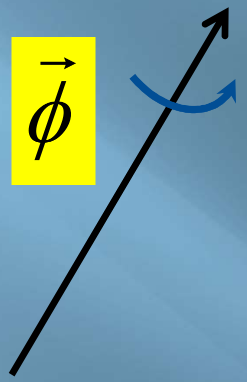
VETOR DE ROTAÇÕES

Ettore A. de Barros

1- INTRODUÇÃO

$\vec{\phi}$



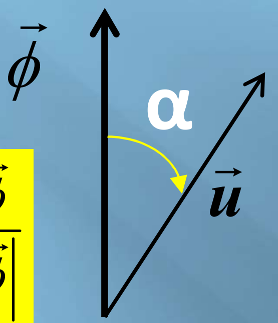
$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix}; \left|\vec{\phi}\right| = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}$$

REPRESENTAÇÃO VETORIAL DE UMA ROTAÇÃO FINITA EM TORNO DE UM EIXO NO ESPAÇO.

VETOR $\vec{\phi}$: VETOR, CUJA MAGNITUDE É O VALOR ABSOLUTO DO ÂNGULO , E CUJA REPRESENTAÇÃO NUM SISTEMA CARTESIANO SE DÁ DE ACORDO COM AS PROJEÇÕES DO EIXO DE ROTAÇÃO NOS EIXOS COORDENADOS.

2- CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE ROTAÇÃO

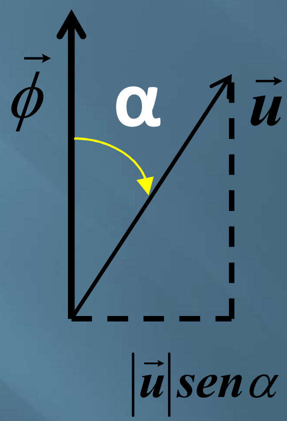
$$\vec{u}_{\phi} = \frac{\vec{\phi}}{\left|\vec{\phi}\right|}$$



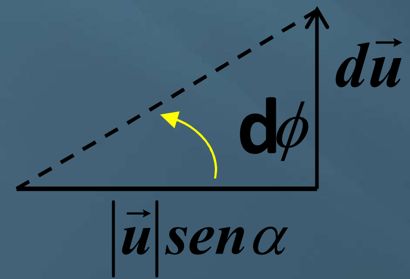
SEJA "ϕ" A VARIÁVEL QUE REPRESENTA $|\vec{\phi}|$.

PARA UMA ROTAÇÃO INFINITESIMAL $d\phi$ DO VETOR $\vec{u}$, O MÓDULO DO INCREMENTO VETORIAL FICA:

$$|d\vec{u}| = d\phi|\vec{u}||sen\alpha| \qquad (1)$$



Plano Ortogonal:



PARA UM VETOR DE MÓDULO UNITÁRIO, TEMOS:

$$|d\vec{u}| = d\phi.|\vec{u}||sen\alpha| = d\phi.\left|\vec{u}_\phi \times \vec{u}\right| \qquad 2)$$

$$d\vec{u} = d\phi.(\vec{u}_\phi \times \vec{u}) \qquad 3)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}}{d\phi} = \vec{u}_\phi \times \vec{u} = (\vec{u}_\phi \times)\vec{u} \qquad 4)$$

COMO $\vec{u}_\phi$ É CONSTANTE, TEMOS:

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{u}}{d\phi^2} = (\vec{u}_\phi \times)\frac{d\vec{u}}{d\phi} = (\vec{u}_\phi \times)^2\vec{u} \qquad (5)$$

$$\frac{d^3\vec{u}}{d\phi^3} = (\vec{u}_\phi \times)^2\frac{d\vec{u}}{d\phi} = (\vec{u}_\phi \times)^3\vec{u} \qquad (6)$$

UTILIZEMOS A PROPRIEDADE DO PRODUTO MISTO

$$(\vec{u}_1\times)(\vec{u}_2\times)\vec{u}_3 = \vec{u}_2(\vec{u}_1.\vec{u}_3) - \vec{u}_3(\vec{u}_1.\vec{u}_2) \qquad (1)$$

E A PROPRIEDADE ASSOCIATIVA PARA O OPERADOR DE MULTIPLICAÇÃO VETORIAL:

$$(\vec{u}_1\times)[\vec{u}_2\times\vec{u}_3] = (\vec{u}_1\times)[(\vec{u}_2\times)\vec{u}_3] = [(\vec{u}_1\times)(\vec{u}_2\times)]\vec{u}_3 = (\vec{u}_1\times)(\vec{u}_2\times)\vec{u}_3 \qquad (2)$$

PARA $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}_\phi$, E $\vec{u}_3 = \vec{u}$, VEM:

$$\frac{d^3\vec{u}}{d\phi^3} = (\vec{u}_\phi\times)^3\vec{u} \overset{(2)}{=} (\vec{u}_\phi\times)[(\vec{u}_\phi\times)^2\vec{u}] \overset{(1)}{=} (\vec{u}_\phi\times)[\vec{u}_\phi|\vec{u}|\cos\alpha - \vec{u}]$$

$$= -(\vec{u}_\phi\times)\vec{u} = -\frac{d\vec{u}}{d\phi}$$

CHEGAMOS, ASSIM, À SEGUINTE EQUAÇÃO DIFERENCIAL:

$$\frac{d^3\vec{u}(\phi)}{d\phi^3} + \frac{d\vec{u}(\phi)}{d\phi} = 0$$

PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO, UTILIZAMOS AS CONDIÇÕES INICIAIS ABAIXO:

$$\phi = 0 \Rightarrow \vec{u}(0) = \vec{u}_0; \left.\frac{d\vec{u}(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0} = \vec{u}_\phi \times \vec{u}_0; \left.\frac{d^2\vec{u}(\phi)}{d\phi^2}\right|_{\phi=0} = (\vec{u}_\phi \times)^2\vec{u}_0$$

A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO FICA:

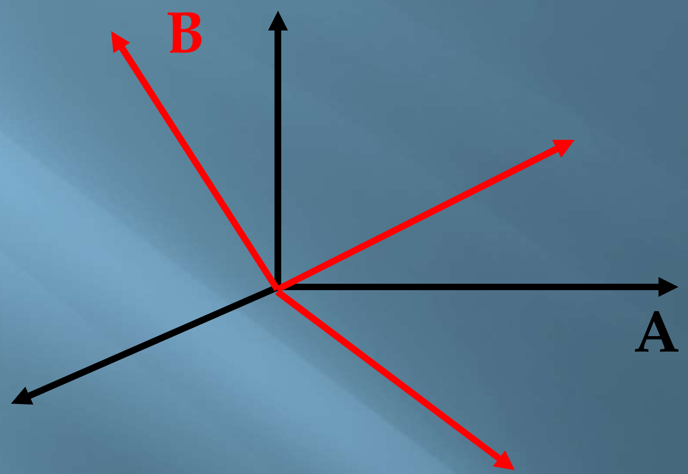
$$\vec{u}(\phi) = [I + sen\phi.(u_\phi \times) + (1 - \cos\phi).(u_\phi \times)^2]\vec{u}_0$$

NOTE QUE, ENTRE COLCHETES, OS 3 TERMOS SOMADOS SÃO MATRIZES 3X3.

O RESULTADO ACIMA PODE SER INTERPRETADO COMO UMA ROTAÇÃO DE UM VETOR $\vec{u}$, REPRESENTADO NO SISTEMA DE REFERÊNCIA "A" , ATRAVÉS DA TRANSFORMAÇÃO REPRESENTADA PELA MATRIZ ENTRE COLCHETES.

SUPONHA QUE TAL TRANSFORMAÇÃO É APLICADA NOS 3 VERSORES DO SISTEMA "A", PRODUZINDO 3 VERSORES DE UM SISTEMA "B", QUE ESTÁ REPRESENTADO, PELA EXPRESSÃO ACIMA, NO SISTEMA "A":

$$\vec{u}(\phi)_{iB}^{A} = [I + sen\phi.(u_{\phi}\times) + (1-\cos\phi).(u_{\phi}\times)^2]\vec{u}_{iA}\,, i = 1,2,3$$



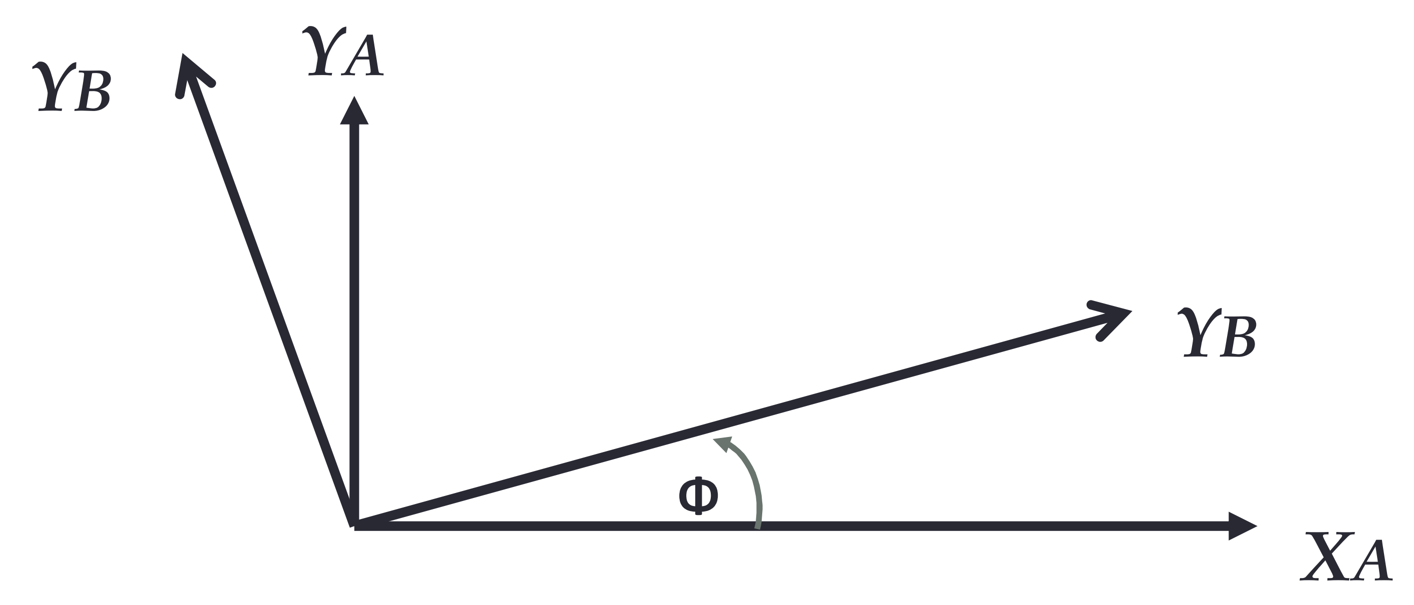
ONDE, $\vec{u}(\phi)_{iB}^{A}$ REFERE-SE AO í-ÉSIMO VERSOR DO SISTEMA "B" REPRESENTADO NO SISTEMA "A".

SENDO ASSIM, A TRANSFORMAÇÃO ENTRE COLCHETES REPRESENTA A MATRIZ DE ROTAÇÃO QUE LEVA O SISTEMA "B" PARA O SISTEMA "A".

$$R_B^A = [I + sen\phi.(u_{\phi}\times) + (1-\cos\phi).(u_{\phi}\times)^2]$$

A MATRIZ INVERSA PODE SER OBTIDA, ROTACIONANDO-SE O SISTEMA "B", EM RELAÇÃO AO MESMO EIXO DE ROTAÇÃO, EM TORNO DE $-u_{\phi}$, E EXPRESSANDO-SE OS VERSORES DE A NO SISTEMA B:

$$R_A^B = [I - sen\,\phi.(u_\phi \times) + (1-\cos\phi).(u_\phi \times)^2]$$



FINALMENTE, USANDO A DEFINIÇÃO

$\vec{u}_\phi = \dfrac{\vec{\phi}}{|\vec{\phi}|}$, VEM:

$$R_A^B = \left[I - \frac{sen\phi(\vec{\phi}\times)}{|\vec{\phi}|} + \frac{(1-cos\phi)\,(\vec{\phi}\times)^2}{|\vec{\phi}|^2} \right]$$

OU SEJA,

$$R_A^B = \left[I - \frac{(sen|\vec{\phi}|)(\vec{\phi}\times)}{|\vec{\phi}|} + \frac{(1-cos|\vec{\phi}|)\,(\vec{\phi}\times)^2}{|\vec{\phi}|^2} \right]$$