Uma partícula (partícula 1), com massa de repouso m_0 e velocidade v, colide com uma outra partícula (partícula 2) de massa de repouso $2m_0$ que se encontra em repouso, resultando numa única partícula após a colisão.

(a) (1,5 ponto) Escreva as equações de conservação que permitem o cálculo da massa de repouso M_0 e a velocidade V da partícula resultante da colisão. Deixe sua resposta em termos de v e dos demais dados do problema. Não é necessário resolver as equações.

(b) (1,0 ponto) Considerando que a partícula incidente tem energia cinética K, calcule a velocidade v desta partícula (partícula 1) em termos de K e demais dados do enunciado. Mostre que a expressão obtida se aproxima do resultado clássico no limite em que $\varepsilon \equiv K/(m_0c^2) \ll 1$.

a) Conservação do momento e energia:

Fórmulas:

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\vec{v} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$K = (\gamma - 1)\, m_0 c^2 \qquad E_R = m_0 c^2$$

$$E = \gamma\, m_0 c^2$$

Antes da colisão

$$P_I = \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, v}_{P_1} + \underbrace{0}_{P_2}$$

$$E_I = \underbrace{\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{E_1} + \underbrace{2m_0c^2}_{E_2}$$

Depois da colisão

$$P_F = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} V$$

$$E_F = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} c^2$$

Equações de conservação:

$\gamma M_0 V$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v = \frac{M_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$P_I = P_F$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 + 2m_0 c^2 = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} c^2$$

$E_I = E_F$

$\gamma M_0 c^2$

b) Queremos relacionar K e v

$$K = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

$$\gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = K$$

$$\gamma m_0 c^2 = K + m_0 c^2$$

$$\gamma = \frac{K + m_0 c^2}{m_0 c^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{K + m_0 c^2}{m_0 c^2} = \frac{K}{m_0 c^2} + 1$$

$$\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{K}{m_0 c^2} + 1\right)^2$$

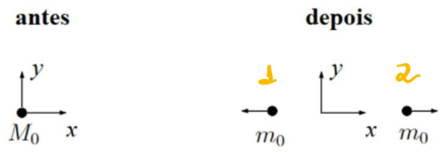
$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{K}{m_0 c^2} + 1\right)^{-2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{K}{m_0 c^2} + 1\right)^{-2}$$

$$v^2 = c^2 - c^2\left(\frac{K}{m_0 c^2} + 1\right)^{-2}$$

$$v = \left[c^2 - c^2\left(\frac{K}{m_0 c^2} + 1\right)^{-2}\right]^{1/2}$$

Uma partícula, de massa de repouso M_0, inicialmente em repouso, decai produzindo duas partículas idênticas, cada uma com massa de repouso m_0, conforme ilustrado na figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Calcule a energia cinética de cada uma das partículas resultantes. Expresse sua resposta em termos de M_0, m_0, e c.

(b) (1,0 ponto) Considerando que as partículas resultantes viajam na direção x, calcule o vetor velocidade de cada partícula resultante. Expresse sua resposta em termos de M_0, m_0, e c.

(c) (0,5 ponto) Calcule o vetor velocidade das partículas resultantes se a massa de repouso $m_0 = 0$.

a) Da conservação do momento

$$v_1 = -v_2$$

Da conservação da energia:

$$\rightarrow \quad M_0 \cancel{c^2} = 2 m_0 \gamma \cancel{c^2}$$

$$E = \gamma m_0 c^2 \leftarrow$$

$$K = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

$$\gamma = \frac{M_0}{2m_0}$$

$$K = (\gamma - 1) m_0 c^2 = \left(\frac{M_0}{2m_0} - 1\right) m_0 c^2$$

$$K = \left(\frac{M_0}{2m_0} - 1\right) m_0 c^2$$

b) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -v \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma = \frac{M_0}{2m_0} \qquad \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{M_0^2}{4m_0^2}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{4m_0^2}{M_0^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{4m_0^2}{M_0^2}$$

$$v = \sqrt{c^2 - \frac{4m_0^2c^2}{M_0^2}}$$

c) $m_0 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{c^2 - 0} = c$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -c \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uma espaçonave viajando em linha reta no sentido positivo do eixo de coordenadas, passa por um planeta e então pela sua Lua. A velocidade da espaçonave em relação ao sistema planeta- Lua é $0.98c$. Em um certo instante de tempo, detecta-se na espaçonave um sinal de Alarme na Lua e $\Delta t = 1,10$s mais tarde, detecta-se na espaçonave que houve uma explosão no planeta. De acordo com os ocupantes da espaçonave a distância da Lua ao planeta é $\Delta x' = 4 \times 10^8$m. **Escreva as respostas numéricas no formato inglês, com ponto (.) e não vírgula (,), a instrução é válida apenas para essa questão.**

(1) Calcule a velocidade da informação $\Delta x'/\Delta t'$ (em unidades de c) entre esses dois eventos (Alarme e Explosão) no referencial da espaçonave. **Expresse sua resposta até a segunda casa decimal depois da vírgula.**

(2) Calcule a velocidade da informação entre esses dois eventos (Alarme e Explosão), em unidades de c, no referencial Lua-planeta. **Expresse sua resposta até a segunda casa decimal depois da vírgula.**

Podem esses dois eventos, Alarme e explosão, exibir uma relação de causa e efeito

(3) no referencial da espaçonave?

- ○ Não
- ○ Sim

(4) no referencial Lua-planeta?

- ○ Não
- ○ Sim

Alarme : $t_1' = 0$

Explosão : $t_2' = 1,10$ s

Distância lua planeta : $\Delta x' = 4 \times 10^8$ m

a) $\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} = \dfrac{4 \times 10^8}{1,10} = 3,63 \times 10^8$ m/s

b) Δx é um comprimento próprio em S

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-0,98^2}} \; 4 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases}$$

$$x = \gamma\,(x' + ut')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)$$

$$\begin{cases} t_1 = \gamma\left(0 + \dfrac{u \times 0}{c^2}\right) \\ t_2 = \gamma\left(1,1 + \dfrac{u \times 4,0 \times 10^8}{c^2}\right) \end{cases}$$

$$\Delta t = \gamma\left(1,1 + \frac{u \times 4,0 \times 10^8}{c^2}\right)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\cancel{\gamma}\, 4 \times 10^8}{\cancel{\gamma}\left(1{,}1 + \frac{0{,}98 \times 4{,}0 \times 10^8}{c}\right)} = \frac{4 \times 10^8}{1{,}1 + \frac{0{,}98 \times 4{,}0 \times 10^8}{c}}$$

Outra opção

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = 3{,}63 \times 10^8$$

Usamos a transformação de Lorentz p/ velocidade

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{v' \times u}{c^2}} = \frac{3{,}63 \times 10^8 + 0{,}98c}{1 + \frac{3{,}63 \times 10^8 \times 0{,}98c}{c^2}}$$

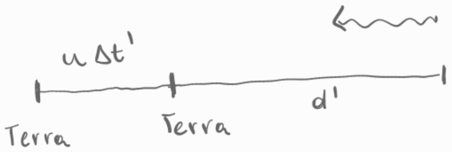
Uma nave espacial parte da Terra com velocidade u em direção a uma estação espacial que se encontra a uma distância d da Terra. No instante em que atinge a estação, a espaçonave emite um sinal luminoso na direção da Terra. Segundo o comandante da espaçonave, qual é o intervalo de tempo entre a emissão e a chegada desse sinal à Terra?

- a. $\Delta t' = \frac{c}{d}\sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}}$
- b. $\Delta t' = \frac{c}{d}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$
- c. $\Delta t' = \frac{d}{c}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$
- d. $\Delta t' = \frac{d}{c}\sqrt{\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}}$
- e. $\Delta t' = \frac{d}{c}\sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}}$

$d = c\Delta t \qquad \Delta t = \frac{d}{c}$

No referencial S'

$$d' = \frac{d}{\gamma}$$



$$c\Delta t' = d' + u\Delta t'$$

$$(c-u)\Delta t' = d'$$

$$\Delta t' = \frac{d}{\gamma(c-u)} = \frac{d\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{c-u}$$

$$= \frac{d}{c}\frac{\sqrt{c^2-u^2}}{c-u} = \frac{d}{c}\frac{\sqrt{c-u}\sqrt{c+u}}{c-u}$$

$$= \frac{d}{c}\frac{\sqrt{c+u}}{\sqrt{c-u}}$$

$$\Delta t' = \frac{d}{c}\frac{\sqrt{c+u}}{\sqrt{c-u}}$$

(1) Um evento ocorre no ponto x_A sobre o eixo x e $10^{-6}s$ mais tarde um outro evento ocorre no ponto x_B, tal que $x_A - x_B = 600m$, quando visto de S. É possível que estes dois eventos apareçam simultaneamente em um outro referencial S', movendo-se paralelamente ao eixo x?

- Não.
- Sim.

(2) Considere duas cidades C_1 e C_2 que, segundo um observador na superfície da terra, estão separadas por uma distância de $500Km$. Um observador terrestre observa dois eventos simultâneos E_1 e E_2 que ocorrem nas cidades C_1 e C_2 respectivamente. Uma aeronave viaja de C_1 para C_2 com velocidade de $\frac{12}{13}c$. Qual é a diferença de tempo entre os dois eventos para um observador na aeronave? Escreva sua resposta com uma casa decimal em unidades de $10^{-3}s$.

1) Calculamos o intervalo:

$$S_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 - c\,(t_A - t_B)^2$$

$$= 600^2 - 3\times10^8 \times (10^{-6})^2$$

$$= 600^2 - 3\times10^8 \times 10^{-12} \simeq 600^2$$

$$S_{AB}^2 > 0$$

Intervalo do tipo espaço
ocorrem simultaneamente em
algum referencial

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > c \Rightarrow \text{tipo espaço}$$

2) Usamos transformação de Lorentz

$t_A = 0$ $\qquad$ $t_B = 0$

$x_A = 0$ $\qquad$ $x_B = 500$

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - ut)\,, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{ux}{c^2}\right), \end{cases}$$

$$x_A' = \gamma\,(x_A - ut_A) = 0$$

$$t_A' = \gamma\left(t_A - \frac{ux_A}{c^2}\right) = 0$$

$$x_B' = \gamma\,(x_B - ut_B) = \gamma\, x_B$$

$$t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{ux_B}{c^2}\right) =$$

$$-\gamma\,\frac{u\,500}{c^2}$$

$$x_B' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}} \times 500$$

$$t_B' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}} \times \frac{\frac{12}{13}\times 500}{3\times10^8}$$

37.35 a) Em que porcentagem a sua massa de repouso aumenta quando você sobe 30 m até o topo de um edifício de dez andares? Você percebe esse aumento? Explique. b) Em quantos gramas a massa de uma mola de 12,0 g com uma constante de 200 N/cm varia quando você a comprime em 6,0 cm? A massa aumenta ou diminui? Você notaria a variação na massa, se estivesse segurando a mola? Explique.

a) $E_R = m_0 c^2$

h

h=0

E_R aumentou

$E_R^* + m_0 g h$

$m_0 c^2 + m_0 g h = M_0 c^2$

$M_0 = m_0 + \times 10^{-13}$

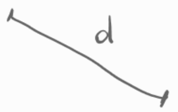
37.11 Por que somos bombardeados por múons? Múons são partículas subatômicas instáveis que sofrem decaimento e se transformam em elétrons com uma vida média de 2,2 μs. Eles são gerados quando raios cósmicos bombardeiam as camadas superiores da atmosfera, a cerca de 10 km acima da superfície da Terra, e deslocam-se com uma velocidade muito próxima à da luz. O problema que gostaríamos de discutir é por que vemos múons na superfície da Terra. a) Qual é a maior distância que um múon poderia percorrer durante a sua vida média de 2,2 μs? b) De acordo com a sua resposta à parte (a), seria de imaginar que os múons nunca chegariam à superfície. Mas a vida média de 2,2 μs é medida no sistema do múon, e múons se movem muito rápido. A uma velocidade de 0,999c, qual é a vida média de um múon em referência a um observador em repouso na Terra? Que distância o múon percorreria nesse tempo? Esse resultado explica por que encontramos múons em raios cósmicos? c) Do ponto de vista do múon, ele continua vivendo apenas durante 2,2 μs, então como ele alcança o solo? Qual é densidade dos 10 km de atmosfera que o múon precisa atravessar, em relação ao múon? Está claro agora como o múon consegue chegar ao solo?

a) $D = c\Delta t = 3\times10^{8} \times 2,2 \times 10^{-6}\ s = 6,6 \times 10^{2}\ m$

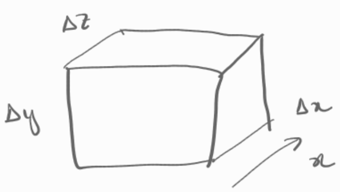
b) $\Delta t = \gamma \Delta t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-0,999}} \times 2,2 \times 10^{-6}\ s$

$D_T = \frac{1}{\sqrt{1-(0,999)^2}} \times 2,2 \times 10^{-6} \times 0,999c \simeq 15\ Km$

c)



$d' = \frac{d}{\gamma} = 10Km \times \sqrt{1-(0,999)^2}$



$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\gamma \Delta x \Delta y \Delta z}$

$\rho_M = \frac{\rho_T}{\gamma}$