Formalismo Lagrangeano

1 Introdução

Em um curso anterior de Mecânica Clássica ou até mesmo em um curso de Física 1 onde fazemos um tratamento por meio das Leis de Newton, vimos como é difícil em certos problemas resolver o sistema de equações diferênciais associada ao mesmo por meio da segunda Lei de Newton, seria algo como:

$$\sum_k \mathbf{F}_k = m\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

Onde as respectivas F_k são as forças que atuam sobre o sistema, $\mathbf{a}$ é a aceleração e m é a massa do corpo que estamos estudando. Como visto, esse é um sistema de equações diferências ordinárias de segunda ordem que muitas vezes podem ser acopladas e até mesmo não lineares. Escrevendo esse sistema explicitamente, temos algo como

$$\begin{cases} \sum_i F_{xi} = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ \sum_j F_{yj} = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ \sum_k F_{zk} = m\frac{d^2x}{dt^2} \end{cases}$$

Neste momento, se torna claro o quão complicado pode ser resolver essas equações no caso mais geral possível, sendo assim, se faz necessário uma teoria que seja não só abrangente as Leis de Newton, mas de certa forma, um pouco mais simples do que as mesmas. Ademais, outro ponto a verificar é a complicação que seria fazer a análise do diagrama de corpo livre, decompor forças, escrever versores e etc...

2 O Princípio de Hamilton

Para começar a construir um formalismo diferente, é necessário fazer algumas suposições sobre os sistemas que estamos interessados e para isso vamos supor um sistema com N graus de liberdade e definir as coordenadas generalizadas desse sistema como $(q_1, \ldots, q_N)$ e essas coordenadas podem ser independentes ou não.

Como queremos chegar as mesmas conclusões das Leis de Newton, também temos o mesmo objetivo que é determinar a evolução temporal desse sistema e ainda, como queremos uma teoria escalar, vamos supor que exista um campo escalar convenientemente representado por L e que iremos chamar de função lagrangeana, ou simplesmente, **Lagrangeana**. E mais, vamos supor que essa função dependa tanto das coordenadas generalizadas do sistema, como das velocidades generalizadas, ou seja

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \equiv L(q_1, \ldots, q_N; \dot{q_1}, \ldots, \dot{q_N}, t) \tag{1}$$

Aqui, a notação do ponto é equivalente a uma derivada temporal.

Dado esse contexto, vamos ao ponto chave da teoria que é definir um funcional linear que vamos denominar **Ação do Sistema** e representa-lo por meio da letra S, ela é definida entre dois instantes de tempo t_1 e t_2 da seguinte forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt \tag{2}$$

O **Princípio de Hamilton** ou alternativamente **Princípio da Mínima Ação** diz que na evolução do sistema da condição 1 para a condição 2 entre t_1 e t_2, a ação deve ser mínima e dai vem o nome tão sugestivo. Em uma notação de Cálculo Variácional, podemos escrever

$$\delta S = 0 \tag{3}$$

Posteriormente, veremos que esse princípio define todo um sistema de N equações que são não só equivalentes as Leis de Newton, mas também mais gerais e talvez até um pouco abstratas.

3 As Equações de Euler-Lagrange

Bem, agora que temos a ferramenta que necessitávemos, podemos manipulá-la de forma a obter o resultado que queríamos e na verdade precisamos, para isso, vamos esclarecer um pouco mais a notação Variácional

$$\delta S = S(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}) - S(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \tag{4}$$

Para começar a fazer algumas manipulações, vamos escrever esse primeiro termo explicitamente

$$S(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}) = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t)dt \tag{5}$$

Podemos então lançar a mão de uma aproximação de primeira ordem na Lagrangeana a qual temos alguns deslocamentos nas posições e velocidades da seguinte forma

$$L(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta\dot{\mathbf{q}}, t) \approx L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \tag{6}$$

Substituindo essa simplificação na expressão 5

$$
\begin{aligned}
S(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}+\delta\dot{\mathbf{q}}) &\approx \int_{t_1}^{t_2}\left[L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right]dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i dt.
\end{aligned}
$$

Vamos agora examinar o termo que depende das velocidades generalizadas, para isso, podemos simplesmente efetetuar uma integração por partes em t

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i dt=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left[\delta q_i(t)\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i(t)dt$$

Mas uma das condições é a extremização da integral, ou seja, as variações das coordenadas generalizadas nos extremos de integração que definimos como $\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$ sendo assim, temos

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i dt=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i(t)dt$$

Com isso, chegamos a uma expressão muito conveniente para $S(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}+\delta\dot{\mathbf{q}})$ somente substituindo essas manipulações na equação (5)

$$S(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}+\delta\dot{\mathbf{q}})\approx\int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)dt+\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i(t)dt \quad (7)$$

Finalmente podemos escrever a variação da ação em termos da expressão (7) chegando ao resultado que procuravamos desde o começo

$$\delta S=\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i(t)dt \quad (8)$$

Caso apliquemos a imposição do princípio da mínima ação, chegamos a

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i(t)dt=0$$

Nesta expressão, há uma soma sobre N equações, cada uma com relação somente a derivadas de q_i, ou seja, podemos dizer que os integrandos são linearmente independentes, possibilitando assim igualar cada uma das expressões a zero pela condição de minimização da ação.

E assim chegamos a conclusão de que a integral é mínima se $\delta q_i(t) = 0$, que é a solução trivial que não queremos de jeito nenhum, e a outra condição (essa sim nós queremos e muito!) possível é

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{9}$$

Essas meus caros, são as equações de **Euler-Lagrange**! Logo de cara, podemos ver que são um conjunto de N equações diferenciais sobre o sistema que estamos analizando, cada uma delas descreve a evolução temporal de uma das coordenadas generalizadas e precisamos basicamente saber a escrever a Lagrangeana do sistema para determinar essas equações.