# Mecânica: Pêndulo duplo

Lagrangiana:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_1 g h_1 - m_2 g h_2}$$

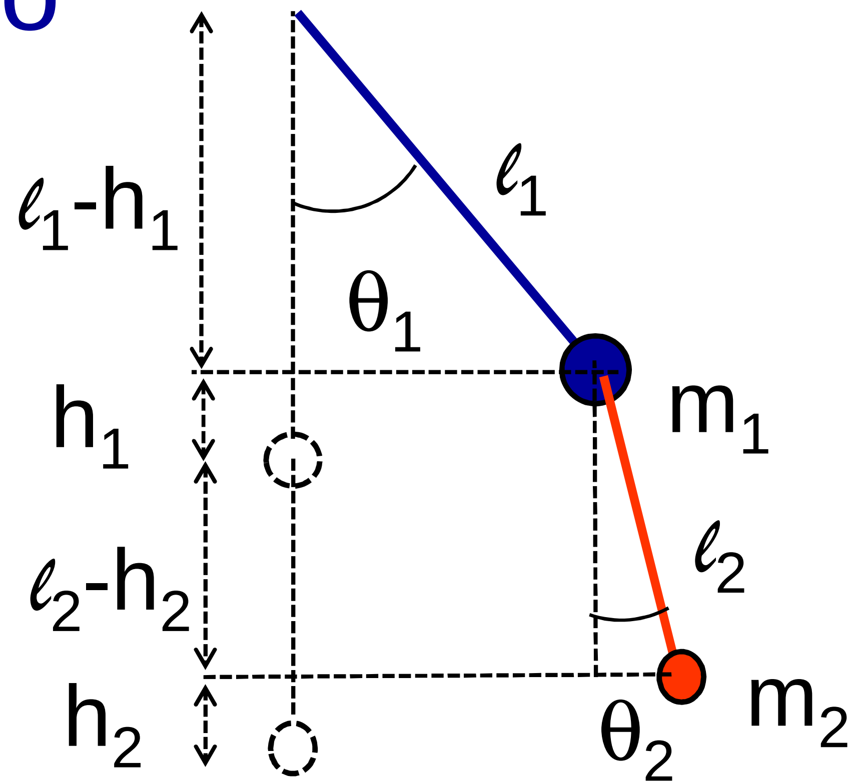
Coordenadas generalizadas: $\theta_1$ e $\theta_2$

$$h_1 = l_1(1 - \cos(\theta_1))$$

$$h_2 = l_2(1 - \cos(\theta_2)) + h_1$$

$$v_1 = l_1 \dot{\theta}_1$$

$$v_2^2 = v_1^2 + l_2^2(\dot{\theta}_2)^2 + 2 l_2 l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

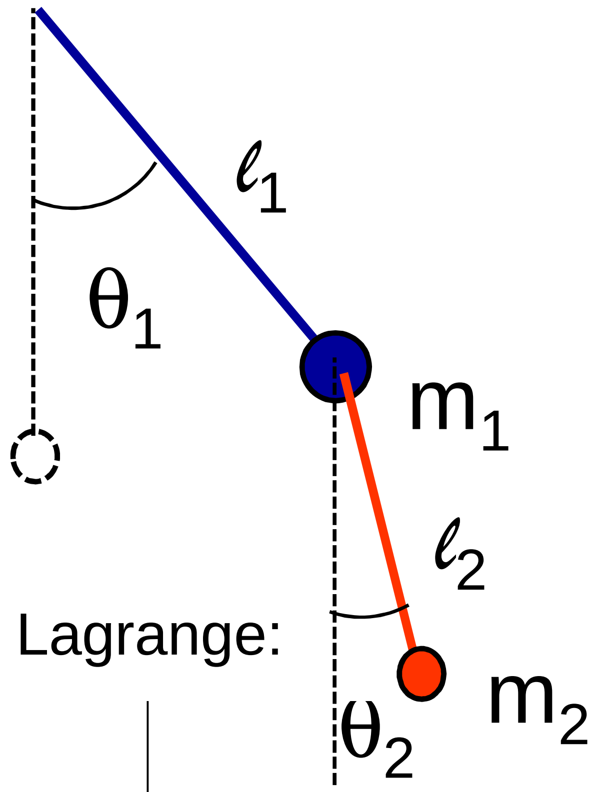



$$l_2 - h_2 + h_1 = l_2 \cos(\theta_2)$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & x_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 & = & y_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{array}\right.}$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_2 & = & \dot{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos\theta_2 \\ \dot{y}_2 & = & \dot{y}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2 \end{array}\right.}$$

# Mecânica: Pêndulo duplo



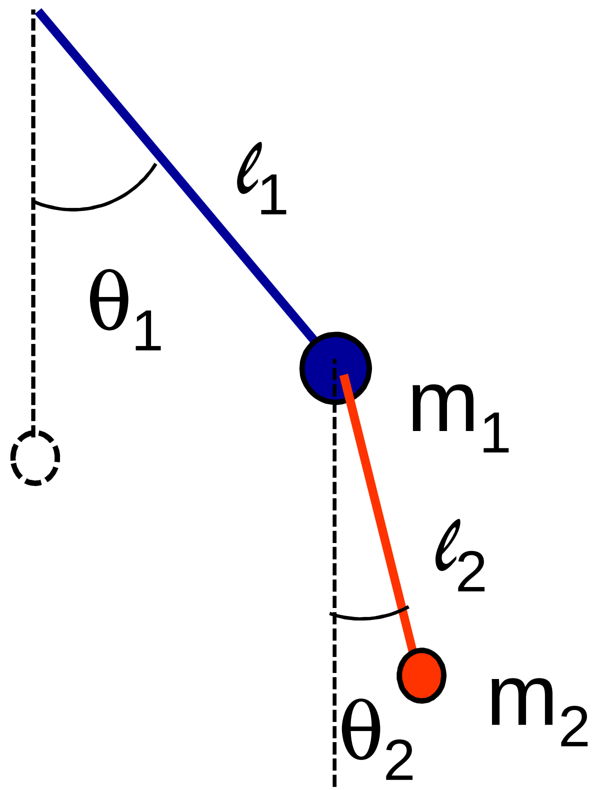

Lagrangiana:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{(m_1+m_2)}{2} l_1^2(\dot{\theta}_1)^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2(\dot{\theta}_2)^2 \\ & + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ & -(m_1+m_2) g l_1 (1-\cos\theta_1) \\ & - m_2 g l_2 (1-\cos\theta_2)\end{aligned}}$$

Equações de Lagrange:

$$\left\{\begin{aligned} p_{\theta 1} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ p_{\theta 2} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ \frac{dp_{\theta 1}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2) \\ \frac{dp_{\theta 2}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1-\theta_2) \end{aligned}\right.$$

# Aproximação: $m_1 \gg m_2$




Isto implica em:

$$\begin{cases} p_{\theta 1} & \approx & m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ p_{\theta 2} & = & m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ \dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} & \approx & -m_1 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right) \\ \dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} & = & -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right) \end{cases}$$

Para colocarmos em uma forma que possamos aplicar o método de Runge-Kutta, precisamos inverter as duas primeiras equações:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\theta}_2 & = & \dfrac{p_{\theta 1} - m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1}{m_2 l_1 l_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)} \\ \Rightarrow \dot{\theta}_1 & = & \dfrac{p_{\theta 1}}{m_1 l_1^2} - \dfrac{p_{\theta 2} \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{m_1 l_1 l_2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right) \\ \Rightarrow \dot{\theta}_2 & = & \dfrac{p_{\theta 2}}{m_2 l_2^2} - \dfrac{p_{\theta 1} \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)}{m_1 l_1 l_2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{m_2}{m_1}\right) \end{cases}}$$

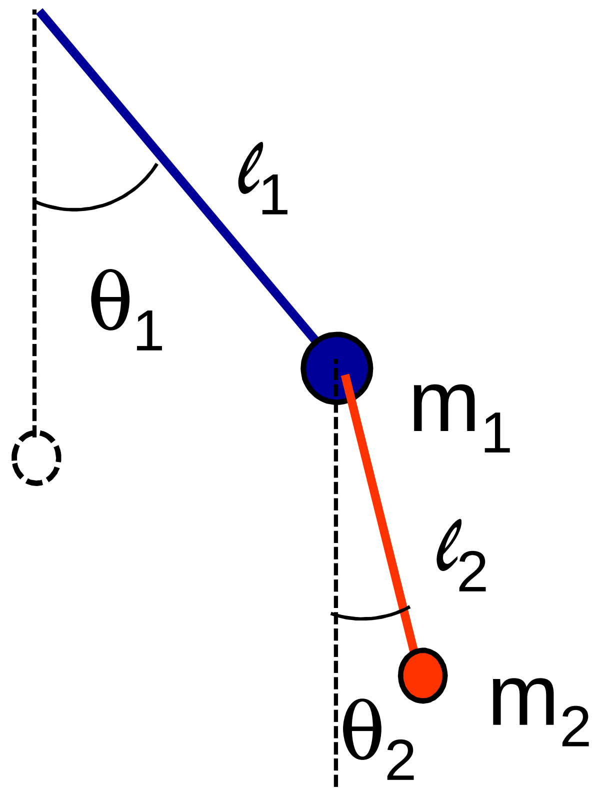
# Aproximação: $m_1 \gg m_2$

Equações de movimento:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{dt} & = & \dfrac{p_{\theta 1}}{m_1 l_1^2} - \dfrac{p_{\theta 2}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} & = & \dfrac{p_{\theta 2}}{m_2 l_2^2} - \dfrac{p_{\theta 1}\cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\ \dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} & = & -m_1 g l_1 \sin\theta_1 - \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\ \dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} & = & -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2}\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \end{cases}}$$

Condições iniciais: $\theta_2(0)$ , $\theta_1(0)$ e $p_{\theta 1}(0)$.

# Aproximação: $m_1 \gg m_2$




Energia: E=T+V (escrevendo em termos dos momentos e ângulos)

$$\boxed{\begin{aligned} E &= \frac{p_{\theta 1}^2}{2m_1 l_1^2} + \frac{p_{\theta 2}^2}{2m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta 1}^2 p_{\theta 2}^2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\ &\quad + m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos\theta_2) \end{aligned}}$$

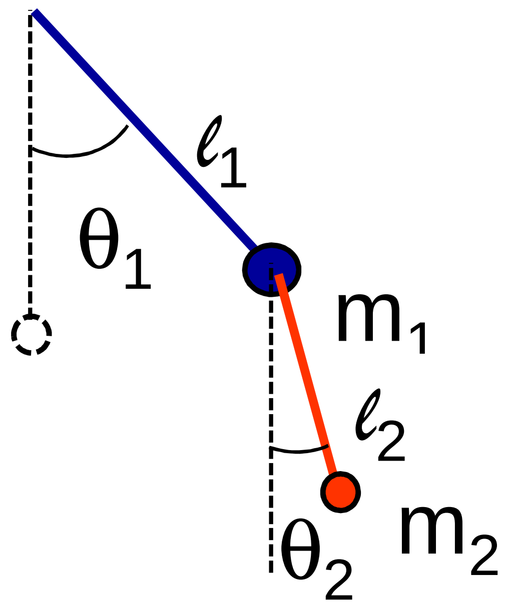
Dado um valor de E, escolhemos : $\theta_2(0)=\pi/2$, $\theta_1(0)=0$, $p_{\theta 2}(0)=0$ e $p_{\theta 1}(0)=??$.

$$E = \frac{(p_{\theta 1}(0))^2}{2m_1 l_1^2} + m_2 g l_2 \qquad \boxed{\Rightarrow p_{\theta 1}(0) = \pm\sqrt{2m_1 l_1^2 \left[E - m_2 g l_2\right]}}$$

# Resumo (c/ aproximação: $m_1 \gg m_2$)

Equações de movimento:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{p_{\theta 1}}{m_1 l_1^2} - \dfrac{p_{\theta 2}\cos(\theta_1-\theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\
\dfrac{d\theta_2}{dt} = \dfrac{p_{\theta 2}}{m_2 l_2^2} - \dfrac{p_{\theta 1}\cos(\theta_1-\theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\
\dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} = -m_1 g l_1 \sin\theta_1 - \dfrac{p_{\theta 1}p_{\theta 2}\sin(\theta_1-\theta_2)}{m_1 l_1 l_2} \\
\dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + \dfrac{p_{\theta 1}p_{\theta 2}\sin(\theta_1-\theta_2)}{m_1 l_1 l_2}
\end{cases}
$$




RK2: definir quatro k1, quatro k2 e quatro valores a meio-passo!

Condições iniciais: $\theta_1(0)=0$, $\theta_2(0)=\pi/2$, $p_{\theta 2}(0)=0$ e

$$p_{\theta 1}(0) = \pm\sqrt{2m_1 l_1^2\,[E - m_2 g l_2]}$$

Parâmetros a serem escolhidos: $E$ , $m_1=20m_2$ , $l_1$ , $l_2$

# RK2 para N eq. diferenciais acopladas

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} & = & f_1(x_1, ..., x_N) \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & f_2(x_1, ..., x_N) \\ & (\ldots) & \\ \dfrac{dx_N}{dt} & = & f_N(x_1, ..., x_N) \end{cases}$$

Definimos um "k1" para cada um dos $x_n(t)$ :

$$k_1^n = f_n(x_1(t), \ldots, x_N(t))\ \Delta t$$

Defininos os "valores em meio passo":

$$x_n(t + \Delta t/2) = x_n(t) + k_1^n/2$$

Finalmente, definimos os "k2":

$$k_2^n = f_n\left[x_1\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right), \ldots, x_N\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right]\ \Delta t$$

e "avançamos" no tempo:

Método de Runge-Kutta
de 2a ordem (**RK2**):

$$\boxed{x_n(t + \Delta t) = x_n(t) + k_2^n}$$

Ou seja, **dados todos os** $x_n(t)$, podemos calcula-los em t+ $\Delta$t:

# Aula 9 – Tarefa (Fazer upload!)

Considere um pêndulo duplo de massas $m_1$=0,1 kg e $m_1$=0,05 kg comprimentos $l_1$=50 cm $l_2$=20 cm e energia *E*. Utilize condições iniciais $\theta_2(0)=\pi/2$, $\theta_1(0)=0$, $p_{\theta 2}(0)=0$ e determine $p_{\theta 1}(0)$ a partir de *E* (escolha o sinal).

- *Varie a energia de E=0,1J até E=1,6J com passo 0.2 J.*
- *Para cada valor de energia E, calcule os ângulos $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ e os momentos angularer $p_{\theta 1}(t)$ e $p_{\theta 2}(t)$ do corpo usando o método de Runge-Kutta (RK2).*
- *Para cada Energia, plote o par [$\theta 1(t)$, $p_{\theta 1}(t)$] como um ponto em um gráfico* ***nos instantes em que $\theta_2(t)$ mudar de sinal e $p_{\theta 2}(t)>0$****.*
- *Com isso você estará plotando uma* ***Seção de Poincaré****, que é um "corte" em 2D do espaço de fase em 4D.*

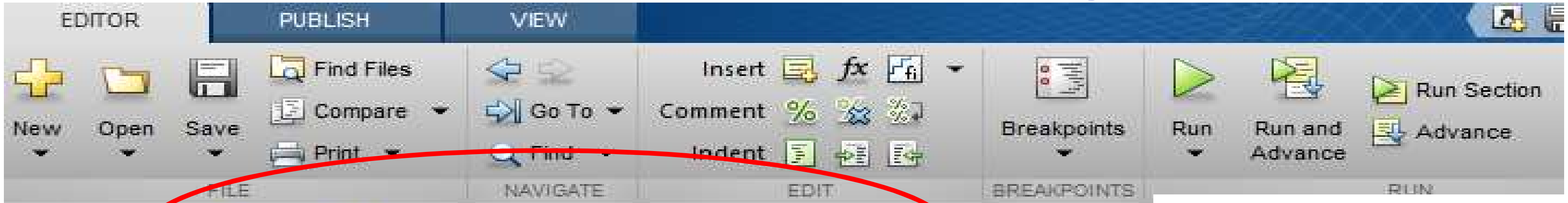
# Aula 9 – Tarefa - Dicas

- *Use tempos longos! Você precisa de muitas oscilações para ter um número razoável de pontos na sua seção de Poincaré.*
- *Uma sugestão é usar* $t_n=n.\Delta t$ *de 0 até* $t_N=100$ *com* $\Delta t=0.01$.
- *Para saber se* $\theta_2(t_n)$ *mudou se sinal, utilize a função* **sign**. *Exemplo:*

```
if ( sign(Theta2(n))~=sign(Theta2 (n-1)) ) ...
```

- *No RK2, você terá que calcular as quatro* $f_n(\theta_1,\theta_2,p_{\theta 1},p_{\theta 2})$ *(n=1 a 4) do lado direito repetidas vezes (para os k1 e para os k2).*
- *Para evitar escrever várias vezes o mesma coisa, a dica é definir* ***funções*** *no MatLab e chamá-las de dentro do seu script.*
- *Veja como definir funções no MatLab a seguir:*

# Escreva sua própria função no MatLab!




```
function d = Ftest(x,y)
%    Ftest  : função teste
%    Descrição: dadas as coordenadas
%                x e y, calcula a distância
%                à origem d= sqrt(x^2 + y^2);
%   Importante: Declaramos a função como
%                function d = Ftest(x,y)
%   Isto diz que x,y são os argumentos e
%   a função retorna um valor "d".
%   "d" tem que ser calculado em algum lugar.
d=sqrt(x^2+y^2);
end
```

**Declara a função.**

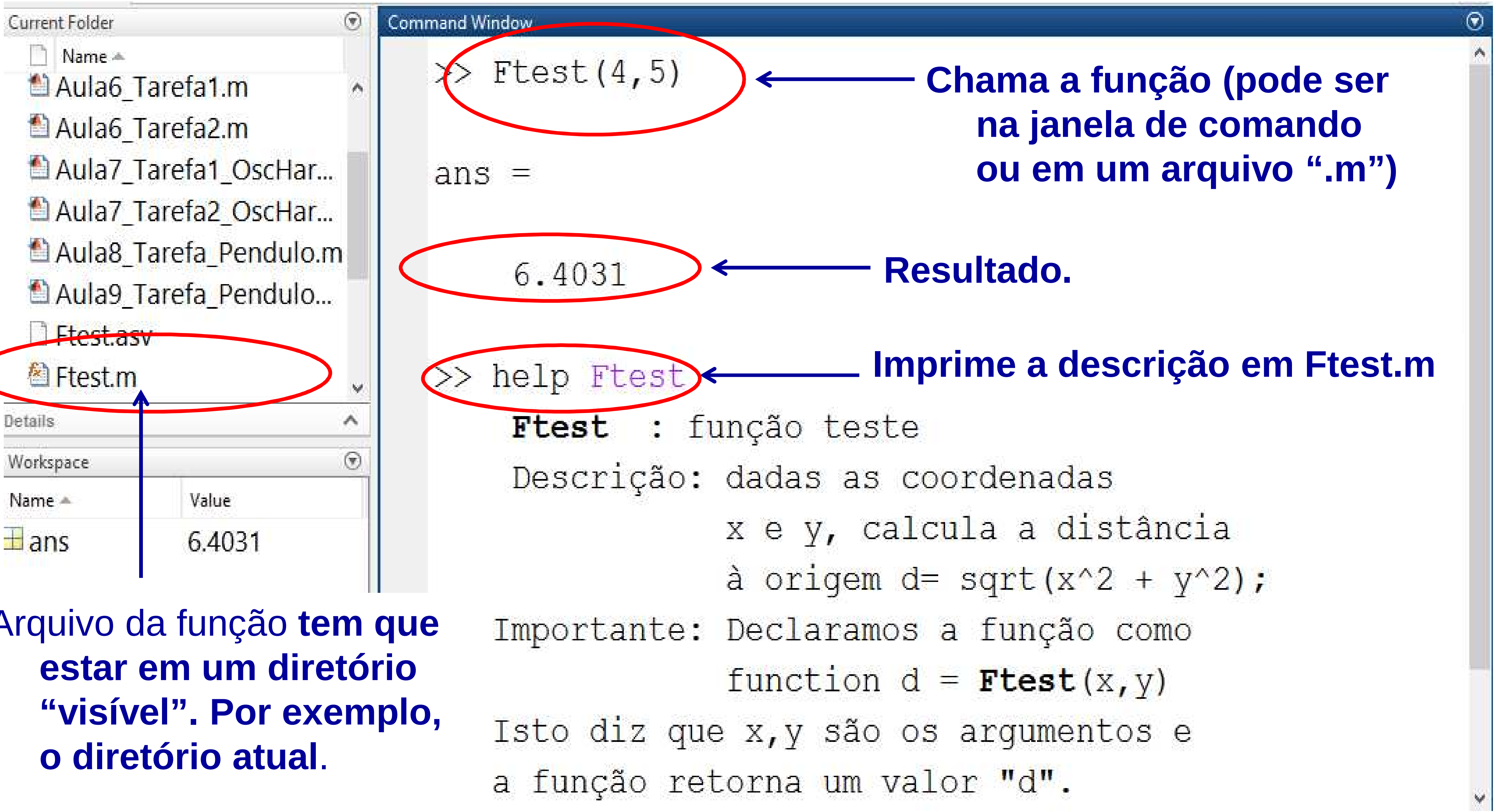
**Note a sintaxe!**

**Calculo da variável que será retornada (pode ser array, etc.)**

Ftest.m +

**Salva em arquivo .m COM O MESMO NOME da função!**

# Usando sua função




**Chama a função (pode ser na janela de comando ou em um arquivo ".m")**

**Resultado.**

**Imprime a descrição em Ftest.m**

Arquivo da função **tem que estar em um diretório "visível". Por exemplo, o diretório atual**.

# Aula 9 – Tarefa – Dicas para o gráfico.

- *Utilize a opção* 'k.' *para plotar pontos pretos ao invés de simbolos.*
- *Utilize letras gregas (sintaxe tipo Latex) fontes grandes nos labels do gráfico. Por exemplo:*

```
xlabel('\theta_1(t)','FontSize',22);
ylabel('p_{\theta 1}','FontSize',22);
```

- *Para gerar um pdf da figura, use:*

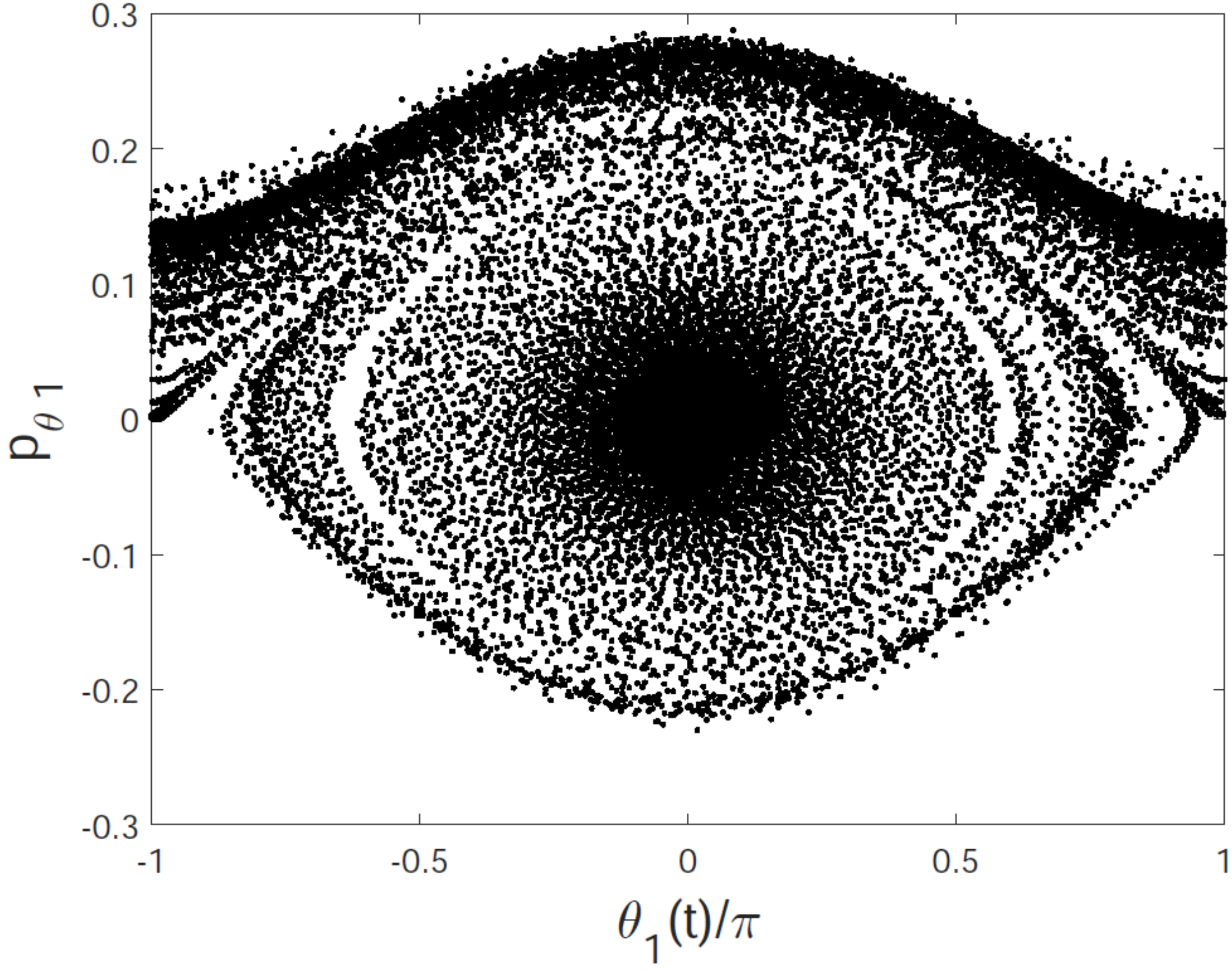
```
print  -r300 -dpdf PenduloDuplo.pdf
```

- *Debug: primeiros valores das coordenadas para E=0,1.*

```
Energia= 0.1000, P10=0.0672
N=1: tempo=0.0000  theta1=0.0000 Ptheta1=0.0672 theta2=1.5708 Ptheta2=0.0000
N=2: tempo=0.0100  theta1=0.0269 Ptheta1=0.0671 theta2=1.5674 Ptheta2=-0.0001
N=3: tempo=0.0200  theta1=0.0537 Ptheta1=0.0669 theta2=1.5573 Ptheta2=-0.0002
N=4: tempo=0.0300  theta1=0.0804 Ptheta1=0.0665 theta2=1.5401 Ptheta2=-0.0003
N=5: tempo=0.0400  theta1=0.1070 Ptheta1=0.0661 theta2=1.5159 Ptheta2=-0.0003
```

# Aula 9 – Tarefa – Dicas para o gráfico.

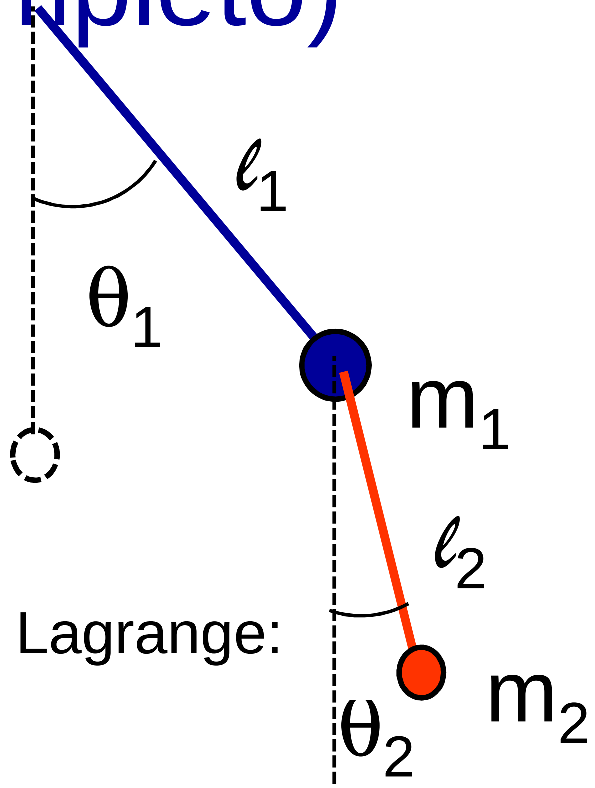
- *O gráfico final deve ficar mais ou menos assim.*
- *Compare com o gráfico do Pêndulo Simples. Quais as diferenças?*



# Mecânica: Pêndulo duplo (completo)

Lagrangiana:

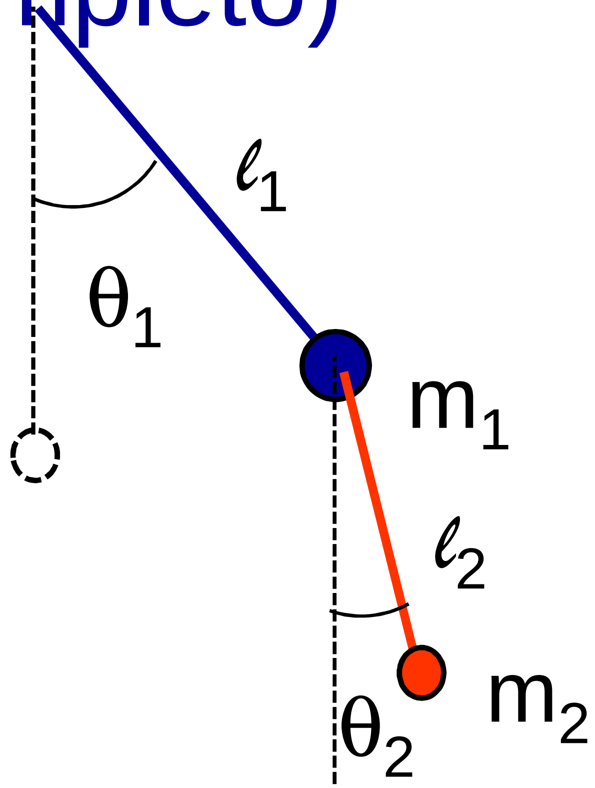
$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \frac{(m_1+m_2)}{2} l_1^2 (\dot\theta_1)^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 (\dot\theta_2)^2 \\ & + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ & - (m_1+m_2) g l_1 (1-\cos\theta_1) \\ & - m_2 g l_2 (1-\cos\theta_2)\end{aligned}$$




Equações de Lagrange:

$$\begin{cases} p_{\theta 1} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_1} = (m_1+m_2) l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\[2ex] p_{\theta 2} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_2} = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) \\[2ex] \dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -(m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_1-\theta_2) \\[2ex] \dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \sin(\theta_1-\theta_2) \end{cases}$$

# Mecânica: Pêndulo duplo (completo)




Para colocarmos em uma forma que possamos aplicar o método de Runge-Kutta, precisamos inverter as duas primeiras equações:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_2 = \dfrac{p_{\theta 1} - (m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1}{m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_1-\theta_2)} \\ \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \dfrac{l_2 p_{\theta 1} - l_1 p_{\theta 2}\cos(\theta_1-\theta_2)}{l_1^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1-\theta_2))} \\ \Rightarrow \dot{\theta}_2 = \dfrac{-l_2 p_{\theta 1}\cos(\theta_1-\theta_2) + l_1(1+m_1/m_2)p_{\theta 2}}{l_1 l_2^2 (m_1 + m_2\sin^2(\theta_1-\theta_2))} \end{cases}$$

e substituir para obter o *Hamiltoniano*. $\mathcal{H} = \dot{\theta}_1 p_{\theta 1} + \dot{\theta}_2 p_{\theta 2} - \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2(\theta_1-\theta_2)}\left[\frac{p_{\theta 1}^2}{2m_1 l_1^2} + \frac{(m_1+m_2)p_{\theta 2}^2}{2m_1 m_2 l_2^2} - \frac{p_{\theta 1}^2 p_{\theta 2}^2 \cos(\theta_1-\theta_2)}{m_1 l_1 l_2}\right] \\ & + (m_1+m_2) g l_1 (1-\cos\theta_1) + m_2 g l_2 (1-\cos\theta_2) \end{aligned}$$

# Mecânica: Pêndulo duplo (completo)

e chegamos às *Equações de Hamilton*:

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_1}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta 1}} = \dfrac{l_2 p_{\theta 1} - l_1 p_{\theta 2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1^2 l_2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \dfrac{d\theta_2}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\theta 2}} = \dfrac{-l_2 p_{\theta 1} \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_1 (1 + m_1/m_2) p_{\theta 2}}{l_1 l_2^2 (m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))} \\ \dfrac{dp_{\theta 1}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 - A(\theta_1, \theta_2, p_{\theta 1}, p_{\theta 2}) + B(\theta_1, \theta_2, p_{\theta 1}, p_{\theta 2}) \\ \dfrac{dp_{\theta 2}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + A(\theta_1, \theta_2, p_{\theta 1}, p_{\theta 2}) - B(\theta_1, \theta_2, p_{\theta 1}, p_{\theta 2}) \end{cases}$$

onde A e B são dadas por:

$$\begin{cases} A(\theta_1, \theta_2, p_{\theta 1}, p_{\theta 2}) = \dfrac{p_{\theta 1} p_{\theta 2} \sin(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]} \\ B(\theta_1, \theta_2, p_{\theta 1}, p_{\theta 2}) = \dfrac{l_2^2 m_2 p_{\theta 1}^2 + l_1^2 (m_1 + m_2) p_{\theta 2}^2 - l_1 l_2 m_2 p_{\theta 1} p_{\theta 2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2 l_1^2 l_2^2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)]^2} \sin 2(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$