não é uma superfície material, pois o material sofreria influência da carga que emite o campo estudado) esteja nesta região, e assim o campo elétrico atravessa essa superfície (na qual chamaremos a área de "A"), o que gera um fluxo elétrico (o que chamaremos de "ϕ"), e a intensidade desse fluxo depende da intensidade do campo elétrico (E), além da área que o campo elétrico atravessa, e o quão inclinada essa área está em relação ao campo elétrico (o que será trabalhado por meio do cosseno, e a inclinação entre a área e o campo será dado pelo ângulo); chegando assim em:

$$\phi = E \cdot A \cdot cos(\theta)$$

Agora podemos pensar na influência dessa carga tridimensionalmente, ou seja, essa carga irá afetar uma área esférica ao seu redor, ou seja, a carga seria o centro de uma esfera, e a área seria a área da própria esfera, sendo assim, temos que: $A = 4\pi r^2$

O ângulo entre a área e o campo é nulo, visto que eles são paralelos (o campo é paralelo ao raio), com isso, o cosseno do ângulo entre eles vai ser 1

Sendo assim, temos que:

$$\phi = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 \cdot 1 = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Chegamos assim que o fluxo também depende da carga e da permissividade no meio. Se expandirmos essa ideia, teremos que:

$$\phi = \oiint_A \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} \tag{3}$$

Percebe-se assim o uso de uma matemática mais avançada, mais precisamente uma matemática vista em Cálculo Diferencial e Integral, especificamente temos uma integral conhecida como Integral de Linha, mas o que isso tudo significa? Fisicamente, temos o mesmo que já foi explicado, agora matematicamente, temos a generalização da equação para diferentes formas e equações para o campo elétrico e a área daquele corpo, que depende da sua forma (geometria). Ou seja, é uma generalização matemática desse conceito físico.

Essa ideia e equação é conhecida como: "Lei de Gauss", e faz parte do conjunto de equações conhecidas como "Equações de Maxwell", e normalmente é escrita da seguinte forma:

$$\oiint_A \vec{E} \cdot \vec{dA} = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Uma outra forma de se escrever essa equação é por meio do que conhecemos pela forma "diferencial", onde essa fórmula acima está na forma integral. Essa mudança de escrita na equação será útil para entendermos melhor um dos motivos pelo qual Einstein estava correto; podemos escrever essa equação na forma diferencial por meio do teorema de Gauss (1), onde faremos da seguinte forma:

Inicialmente podemos escrever Q_{int} por meio de uma densidade volumétrica, da seguinte forma:

$$\rho = \frac{Q_{int}}{V} \rightarrow Q_{int} = \rho \cdot V \rightarrow Q_{int} = \oiiint_V \rho \cdot dV$$

Como o volume pode variar de forma pra forma, isso é resolvido usando a integral volumétrica

$$\oiint_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} \rightarrow \oiiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV$$

$$Q_{int} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \oiiint_V \rho \cdot dV \rightarrow Q_{int} = \oiiint_V \frac{\rho}{\epsilon} dV$$

E assim, chegamos em:

$$\oiint_A \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \frac{Q_{int}}{\epsilon} \rightarrow \oiiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\, dV = \oiiint_V \frac{\rho}{\epsilon} dV$$

Como as integrais são ambas em termos do mesmo volume, então o que está dentro da integral deve ser igual, e assim chegamos a equação abaixo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \tag{4}$$

E assim chegamos a Lei de Gauss na forma diferencial.

2.3.3.2 Magnetismo Agora indo para o lado magnético, temos os ímãs, onde uma das propriedades dos imãs é que eles são composto por 2 partes, denominadas de “polo norte” e “polo sul” e que é impossível separa-los, ou seja, se você dividir um ímã ao meio, tentando separar o polo norte do polo sul, você terá 2 ímãs, cada um com um polo norte e um polo sul, ou seja, terá 2 “polos norte” e 2 “polos sul”.

2.3.3.2.1 Lei de Gauss para o magnetismo Sendo assim, se tentarmos fazer a mesma analogia do conceito de carga elétrica, sendo a carga elétrica a diferença de entre o número de prótons e elétrons, teremos uma “carga magnética”, porém a diferença entre os pólos norte e sul será sempre nula.

Com isso, se aplicarmos a Lei de Gauss, trocando o campo elétrico ($\vec{E}$) pelo campo magnético ($\vec{B}$), chegaremos que:

$$\phi = \oiint_A \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \frac{Q_{int}}{\epsilon}$$

Pois o nosso termo $Q_{int} = 0$, pois se referia a carga magnética, então podemos concluir que: Não há fluxo de campo magnético em uma superfície fechada. Com isso, essa parte é conhecida com “Lei de Gauss para o magnetismo” e matematicamente temos que:

$$\oiint_A \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = 0$$

O que nos corresponde a outra equação que se encontra quando estudamos as equações de Maxwell, e como foi feito na parte elétrica, também chegamos na forma diferencial da parte magnética:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5}$$

E assim chegamos a Lei de Gauss, na parte magnética, na forma diferencial.

2.3.3.3 Eletromagnetismo Até então, só estudamos a eletricidade e o magnetismo, agora iremos estudar ambos os conceitos juntos, historicamente a relação entre eletricidade e magnetismo veio por meio do experimento de Oersted, na qual se aproximou uma bússola (objeto que mede o campo magnético) de um circuito elétrico e percebeu-se uma mudança de direção na bússola.

2.3.3.3.1 Lei de Ámpere Com isso, começou os estudos sobre o eletromagnetismo, e podemos concluir que o campo magnético é perpendicular ao campo elétrico (que está na direção do fio), e essa perpendicularidade entre esses campos se mantém conforme o campo magnético gira entorno do campo elétrico; uma analogia mais fácil para entendermos isso é se pensarmos que se o campo elétrico for simbolizado pelo dedão de uma mão, o campo magnético pode ser simbolizado pelo indicador desta mesma mão, sendo assim, se abrirmos e fecharmos a mão, o ângulo entre os dedos (ou entre os campos) não se alteram, permanecendo sempre iguais a 90°, mas o dedo indicador variou de forma circular em relação ao dedão, que pode ser considerado o centro desse círculo.

Sendo assim, podemos representar esse estudo, matematicamente, pela seguinte equação:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl}$$

Onde $\vec{dl}$ representaria o comprimento dessa trajetória, onde atualmente simplificamos como trajetória circular.

Agora, fisicamente, temos que essa relação nos resulta na corrente elétrica (I), daquele circuito, e que isso também depende da relação entre entre o campo magnético e o meio em que está localizado, na qual chamamos de permeabilidade magnética (μ), finalizando assim com:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu \cdot I$$

2.3.3.3.2 Lei de Ámpere-Maxwell Durante um tempo, a Lei de Ámpere foi bem aceita, até que Maxwell percebeu um problema e propôs a sua solução. O problema no caso era sobre um conceito chamado de “corrente de deslocamento” na qual se dizia que: seja a corrente uma propriedade de algo material, ou seja, a relação entre a variação de carga elétrica (parte material) em um certo intervalo de tempo, como funciona esta Lei de Ámpere em um capacitor, afinal, um capacitor é um equipamento elétrico que tem uma distância entre suas placas, sendo assim, não há como haver essa continuidade da corrente, se cada placa seria como se fosse o fim de uma estrada, e entre as placas houvesse um precipício que impossibilita a passagem das cargas. Como resolver essa questão?

Com esse problema, Maxwell começou a estudar a solução, e percebeu que nessa área, o que fazia a Lei de Ámpere se manter funcionando era justamente a atuação do campo elétrico do capacitor, o que na prática é o mesmo campo elétrico do circuito. Maxwell percebeu que esse problema do capacitor era solucionado pelo campo elétrico, como se o campo elétrico fizesse um "caminho alternativo" para a passagem da corrente, mais precisamente, essa descontinuidade gerava uma diferença de campo elétrico nessa área se for analisado em relação ao tempo, o que matematicamente é representado da seguinte forma: $\frac{d\phi}{dt}$

Matematicamente, isso nos traz a uma derivada, o que significa na taxa de variação desse fluxo de campo elétrico ($d\phi$), em relação a taxa de variação do tempo (dt); e esse conceito é trabalhado por derivada por ser uma pequena taxa de variação, o que conhecemos como uma diferença infinitesimal.

Maxwell percebeu que isso também dependia das constante de permissividade do campo elétrico (ϵ) e permeabilidade do campo magnético (μ); além disso, como não havia corrente dentro de um capacitor, e como não havia essa variação do campo elétrico fora do capacitor, esse termo de correção entraria na equação por meio de uma soma; chegando então na equação que conhecemos hoje como a Lei de Ámpere-Maxwell, e pode ser dada por:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu \cdot I + \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

Ou colocando a permeabilidade, em evidência, temos:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu \left(I + \epsilon \cdot \frac{d\phi}{dt} \right)$$

O que nos corresponde a outra equação que se encontra quando estudamos as equações de Maxwell; mas vamos refinar mais essa equação, com algumas manipulações matemáticas que serão necessárias para o nosso propósito, na qual sairemos da forma integral para a forma diferencial.

Usando a equação (3) podemos substituir o ϕ pela integral envolvendo o campo elétrico, e podemos também utilizar o conceito de densidade de corrente, ou seja, o quanto de corrente elétrica passa em uma certa área, com isso, temos as seguintes equações para a densidade de corrente:

$$\vec{I} = \vec{J} \cdot A \leftrightarrow \vec{I} = \oiint_A \vec{J} \cdot \vec{dA}$$

Sendo assim, podemos substituir e chegar em:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu \left[\oiint_A \vec{J} \cdot \vec{dA} + \epsilon \cdot \frac{d}{dt} \left(\oiint_A \vec{E} \cdot \vec{dA} \right) \right]$$

Unificando as integrais do lado direito, visto que são integrais de superfície, ou seja, são referentes a área, temos assim que:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oiint_A \left(\mu \cdot \vec{J} + \mu \cdot \epsilon \cdot \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \vec{dA}$$

Agora vamos considerar que estamos no vácuo, sendo assim, as constantes μ e ϵ são chamadas de μ_0 e ϵ_0, e considerando que o campo elétrico não seja dependente apenas do tempo, ou seja, ele dependa da posição e do tempo, então sua derivada passa de $\frac{d\vec{E}}{dt}$ para $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, e assim, podemos reescrever essa equação da seguinte forma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oiint_A \left(\mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right) \vec{da}$$

Uma outra forma de se escrever essa equação é por meio do que conhecemos pela forma "diferencial", onde essa fórmula acima está na forma integral. Essa mudança de escrita na equação será útil para entendermos melhor um dos motivos pelo qual Einstein estava correto; podemos escrever essa equação na forma diferencial por meio do teorema de Stokes (2), onde faremos da seguinte forma:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} \rightarrow \oiint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \vec{da}$$

E assim, substituído temos:

$$\oiint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \vec{da} = \oiint_A \left(\mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right) \vec{da}$$

Como as integrais são ambas em termos do mesmo volume, então o que está dentro da integral deve ser igual, e assim chegamos a equação abaixo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{6}$$

E assim chegamos a Lei de Ámpere-Maxwell na forma diferencial.

2.3.3.3.3 Lei de Faraday-Lenz Outra relação que podemos obter do eletromagnetismo é que podemos trocar as posições de campo elétrico e campo magnético do que trabalhamos até agora; até então tínhamos um fio retilíneo e um campo magnético circular ao entorno dele, e como essa corrente elétrica flui, ou seja, tínhamos cargas se movimentando, isso nos dava corrente elétrica e campo magnético. Agora faremos o processo contrário, deixaremos um campo magnético em uma trajetória retilínea e um campo elétrico circular ao redor dele, podemos simbolizar isso enrolando um fio de algum material condutor, de forma que o fio visto de cima seja um círculo e visto de lado ele esteja empilhado e com uma certa altura, com isso, passaremos um imã dentro deste círculo, desde a sua altura máxima até a sua base, esse movimento do ímã gerará um campo elétrico induzido, que foi causado pela variação do campo magnético, ou mais precisamente, pela variação do fluxo magnético.

Isso pode ser expresso, matematicamente, da seguinte maneira, a variação do fluxo magnético se deu no tempo, e como foi feito anteriormente quando falamos de taxa de variação, podemos escrever como: $\frac{d\phi_m}{dt}$, onde ϕ_m representa o fluxo magnético.

Isso nos traz a movimentação do campo elétrico no comprimento do fio, de forma geral, podemos escrever que:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{d\phi_m}{dt}$$

Porém têm-se um detalhe visto por Lenz, na qual ele fala que essa variação do fluxo magnético gera uma força eletromotriz (o que representa o mesmo que uma diferença de potencial, ou também conhecida como voltagem) no fio, e isso gerará uma corrente elétrica no sentido oposto, sendo assim, essa relação só estará certa da seguinte forma:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

E essa então, fica conhecida como a Lei de Faraday-Lenz, o que nos corresponde a outra equação que se encontra quando estudamos as equações de Maxwell; agora vamos refinar mais essa equação, com algumas manipulações matemáticas que serão necessárias para o nosso propósito, na qual sairemos da forma integral para a forma diferencial.

Inicialmente vamos precisar fazer uma substituição, onde colocaremos o fluxo do campo magnético na forma integral dele, assim como foi feito a mudança de Q_{int} para $\oint \rho dV$, e posteriormente vamos fazer a aplicação do teorema de Stokes (2) no lado esquerdo da equação; sendo assim, temos:

$$\phi_m = \vec{B} \cdot \vec{A} \rightarrow \phi_m = \oiint_A \vec{B}\,\vec{dA}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} \rightarrow \oiint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \vec{dA}$$

Com isso, podemos reescrever a Lei de Faraday-Lenz da seguinte forma:

$$\oiint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \vec{dA} = -\frac{d}{dt}\left(\oiint_A \vec{B}\,\vec{dA}\right)$$

$$\oiint_A \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \vec{dA} = \oiint \left(-\frac{d\vec{B}}{dt}\right) \vec{dA}$$

Novamente temos uma igualdade de integrais de superfície, sendo assim, seus integrando devem ser iguais, com isso chegamos na seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Agora vamos lembrar que o campo magnético $\vec{B}$ pode também depender de outras variáveis, podemos chegar em:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7}$$

E assim chegamos na equação da Lei de Faraday-Lenz na forma diferencial.

Com isso, podemos reescrever todas as 4 equações de Maxwell, no vácuo e na forma diferencial, onde temos que:

Lei de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Lei de Gauss para o magnetismo	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Lei de Ámpere-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Lei de Faraday-Lenz	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

E assim finalizamos as equações de Maxwell.

2.3.3.3.4 Ondas eletromagnéticas

2.3.4 Velocidade da luz

O ponto fundamental e inicial para o desenvolvimento da TRR foi a velocidade da luz, onde houve uma discussão a respeito de seu valor quando a luz está em um meio, onde acreditava que no espaço esse meio era o éter, mas essa discussão será melhor estruturada quando falarmos do 2º postulado, sendo assim, nessa parte nos concentraremos no valor da velocidade da luz no vácuo.

Para isso, utilizaremos do conceito da ideia de que o eletromagnetismo é uma onda, com isso, vamos partir das equações de Maxwell para chegarmos na equação de onda, onde sua explicação e demonstração requer mais conhecimento matemático do que a ideia proposta neste artigo, sendo assim, essa demonstração estará no apêndice deste artigo.

A equação de onda que conhecemos é dada pela seguinte forma:

$$\nabla^2 \vec{F} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}$$

Onde $\vec{F}$ pode ser dado como:

$$\vec{F} = f(x)\,\hat{\imath} + f(y)\,\hat{\jmath} + f(z)\,\hat{k} + f(t)$$

Sendo

Considerando a equação da onda eletromagnética para o vácuo, temos que não há cargas livres ou correntes elétricas, isso nos traz, matematicamente, as seguintes informações:

- $\rho = 0$, já que não cargas elétricas livres

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{8}$$

- $\vec{J} = \vec{0}$, já que não há corrente elétrica

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{9}$$

Reescrevendo as equações de Maxwell para o vácuo, temos:

Lei de Gauss	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
Lei de Gauss para o magnetismo	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Lei de Ámpere-Maxwell	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Lei de Faraday-Lenz	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Utilizando a Lei de Ámpere-Maxwell no vácuo (9) e aplicando o rotacional em ambos os lados da equação, temos:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Do lado esquerdo podemos aplicar a equação identidade conhecida como "rotacional do rotacional"e dada pela equação: (14), onde essa relação é demonstrada no seu respectivo apêndice, visto que é um assunto puramente matemático, utilizado pontualmente, como agora; e assim chegamos em:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2 \vec{B}$$

Onde, aplicando a Lei de Gauss para o magnetismo (5) temos que:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = -\nabla^2 \vec{B}$$

Do lado direito podemos aplicar a propriedade Abeliana, na qual nos permite, neste caso, fazermos a comutação entre a derivada e o rotacional, ou seja, podemos fazer a seguinte substituição:

$$\vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \rightarrow \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)$$

E agora podemos aplicar a Lei de Faraday-Lenz (7), onde teremos a substituição do rotacional do campo elétrico, chegando em:

$$\vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \rightarrow \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Portanto, temos a versão final do lado direito:

$$\vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t}$$

Juntando ambos os lados temos que:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow -\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t}$$

Onde se pode concluir que:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t} \tag{10}$$

Comparando com a equação da onda (13) podemos escrever que:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t}$$

Logo, além do campo magnético ser uma onda, podemos calcular a sua velocidade, denominada por c onde é conhecida como velocidade da luz, e comparando as equações temos que:

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} \tag{11}$$

Usando os valores os valores conhecidos dessas constantes, e no S.I. temos que:

- $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \cdot 8,85 \times 10^{-12}}} = 3 \times 10^8$$

Podemos chegar nesse resultado fazendo o mesmo processo com o campo elétrico, mostrando dessa forma que ele também é uma onda.

3 1º postulado

4 Transformações de Galileo

5 Bibliografia

- https://relatividade-restrita.propg.ufabc.edu.br/postulados-da-relatividade/
  - Acesso em: 07/07/2024 - 04h05
- https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/388/348
  - Acesso em: 09/07/2024 - 05h00
- https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MA211Cursao/Aula12.pdf
  - Acesso em: 15/07/2024
- http://tics.ifsul.edu.br/matriz/conteudo/disciplinas/calv/biblioteca/un_k.pdf
  - Acesso em: 15/07/2024 - 04h21
- https://integra.univesp.br/courses/667/pages/texto-base-o-conceito-de-campo-campos-escalares-e-campos-vetoriais-parte-2-%7C-gil-da-costa-marques
  - Acesso em: 15/07/2024 - 04h26
- https://www.geogebra.org/calculator
  - Acesso em: 20/07/2024 - 03h56
- https://notaspedrok.com.br/notas/CalculoI/cap_deriv_sec_derivpt.html
  - Acesso em: 20/07/2024 - 04h47
- young e freedman 3
- calculo guidorrizi
- calculo stewart

6 Apêndice 1 - Equação de onda

Em um certo t, temos:

- Observador S: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$
- Observador S': $\vec{r'} = x'\hat{i} + y'\hat{j}$

Seja $\overrightarrow{r'_{oo}}$ o vetor da origem de S até a origem de S', podemos escrever que:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r'_{oo}} + \vec{r'} \tag{12}$$

Como o $\overrightarrow{r'_{oo}}$ é um vetor que representa distância entre os observadores, sendo um deles em movimento em relação ao outro com uma velocidade $\vec{v}$, podemos dizer, usando a equação da velocidade, que:

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{r'_{oo}}}{t} \rightarrow \overrightarrow{r'_{oo}} = \vec{v} \cdot t$$

Como eles estão se movimentando na horizontal, temos que:

$$\overrightarrow{r'_{oo}} = \vec{v} \cdot t \rightarrow \overrightarrow{r'_{oo}} = v \cdot t\ \hat{i}$$

Podemos assim escrever a equação (12) separa em vetores, ou seja:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r'_{oo}} + \vec{r'} \quad \begin{cases} \text{Em x (ou em } \hat{i}\text{): } x = v \cdot t + x' \rightarrow x' = x - v \cdot t \\ \\ \text{Em y (ou em } \hat{j}\text{): } y = 0 + y' \rightarrow y = y' \end{cases}$$

- Observador S: $y(x, t)$.
- Observador S': $y'(x')$. O tempo não está sendo considerado porque o referencial e o pulso estão se movendo juntos, logo, eles estão parados entre si, e apensas o referencial S que se distancia.

Como ambas as equações devem representar a mesma coisa, podemos dizer que:

$$y(x, t) = y(x') = y(x - v \cdot t)$$

A partir disso, vamos calcular a velocidade v_y e a aceleração a_y de um certo ponto que recebe a presença desse pulso. Inicialmente vamos começar em relação a $y(x, t)$ e transforma-la para $y'(x')$, e por fim vamos comparar os resultando. Sendo assim temos para $y(x, t)$:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'} = -v \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}\right) = -v \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y'}{\partial x'}\right) = -v \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)$$

$$a_y = -v \cdot -v \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x'^2} = v^2 \cdot \frac{\partial y'^2}{\partial x'^2}$$

Agora para $y'(x')$:

$$a_y = \frac{\partial y'^2}{\partial t^2}$$

Chegando assim a duas formas de expressar a aceleração, com isso, podemos igualar as equações, chegando em:

$$v^2 \cdot \frac{\partial y'^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial y'^2}{\partial t^2}$$

Essa equação é a mesma para $y(x,t)$, se fosse feita de forma análoga, então podemos escrever da seguinte forma:

$$v^2 \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y'^2}{\partial t^2}$$

Agora imagine que generalizarmos essa ideia de uma onde apenas em $y(x,t)$ para uma onda do tipo tridimensional ....

$$\nabla^2 \overrightarrow{A} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{13}$$

7 Apêndice 2 - Mais de matemática

7.1 Identidades vetorais

7.1.1 Rotacional do rotacional

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \right) = \overrightarrow{\nabla} \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{A} \right) - \nabla^2 \overrightarrow{A} \tag{14}$$

7.1.2 Propriedade Abeliana

7.2 Derivando funções

7.2.1 Derivada de uma função linear

7.2.1.1 Derivada de uma função linear de várias veriáveis

7.2.2 Derivada de uma função composta

7.2.2.1 Regra da cadeia

8 Apêndice 3 - Chegando a velocidade da luz pelo campo elétrico

Utilizando as equações de Maxwell no vácuo, podemos escrever a tabela abaixo:

Lei de Gauss	$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = 0$
Lei de Gauss para o magnetismo	$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$
Lei de Ámpere-Maxwell	$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$
Lei de Faraday-Lenz	$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

Utilizando a Lei de Faraday-Lenz (7) e aplicando o rotacional em ambos os lados da equação, temos:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} \right) = \overrightarrow{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \right)$$

Trabalhando inicialmente pelo lado esquerdo da equação, temos que:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E}$$

Onde, aplicando a Lei de Gauss para o vácuo (8), temos que:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\nabla^2 \vec{E}$$

Do lado direito podemos aplicar a propriedade Abeliana, na qual nos permite, neste caso, fazermos a comutação entre a derivada e o rotacional, ou seja, podemos fazer a seguinte substituição:

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$$

Usando a Lei de Ámpere-Maxwell no vácuo (9) temos que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Podemos assim substituir, chegando na seguinte equação:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Juntando ambos os lados temos que:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow -\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Onde se pode concluir que:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{15}$$

Comparando com a equação da onda (13) podemos escrever que:

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Logo, além do campo magnético ser uma onda, podemos calcular a sua velocidade, denominada por c onde é conhecida como velocidade da luz, e comparando as equações temos que:

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} \tag{16}$$

Usando os valores os valores conhecidos dessas constantes, e no S.I. temos que:

- $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \cdot 8,85 \times 10^{-12}}} = 3 \times 10^8$$