FCM0101 — Física I

4ª Lista de exercícios

Integração

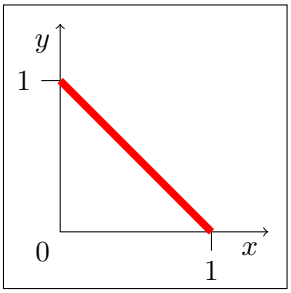
Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, (a) encontre $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, (b) encontre $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ e (c) mostre que a derivada em relação a x de $\int_1^x f(x)\,\mathrm{d}x$ é $f(x)$:

1. $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$;
2. $f(x) = \cos(\pi x)$;
3. $f(x) = e^{-x}$;
4. $f(x) = 1/(2x)$;
5. $f(x) = x^4 - 3x^2$.

Das expressões abaixo, quais estão erradas? Justifique.

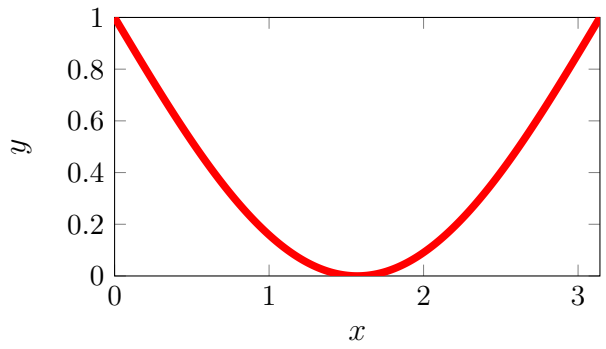
6. $\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e$;
7. $\int_0^\pi \mathrm{sen}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$;
8. $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \pi$
9. $\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = -\ln\big(\cos(x)\big)$ (admita que x está no primeiro quadrante, entre 0 e $\pi/2$). Dica: verifique se a derivada do lado direito em relação a x é igual ao integrando do lado esquerdo.
10. $\int_0^1 x^2 + 5x^3 + e^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y^2 + 5y^3 + e^y\,\mathrm{d}y$.
11. Calcule $\int \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{d}x + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$ e escreva o resultado na forma $A\,\mathrm{sen}(x+\alpha)$, onde A e α são constantes que você deve determinar.
12. Escreva $\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$ na forma $B\,\mathrm{sen}(x+\beta)$, onde B e β são constantes que você deve determinar. Em seguida calcule a integral $\int B\,\mathrm{sen}(x+\beta)\,\mathrm{d}x$ e compare com o resultado da questão anterior.

13. Escreva a equação $y(x)$ da reta vermelha que aparece no gráfico abaixo:

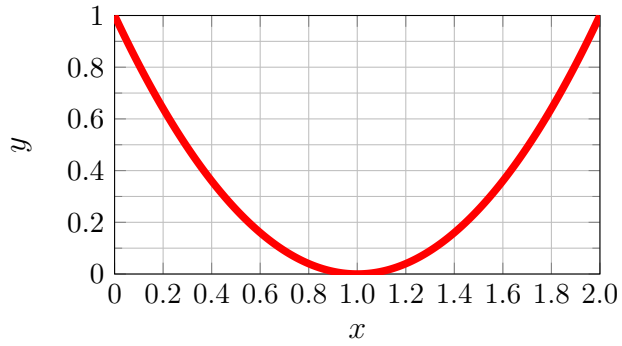


Em seguida, calcule $\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x$ e compare com a área do triângulo abaixo da curva, calculada geometricamente.

14. Calcule a área sob a curva $y(x) = 1 - \mathrm{sen}(x)$ na figura abaixo



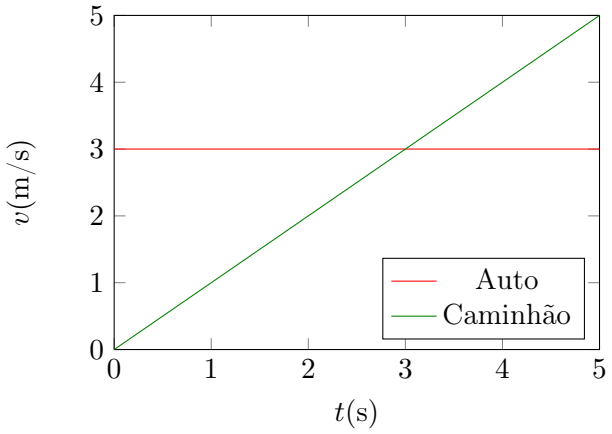
15. Calcule a área sob a curva $y(x) = (x-1)^2$ na figura abaixo



16. Para fazer uma estimativa para a área no problema anterior, calcule a área de um retângulo da grade e conte os retângulos que estão abaixo da curva. Dica: para obter um resultado razoavelmente preciso, conte como abaixo da curva todo retângulo que tenha mais da metade de sua área abaixo da curva vermelha. Compare com o resultado da questão anterior.

17. Um caminhão espera a luz vermelha de um sinal de trânsito virar verde e começa a mover-se logo que a luz muda de cor. Nesse mesmo momento, passa por ele um

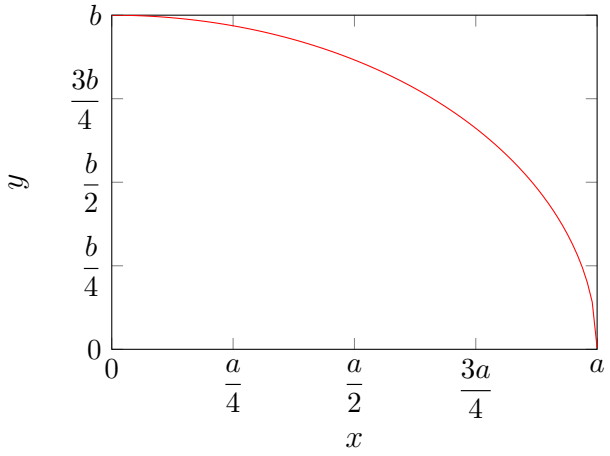
automóvel. Os movimentos dos dois veículos a partir desse instante são mostrados na figura abaixo. No final do intervalo mostrado na figura (5s), qual dos dois está na frente? Justifique sua resposta.



18. A equação de uma elipse pode ser escrita na forma paramétrica

$$x(t) = a\cos(t)$$
$$y(t) = b\,\mathrm{sen}(t),$$

onde a e b são os semi-eixos horizontal e vertical, respectivamente. Quando t varia de 0 a 2π, o gráfico de y(x) descreve uma elipse. O gráfico abaixo mostra a quando t varia de 0 a $\pi/2$:



Para calcular a área sob a curva na figura (igual a um quarto da área da elipse), você precisará computar a integral $\int_0^a y(x)\,\mathrm{d}x$. A dica é empregar a regra da cadeia para integração e substituir a variável x por t, isto é, escrever $x = a\cos(t)$ e lembrar que $\int y\,\mathrm{d}x = \int y\frac{dx}{dt}\,\mathrm{d}t$.