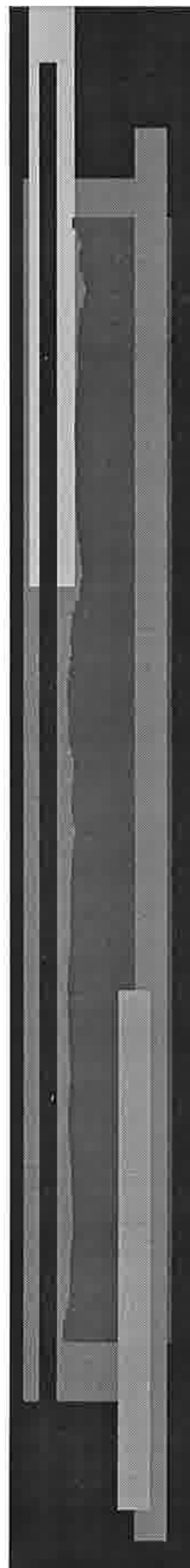


Distribuição de Renda

Medidas de
Desigualdade
e Pobreza

Rodolfo Hoffmann

edusp



MEDIDAS DE POBREZA

9.1 O CONCEITO DE POBREZA

Quando dispomos apenas de informações sobre a renda das pessoas (ou das famílias), são consideradas pobres todas as pessoas cuja renda for igual ou menor do que um valor preestabelecido, denominado *linha de pobreza*.

Um problema dessa abordagem é que a renda é uma medida bastante imperfeita das condições de vida de uma pessoa (ou família), embora seja, nas economias de mercado, a melhor medida isolada dessas condições. Dado um certo nível de renda para uma família, as condições de saúde de seus membros, por exemplo, podem fazer com que ela esteja ou não em condições de pobreza. Cabe lembrar que o lema da utopia igualitária não afirma que todos devam receber a mesma renda, mas sim que todos devam receber de acordo com suas necessidades.

Outro problema fundamental da obtenção das medidas de pobreza com base em dados sobre renda é a ausência de um critério claro para estabelecer a linha de pobreza, fazendo com que a escolha desse valor tenha muito de arbitrário. Pode-se afirmar que a linha de pobreza é o nível de renda que permite à pessoa ter uma vida digna. Entretanto, isso apenas transfere o problema para a definição do que é "necessário" para uma vida digna.

Um procedimento usual para determinar a linha de pobreza consiste em obter, inicialmente, o valor de uma cesta de alimentos que atenda às necessidades nutricionais da família, levando em consideração os alimentos usuais das

famílias de baixa renda. Em seguida esse valor é multiplicado por um coeficiente, tendo em vista as despesas necessárias com moradia, vestuário, transporte, saúde, educação, etc.¹. Um método simples consiste em multiplicar o valor daquela cesta de alimentos por dois, admitindo que a alimentação represente metade das despesas essenciais².

Para contornar o problema causado pelo caráter arbitrário da linha de pobreza podemos calcular as medidas de pobreza considerando vários valores para a linha.

É importante ressaltar que o caráter arbitrário da linha de pobreza não afeta a validade de uma comparação de medidas de pobreza para duas distribuições, desde que os critérios utilizados para determinar as duas linhas de pobreza sejam consistentes. Se estivermos, por exemplo, comparando duas regiões do Brasil sem diferenças substanciais de custo de vida, será válido comparar medidas de pobreza obtidas utilizando uma única linha de pobreza (cujo valor pode ser estabelecido com grande dose de arbitrariedade). Se houver diferenças de custo de vida entre as duas regiões, as linhas de pobreza usadas deverão refletir, apropriadamente, essas diferenças. Note que só estamos interessados em diferenças de custo de vida para os pobres.

Vejam os o problema da determinação da linha de pobreza quando desejamos fazer comparações de medidas de pobreza ao longo do tempo. Deveríamos considerar, nas duas datas em comparação, o valor do *mesmo conjunto de bens e serviços* essenciais? É claro que este procedimento não leva em consideração a possibilidade de surgimento de novos bens e serviços, e desaparecimento de outros. Uma alternativa é manter fixo o valor real da linha de pobreza, usando como deflator um índice de custo de vida. Em períodos com inflação elevada os resultados serão bastante sensíveis ao índice de custo de vida escolhido.

Quando, em comparações ao longo do tempo, fixamos o valor real da linha de pobreza, estamos medindo a evolução da *pobreza absoluta*.

Todos os estudiosos do assunto reconhecem que existe um aspecto *relação* na pobreza, pois o conjunto de bens e serviços considerados "necessários" aumenta com o desenvolvimento e o crescimento da renda *per capita* na população. Por isso alguns autores propõem que a linha de pobreza seja definida

1. Rocha (1988) usa esse procedimento para determinar linhas de pobreza para as regiões metropolitanas do Brasil. Uma discussão adicional sobre o conceito de pobreza pode ser encontrada em Rocha (1996).

2. Ver Molina (1982).

com base na renda média ou como um percentil da distribuição. Assim, seriam consideradas pobres as pessoas cuja renda estivesse abaixo do terceiro decil, por exemplo. Neste caso a medida da pobreza se confunde com uma medida de desigualdade da distribuição da renda.

Talvez a solução ideal, em comparações ao longo do tempo, fosse utilizar uma linha de pobreza cujo valor real crescesse, refletindo o aumento de despesas exigido pelas novas condições de vida, como, por exemplo, o crescente custo de transporte devido ao agigantamento das concentrações urbanas e as crescentes exigências de escolaridade para ingressar no mercado de trabalho. São óbvias, entretanto, as dificuldades de quantificar esses fenômenos.

Um outro problema metodológico dos estudos sobre pobreza com base na distribuição de renda em uma população é a escolha da unidade da análise e da variável. As unidades de análise podem ser as pessoas (todas, sem restrição), as economicamente ativas, apenas as ocupadas, as famílias ou os domicílios. A variável analisada pode ser a renda recebida pelas pessoas, a renda familiar, a renda por domicílio ou a renda familiar *per capita*. É claro que a disponibilidade de dados determina, em grande parte, a unidade de análise e a variável que serão utilizadas. De acordo com os ideais democráticos, cada pessoa tem direito, individualmente, ao bem-estar. Assim, a unidade de análise para mensuração da pobreza deve ser a pessoa. Por outro lado, se considerarmos que dentro das famílias há um intenso processo de redistribuição da renda, verifica-se que o nível de consumo (e bem-estar) de uma pessoa não é determinado pela sua renda pessoal, mas sim pela renda *per capita* da família à qual pertence. É aconselhável, portanto, utilizar dados sobre a distribuição das pessoas de acordo com a sua renda familiar *per capita*. Um aperfeiçoamento adicional consistiria em calcular uma renda familiar por adulto-equivalente, levando em consideração a variação das necessidades de consumo com a idade das pessoas e as “economias de escala” nas despesas familiares.

Também, é possível medir o grau de pobreza mediante suas manifestações ou conseqüências, como as condições inadequadas de habitação, a mortalidade infantil, a desnutrição etc. O crescimento de uma criança, especialmente nos primeiros anos de vida, é muito sensível aos efeitos da desnutrição causada por alimentação inadequada e/ou problemas de saúde, geralmente associados à pobreza. Assim, a proporção de crianças de menos de cinco anos com altura muito baixa pode ser utilizada como um indicador de pobreza³.

3. Ver Monteiro (1992 e 1995) e Hoffmann (1995c e 1995d).

Neste texto, vamos nos limitar, entretanto, às medidas de pobreza baseadas em dados sobre a renda das pessoas ou das famílias.

9.2 A PROPORÇÃO DE POBRES, A INSUFICIÊNCIA DE RENDA E O ÍNDICE DE POBREZA DE SEN

Dada uma população com n pessoas (ou famílias), seja x_i (com $i = 1, \dots, n$) a renda da i -ésima pessoa. Vamos admitir que as pessoas estão ordenadas conforme valores crescentes da renda, isto é,

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$$

Seja z a linha de pobreza. Vamos admitir que há p pessoas pobres, isto é, $x_p \leq z$ e $x_{p+1} > z$. A proporção de pobres (H) é

$$H = \frac{p}{n} \quad (9.1)$$

Essa é uma medida que capta apenas a *extensão* da pobreza, sendo insensível à *intensidade* da pobreza. É óbvio que o valor de H não é afetado pela redução da renda de um pobre.

A *insuficiência de renda* de um pobre é definida como $z - x_i$ (com $i \leq p$), ou seja, é o montante que falta para que sua renda atinja a linha de pobreza. A insuficiência de renda para todos os pobres é

$$\sum_{i=1}^p (z - x_i)$$

Fixado o número de pobres, o valor máximo dessa insuficiência de renda, que seria observado quando os p pobres tivessem renda nula, é pz .

O quociente entre a insuficiência de renda dos p pobres e seu valor máximo é denominado de *razão de insuficiência de renda* (I):

$$I = \frac{1}{pz} \sum_{i=1}^p (z - x_i) \quad (9.2)$$

Seja m a renda média dos pobres, isto é,

$$m = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i \quad (9.3)$$

Verifica-se, então, que

$$I = 1 - \frac{m}{z} \quad (9.4)$$

Essa expressão mostra que, dados os valores de z e m , o valor da razão de insuficiência de renda é insensível ao número de pobres.

As medidas H e I apresentam, portanto, defeitos e qualidades complementares. Enquanto H é insensível à intensidade da pobreza de cada pessoa (medida pela sua insuficiência de renda), I é insensível à extensão da pobreza. Uma solução, obviamente, é adotar o produto HI como medida de pobreza.

Em trabalho clássico no tema, Sen (1976) desenvolve uma medida de pobreza que leva em consideração tanto a extensão quanto a intensidade da pobreza, e também a desigualdade da distribuição da renda entre os pobres. Partindo de um conjunto de axiomas ele chega à expressão

$$P = \frac{2}{(p+1)nz} \sum_{i=1}^p (z - x_i)(p+1-i) \quad \text{ou} \quad (9.5)$$

$$P = \frac{2}{(p+1)nz} \left[\frac{zp(p+1)}{2} - (p+1) \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{i=1}^p ix_i \right] \quad (9.6)$$

ou, ainda,

$$P = \frac{p}{n} \left(1 - \frac{2m}{z} + \frac{2}{p(p+1)z} \sum_{i=1}^p ix_i \right) \quad (9.7)$$

Observa-se, na expressão (9.5), que a insuficiência de renda de cada pobre é ponderada por um número $(p+1-i)$ que indica a ordem da respectiva intensidade da pobreza. Esse número de ordem varia de 1, para o pobre menos pobre, até p , para o pobre mais pobre.

Pode-se verificar que o índice de Sen (P) varia de zero a 1, com $P = 0$ quando todas as pessoas têm renda maior do que z e $P = 1$ quando todas as pessoas têm renda igual a zero.

De acordo com a equação (3.16), o índice de Gini da distribuição da renda entre os p pobres é

$$G_* = \frac{2}{p^2 m} \sum_{i=1}^p i x_i - \left(1 + \frac{1}{p}\right) \quad (9.8)$$

Das equações (9.7) e (9.8), lembrando as (9.1) e (9.4) e após uma série de manipulações algébricas, obtemos

$$P = H \left[I + \frac{p}{p+1} (1-I) G_* \right] \quad (9.9)$$

Como mostrou o próprio Sen (1976), para p bastante grande o índice fica

$$P = H [I + (1-I) G_*] \quad (9.10)$$

Note que o índice de pobreza de Sen se reduz ao produto HI quando todos os pobres tiverem a mesma renda.

Posteriormente foram apresentadas várias propostas de medidas de pobreza, muitas delas consistindo em modificações do índice de Sen. Uma revisão sobre este tema pode ser encontrada em Romão (1982 e 1990).

→ 9.3 O ÍNDICE DE FOSTER, GREER E THORBECKE

Um novo marco no desenvolvimento das medidas de pobreza é o artigo de Foster, Greer e Thorbecke (1984) analisando a família de índices

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{n z^\alpha} \sum_{i=1}^p (z - x_i)^\alpha \quad \text{com} \quad \alpha \geq 0 \quad (9.11)$$

Essa medida é igual à proporção de pobres (H), quando $\alpha = 0$, e é igual a HI , quando $\alpha = 1$. Denomina-se índice de Foster, Greer e Thorbecke o valor obtido com $\alpha = 2$:

$$\varphi = \frac{1}{nz^2} \sum_{i=1}^p (z - x_i)^2 \quad (9.12)$$

Pode-se verificar que $\varphi(\alpha)$, da mesma maneira que o índice de Sen, varia de zero a 1, com $\varphi(\alpha) = 0$ quando todas as pessoas têm renda maior do que z e $\varphi(\alpha) = 1$ quando todas as rendas são iguais a zero.

De acordo com as expressões (6.1) e (2.2), o coeficiente de variação das rendas das p pessoas pobres é

$$C_* = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i^2 - m^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Então,

$$C_*^2 = \frac{1}{pm^2} \sum_{i=1}^p x_i^2 - 1 \quad (9.13)$$

Das equações (9.12) e (9.13), após algumas transformações algébricas, obtemos

$$\varphi = H \left[I^2 + (1 - I)^2 C_*^2 \right] \quad (9.14)$$

Note a analogia entre as expressões (9.10) e (9.14). Tanto o índice de Sen quanto o índice de Foster, Greer e Thorbecke são funções da proporção de pobres (H), da razão de insuficiência de renda (I) e de uma medida da desigualdade da distribuição da renda entre os pobres.

Se não houver desigualdade entre os pobres, temos $C_* = 0$ e $\varphi = HI^2$.

Uma propriedade importante da família de índices (9.11) é a sua decomposição, quando uma população com N pessoas é dividida em k grupos ou regiões. Retomando a simbologia utilizada nas seções 3.10 e 4.5, vamos indicar a renda da i -ésima pessoa do h -ésimo grupo por x_{hi} , com $i = 1, \dots, n_h$ e $h = 1, \dots, k$. A participação do h -ésimo grupo na população é $\pi_h = n_h / N$. Vamos admitir que a linha de pobreza (z) é a mesma para todos os grupos e que, dentro de cada grupo, as rendas estão ordenadas de maneira que

$$x_{h1} \leq x_{h2} \leq \dots \leq x_{hp_h} \leq z < \dots \leq x_{hm_h}$$

Então, p_h é o número de pobres no h -ésimo grupo e o índice (9.11) dentro desse grupo é

$$\varphi_h(\alpha) = \frac{1}{n_h z^\alpha} \sum_{i=1}^{p_h} (z - x_{hi})^\alpha \quad (9.15)$$

O índice para toda a população é

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{N z^\alpha} \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^{p_h} (z - x_{hi})^\alpha \quad (9.16)$$

Das expressões (9.15) e (9.16) verifica-se, facilmente, que

$$\varphi(\alpha) = \sum_{h=1}^k \pi_h \varphi_h(\alpha) \quad (9.17)$$

Esse resultado mostra que o índice $\varphi(\alpha)$ para toda a população é igual à soma dos valores do produto do índice dentro de cada grupo pela respectiva participação na população. O produto $\pi_h \varphi_h(\alpha)$ corresponde, portanto, à contribuição do h -ésimo grupo para a pobreza global.

Se a divisão da população for feita conforme as regiões de um país e a linha de pobreza for diferente para cada região, a expressão (9.15) pode ser adaptada, substituindo z pela linha de pobreza específica da h -ésima região (z_h), e a expressão (9.17) passa a ser, por definição, a medida da pobreza global.

A expressão (9.17) mostra que, fixada a distribuição da população pelos k grupos, alterações na renda das pessoas que causarem um aumento do índice $\varphi_h(\alpha)$ dentro de um ou mais grupos levarão, necessariamente, a um aumento da medida de pobreza em toda a população.

Cabe ressaltar que o índice de pobreza de Sen, devido à sua associação com o índice de Gini, não apresenta as propriedades de decomposição da família de índices de Foster, Greer e Thorbecke. Podem ser construídos até mesmo exemplos de uma população dividida em grupos em que determinadas alterações nas rendas causam aumento do índice de Sen dentro de todos os grupos e, ao mesmo tempo, diminuição do índice de Sen para toda a população (ver exercício 3).

9.4 O EFEITO DA REDUÇÃO DA RENDA DE UM POBRE

Nesta seção, veremos como a redução da renda de um pobre afeta as medidas de pobreza mencionadas anteriormente, verificando como esse efeito varia com a renda desse pobre⁴.

Seja θ o valor subtraído da renda x_h de uma pessoa pobre ($h \leq p$). O efeito dessa redução da renda de um pobre sobre o valor do índice de pobreza será, em geral, função de θ . Para facilitar as comparações vamos considerar o valor do limite

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d\Pi}{d\theta} \quad (9.18)$$

onde Π representa um índice de pobreza qualquer.

De acordo com a equação (9.11), após a redução da renda x_h para $x_h - \theta$, o índice $\varphi(\alpha)$ fica

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{nz^\alpha} \left[\sum_{i \neq h} (z - x_i)^\alpha + (z - x_h + \theta)^\alpha \right]$$

Então,

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\theta} = \frac{\alpha(z - x_h + \theta)^{\alpha-1}}{nz^\alpha} \quad e$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(\alpha)}{\theta} = \frac{\alpha(z - x_h)^{\alpha-1}}{nz^\alpha} \quad (9.19)$$

Sabemos que para $\alpha = 0$, o índice $\varphi(\alpha)$ é a proporção de pobres. Note que a expressão (9.19) é igual a zero quando $\alpha = 0$, confirmando o fato óbvio de que a proporção de pobres é insensível à redução da renda de um pobre.

4. Para a família de índices proposta por Foster, Greer e Thorbecke, essa análise da sensibilidade à redução da renda de um pobre está implícita na discussão que os autores apresentam sobre a obediência dos índices aos axiomas de monotonicidade, transferência e sensibilidade a transferências.

Quando $\alpha = 1$, o índice $\varphi(\alpha)$ é igual a HI . De acordo com a equação (9.19), com $\alpha = 1$, temos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta(HI)}{\theta} = \frac{1}{nz} \quad (9.20)$$

mostrando que o produto HI é um índice de pobreza cuja sensibilidade à redução da renda de um pobre independe de x_h , isto é, independe da renda prévia desse pobre.

Para $\alpha = 2$, temos, de acordo com (9.19),

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\theta} = \frac{2(z - x_h)}{nz^2} \quad (9.21)$$

mostrando que a sensibilidade do índice de Foster, Greer e Thorbecke é diretamente proporcional à insuficiência de renda da pessoa pobre cuja renda é reduzida.

Para obter a expressão para a sensibilidade do índice de Sen à redução da renda (x_h com $h \leq p$) do h -ésimo pobre, vamos admitir que o valor reduzido ($x_h - \theta$) passe a ocupar a g -ésima posição (com $g < h$). Com isso as pessoas com rendas $x_g, x_{g+1}, \dots, x_{h-1}$ passarão a ocupar posições de ordem uma unidade acima das suas posições anteriores. De acordo com a equação (9.6), a consequente alteração no valor do índice de Sen é

$$\Delta P = \frac{2}{(p+1)nz} \left[\theta(p+1) + g(x_h - \theta) - hx_h + \sum_{i=g}^{h-1} (i+1)x_i - \sum_{i=g}^{h-1} ix_i \right] \quad \text{ou}$$

$$\Delta P = \frac{2}{(p+1)nz} \left[\theta(p+1-g) - x_h(h-g) + \sum_{i=g}^{h-1} x_i \right]$$

ou, ainda,

$$\Delta P = \frac{2}{(p+1)nz} \left[\theta(p+1-g) - \sum_{i=g}^{h-1} (x_h - x_i) \right] \quad (9.22)$$

No caso de uma distribuição discreta, se θ for bastante pequeno não haverá reordenação das pessoas e teremos $g = h$. Então,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\theta} = \frac{2(p+1-h)}{(p+1)nz} \quad (9.23)$$

No caso de uma distribuição contínua, com função de densidade $f(x)$ e função de distribuição $F(x)$, a expressão (9.22) corresponde a

$$\Delta P = \frac{2}{nzF(z)} \left\{ \theta [F(z) - F(x_h - \theta)] - \int_{x_h - \theta}^{x_h} (x_h - x) dF(x) \right\}$$

Como

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \int_{x_h - \theta}^{x_h} (x_h - x) dF(x) = 0$$

conclui-se que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\theta} = \frac{2[F(z) - F(x_h)]}{nzF(z)} \quad (9.24)$$

Se a renda estiver *uniformemente* distribuída no intervalo de a até b , temos $F(x) = (x - a) / (b - a)$ e, com $a < z < b$, verifica-se que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\theta} = \frac{2(z - x_h)}{nz(z - a)}$$

Lembrando a expressão (9.21), observa-se que, neste caso, se $a = 0$, a sensibilidade do índice de Sen é idêntica à sensibilidade do índice de Foster, Greer e Thorbecke.

Para visualizar e comparar a sensibilidade das diversas medidas de pobreza (Π) à redução (θ) na renda (x_h) de um pobre, vamos construir curvas mostrando como o valor de

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi}{\theta} \quad (9.25)$$

varia em função de x_h . Para fazer isso no caso do índice de Sen é necessário conhecer a forma da distribuição de renda. Vamos considerar, aqui, uma distribuição log-normal em que a média e a variância dos logaritmos das rendas são, respectivamente, $\mu = -0,7$ e $\sigma^2 = 1,5$. Neste caso, o rendimento médio é 1,05, o rendimento mediano é 0,50, a moda é 0,11 e o índice de Gini é 0,61. Trata-se de

características semelhantes às da distribuição da renda entre as pessoas, no Brasil, em 1980, classificadas de acordo com o rendimento familiar *per capita*, e utilizando como unidade de medida o maior salário mínimo vigente no país em agosto de 1980 (ver Hoffmann, 1992).

Para essa distribuição log-normal, adotando uma linha de pobreza $z = 0,25$ (salários mínimos de agosto de 1980 *per capita*), obtemos $H = 0,2876$, renda média dos pobres (m) igual a 0,1357, $HI = 0,1315$, $P = 0,1740$, $\varphi(\alpha = 1,5) = 0,09990$, $\varphi(\alpha = 2) = 0,07898$ e $\varphi(\alpha = 2,5) = 0,06425$.

Considerando a mesma distribuição log-normal, mas adotando uma linha de pobreza duas vezes maior ($z = 0,5$), obtemos $H = 0,5022$, $m = 0,2332$, $HI = 0,2680$, $P = 0,3438$, $\varphi(\alpha = 1,5) = 0,2148$, $\varphi(\alpha = 2) = 0,1777$ e $\varphi(\alpha = 2,5) = 0,1504$.

As curvas mostrando como a sensibilidade definida pela equação (9.25) varia em função de x_h , com $z = 0,25$ e $z = 0,5$, estão nas Figuras 9.1 e 9.2, respectivamente. Para fixar a escala no eixo das ordenadas consideramos uma população hipotética de 1 000 pessoas. De acordo com a expressão (9.20), a sensibilidade de $HI = \varphi(\alpha = 1)$ é representada por uma reta horizontal com ordenada $1/(nz)$, que é igual a 0,004, para $z = 0,25$, e é igual a 0,002, para $z = 0,5$. De acordo com a (9.21), a sensibilidade do índice de Foster, Greer e Thorbecke é ilustrada por uma reta decrescente; quando $x_h = 0$ o efeito é $2/(nz)$, que é igual a 0,008, para $z = 0,25$, e é igual a 0,004, para $z = 0,5$. As sensibilidades de $\varphi(\alpha = 1,5)$ e $\varphi(\alpha = 2,5)$ são representadas por curvas que são, respectivamente, côncava e convexa.

Quando a insuficiência de renda é pequena, a curva que mostra a sensibilidade do índice de Sen é convexa. À medida que aumenta a insuficiência de renda, a sua inclinação, em valor absoluto, aumenta, atingindo um máximo no ponto correspondente à moda da distribuição da renda (que neste caso é $x = 0,11$). Para rendas (x_h) abaixo da moda, a curva da sensibilidade do índice de Sen é côncava. Note que no limite, para $x_h = 0$, a inclinação da curva de sensibilidade é igual a zero e o efeito da redução da renda do pobre sobre o índice de Sen é igual ao seu efeito sobre o índice de Foster, Greer e Thorbecke.

Note que a posição da curva de sensibilidade do índice de Sen em relação às curvas referentes aos índices $\varphi(\alpha)$ depende da linha de pobreza adotada. Quando $z = 0,25$, a Figura 9.1 mostra que a curva de sensibilidade do índice de Sen se confunde com aquela referente ao índice $\varphi(\alpha = 1)$ para valores bastante pequenos da insuficiência de renda. Já quando $z = 0,5$, a curva de sensibilidade do índice de Sen permanece muito próxima daquela referente ao índice $\varphi(\alpha = 2,3)$ (que não aparece na Figura 9.2) no intervalo $0,35 < x_h < 0,5$.

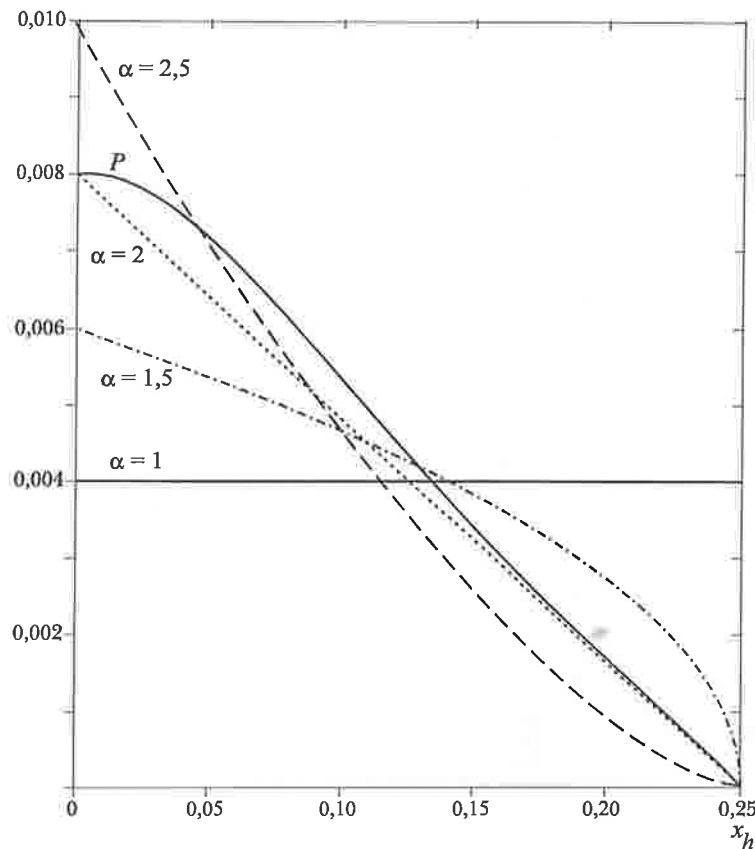


Figura 9.1. Variação da sensibilidade de diversas medidas de pobreza (Π) à redução θ na renda de um pobre, em função da renda desse pobre (x_h), para $z = 0,25$.

Tendo em vista a semelhança das curvas de sensibilidade do índice de Sen (P) e do índice de Foster, Greer e Thorbecke (φ), e considerando, por outro lado, as propriedades de decomposição de φ e o fato de seu cálculo ser mais simples, é provável que o uso de φ vá, cada vez mais, predominar sobre o uso de P .

Vamos considerar uma transferência regressiva de renda entre duas pessoas pobres, de maneira que a renda do pobre beneficiado pela transferência não supere a linha de pobreza. Sejam x_h e $x_h + \omega$ (com $\omega > 0$) as rendas antes da transferência regressiva. Após a transferência de um montante θ as rendas passam a ser $x_h - \theta$ e $x_h + \omega + \theta$, admitindo-se que $x_h + \omega + \theta \leq z$. Vamos fixar os valores de ω e θ e analisar como o efeito da transferência regressiva sobre a medida de pobreza depende de x_h . O efeito de tal transferência regressiva está associado, obviamente, com a forma da curva de sensibilidade dessa medida de pobreza à redução da renda de um pobre. Para uma curva de sensibilidade horizontal (que é o caso de HI) a transferência regressiva não afeta o valor da medida de pobreza, pois o efeito da redução da renda x_h é exatamente

compensado pelo efeito do aumento da renda $x_h + \omega$. No caso do índice de Foster, Greer e Thorbecke, cuja curva de sensibilidade é uma reta decrescente, o efeito da transferência regressiva independe da renda x_h . Se a curva de sensibilidade for convexa, o efeito da transferência regressiva diminui com x_h (aumenta com a insuficiência de renda). Finalmente, se a curva de sensibilidade à redução da renda de um pobre for côncava, então o efeito da transferência regressiva cresce com x_h (diminui quando aumenta a insuficiência de renda).

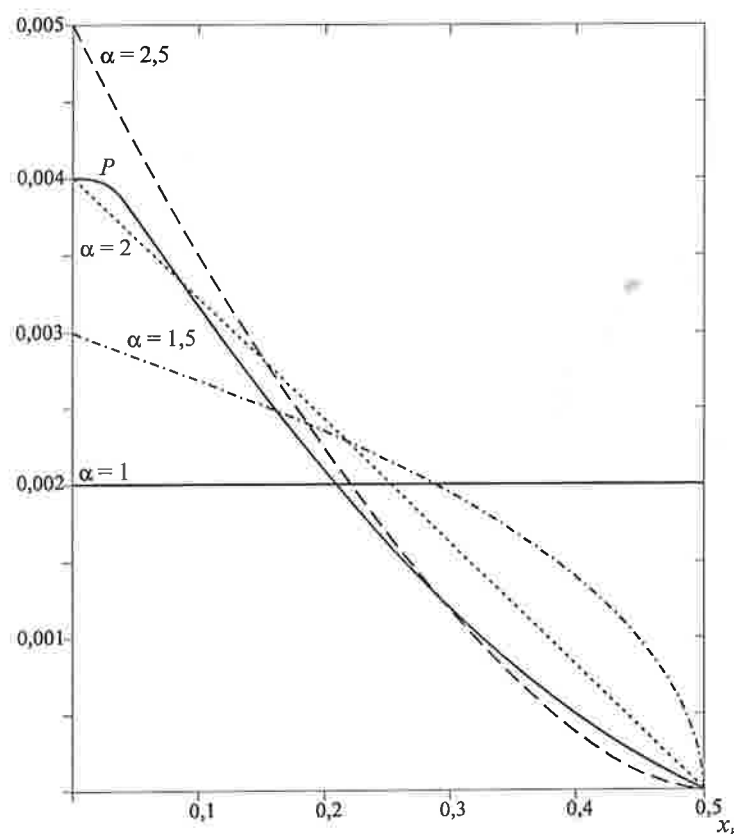


Figura 9.2. Variação da sensibilidade de diversas medidas de pobreza (II) à redução (θ) na renda de um pobre, em função da renda desse pobre (x_h), para $z = 0,5$.

Verifica-se, portanto, que para os índices $\varphi(\alpha)$ o efeito da transferência regressiva só aumenta com o nível da insuficiência de renda, se $\alpha > 2$ (fato já estabelecido por Foster, Greer e Thorbecke, 1984, p. 763). No caso do índice de Sen, o efeito da transferência regressiva só cresce com a insuficiência de renda para rendas acima da moda da distribuição.

O fato de o efeito da transferência regressiva sobre o índice de Sen aumentar com a renda x_h enquanto ela for menor do que a moda foi assinalado por Kakwani (1980), que o considerou uma limitação séria dessa medida de pobreza. Como ele admite que a linha de pobreza é menor do que a moda da distri-

buição, conclui que “[...] Sen’s measure gives the least weight to a transfer from the worst off poor and the weight increases with the level of income” (p. 443).

Em contraposição à crítica de Kakwani ao índice de Sen, cabe discutir três questões.

1. A pressuposição de que a linha de pobreza está abaixo da moda pode ser razoável para países desenvolvidos, mas nos estudos sobre pobreza no Brasil têm sido adotadas, em geral, linhas de pobreza substancialmente superiores à renda modal. Para uma distribuição log-normal com índice de Gini igual ou superior a 0,58 (que é o caso do Brasil), a proporção de pessoas com rendimento abaixo da moda não chega a 13%, bem menos do que as estimativas usuais da proporção de pobres no País⁵.
2. Parece muito razoável que uma boa medida de pobreza deva apresentar uma sensibilidade à redução da renda de um pobre que cresça com o valor da insuficiência de renda, condição que é satisfeita pelo índice de Sen e pelos índices $\varphi(\alpha)$, com $\alpha > 1$. Exigir que o efeito de uma transferência regressiva cresça com a insuficiência de renda corresponde a exigir que a curva de sensibilidade à redução da renda de um pobre seja convexa. Seria essa uma qualidade necessária de uma boa medida de pobreza? Não se estaria “transferindo” para as medidas de pobreza as qualidades desejáveis das medidas de desigualdade? Devemos lembrar que a própria noção de desigualdade está diretamente associada ao efeito de uma transferência regressiva de renda na condição de Pigou-Dalton.
3. O fato de a sensibilidade do índice de Sen à redução da renda de um pobre crescer cada vez mais lentamente com a insuficiência de renda, quando a renda se aproxima de zero, pode até mesmo ser considerada uma qualidade desejável, na medida em que tais rendas não correspondem à renda real da pessoa, como é o caso, por exemplo, das pessoas ocupadas com renda declarada igual a zero e que são membros não remunerados das famílias de pequenos agricultores.
5. Em um dos trabalhos mais recentes Rocha (1995), com base nos dados da PNAD de 1990, estima que 30,25% da população brasileira é pobre.

O principal defeito do índice de Sen é, isso sim, a dificuldade de usá-lo em análises que envolvem a decomposição da população em grupos.

9.5 ORDENAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES COM RENDAS MÉDIAS DIFERENTES: DOMINÂNCIA DE PRIMEIRA ORDEM⁶

A ordenação de distribuições com a mesma renda média, tendo em vista a desigualdade e o bem-estar da população, foi analisada na seção 5.8. Nesta seção e na próxima, vamos analisar a ordenação de distribuições que podem ter rendas médias diferentes.

O bem-estar social associado a uma distribuição $\mathbf{x}$ será indicado por $W(\mathbf{x})$ e diremos que ocorre um incremento quando um montante $\theta > 0$ é adicionado a um dos elementos de $\mathbf{x}$.

Consideremos duas distribuições, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$, com o mesmo número de elementos, que são as rendas de n pessoas. Vamos admitir que as rendas foram ordenadas, de maneira que

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad \text{e}$$

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$$

É possível provar, então, que as afirmativas (I), (II) e (III), a seguir, são equivalentes, isto é, a validade de uma delas é condição necessária e suficiente para a validade das outras:

- (I) $x_i \geq v_i$ para todo i e $x_i > v_i$ para pelo menos um valor de i .
- (II) A distribuição $\mathbf{x}$ pode ser obtida a partir da distribuição $\mathbf{v}$ fazendo uma seqüência finita e não-vazia de incrementos.
- (III) $W(\mathbf{x}) > W(\mathbf{v})$ para toda função de bem-estar social simétrica e crescente em todos seus argumentos.

6. Esta seção e a próxima estão baseadas em Rothshild e Stiglitz (1973), Dasgupta, Sen e Starret (1973), Shorrocks (1983), Foster e Shorrocks (1988a, 1988b e 1988c) e Barros e Mendonça (1995), onde o leitor encontrará um desenvolvimento mais amplo do tema.

A equivalência entre as afirmativas (I) e (II) é óbvia. Elas só estão sendo apresentadas separadamente para manter a analogia com a situação mais complexa que será analisada na próxima seção.

A simetria da função de bem-estar garante que seu valor não seja afetado pela ordenação das rendas. O fato de a função $W(v)$ ser crescente em todos os seus argumentos faz com que seu valor aumente com qualquer acréscimo a uma renda v_i .

Foster e Shorrocks (1988b) mostram, ainda, que as afirmativas (I), (II) e (III) são equivalentes à afirmativa (IV) a seguir, em que $H(x, z)$ indica a proporção de pobres na distribuição x para a linha de pobreza z :

(IV) $H(x, z) \leq H(v, z)$ para qualquer valor de z , com a desigualdade sendo válida para pelo menos um valor de z .

Note que a linha de pobreza (z), nesta afirmativa, pode ser fixada em qualquer valor, da renda mínima à renda máxima observada. É claro que considerar um valor de z muito alto faz com que $H(x, z)$ perca a característica de uma medida de pobreza absoluta. Entretanto, a equivalência entre a afirmativa (IV) e as afirmativas (I), (II) e (III) é analiticamente muito interessante.

Observada a validade de qualquer uma das quatro afirmativas [(I), (II), (III) ou (IV)], podemos dizer que a distribuição x domina a distribuição v em primeira ordem⁷.

A dominância de primeira ordem constitui um critério bastante simples e amplamente aceito como base para ordenação de distribuições. Mesmo nesse caso, entretanto, não devemos afirmar, quando (I) é válida, que a distribuição x é *melhor* do que a distribuição v . Consideremos, por exemplo, uma distribuição v em que mil pessoas têm todas renda igual a 1 e uma distribuição x obtida a partir de v , aumentando a renda de uma única pessoa para 100. Não há dúvida de que x domina v em primeira ordem. Mas decidir se x é ou não melhor do que v pode levar a uma discussão interminável sobre solidariedade, inveja, influência da desigualdade no desenvolvimento econômico, relação entre desigualdade econômica e democracia etc.

7. Ver Barros e Mendonça (1995) para uma comparação entre o critério de dominância de primeira ordem e a ordenação de distribuições com base na renda média e na desigualdade.

Se estivermos comparando uma distribuição x com n pessoas e uma distribuição v com k pessoas, com $k \neq n$, então as afirmativas (I) e (II) deixam de ter sentido. A afirmativa (I) pode ser substituída por:

- (Ia) Todo quantil de x é maior ou igual ao correspondente quantil de v , com a desigualdade sendo válida em pelo menos um caso.

Para poder comparar o bem-estar social associado a distribuições com número diferente de elementos, é necessário introduzir a pressuposição de que o bem-estar *per capita* não é alterado por uma duplicação, ou triplicação etc. da distribuição, isto é, o bem-estar *per capita* permanece o mesmo quando a distribuição é repetida duas ou mais vezes.

Considera-se, então, a distribuição

$$x^* = [x \quad x \quad \dots \quad x]$$

obtida repetindo k vezes a distribuição x , e a distribuição

$$v^* = [v \quad v \quad \dots \quad v]$$

obtida repetindo n vezes a distribuição v . Em seguida comparamos o bem-estar social associado às distribuições x^* e v^* , ambas com nk elementos. A afirmativa (III) deve, então, ser substituída por:

- (IIIa) O bem-estar social *per capita* associado a x é maior do que o associado a v para toda função de bem-estar social simétrica, crescente em todos os seus argumentos e cujo valor *per capita* permanece o mesmo quando a distribuição é repetida duas ou mais vezes.

Pode-se provar que as afirmativas (Ia), (IIIa) e (IV) são equivalentes. A validade de qualquer uma delas permite afirmar que a distribuição x domina a distribuição v em primeira ordem.

Na prática, dadas duas distribuições, x e v , a validade de (Ia) pode ser verificada traçando as respectivas curvas dos quantis⁸ e observando que elas não coincidem e que a curva correspondente a x nunca está abaixo da curva correspondente a v .

8. A curva dos quantis foi descrita na seção 2.2.

9.6 ORDENAÇÃO DE DISTRIBUIÇÕES COM RENDAS MÉDIAS DIFERENTES: DOMINÂNCIA DE SEGUNDA ORDEM

Voltemos a considerar, como no início da seção anterior, duas distribuições de renda ($\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$) com o mesmo número de pessoas e com as rendas ordenadas de maneira que

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad \text{e}$$

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n .$$

Vamos usar a letra maiúscula para indicar uma soma parcial das rendas, a partir do mais pobre:

$$X_i = \sum_{j=1}^i x_j \quad \text{e}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i v_j .$$

Verifica-se, lembrando a equação (3.2), que dividindo essas somas parciais pela respectiva renda total obtemos as ordenadas da correspondente curva de Lorenz:

$$L_x(p) = \frac{1}{n\mu_x} X_i \quad \text{e} \quad (9.26)$$

$$L_v(p) = \frac{1}{n\mu_v} V_i , \quad (9.27)$$

onde μ_x e μ_v são, respectivamente, as médias de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$, e $p = i/n$.

Consideremos as seguintes afirmativas⁹:

9. As afirmativas consideradas nesta seção são, obviamente, diferentes daquelas analisadas na seção anterior, embora estejamos usando os mesmos algarismos romanos para representá-las. É interessante notar a correspondência entre as afirmativas nas duas seções.

- (I) $X_i \geq V_i$ para todo i e $X_i > V_i$ para pelo menos um valor de i .
- (II) A distribuição $\mathbf{x}$ pode ser obtida a partir da distribuição $\mathbf{v}$ fazendo uma seqüência finita e não-vazia de *incrementos* e/ou *transferências progressivas* de renda.
- (III) $W(\mathbf{x}) > W(\mathbf{v})$ para toda função de bem-estar social crescente e Schur-côncava (lembrar que toda função Schur-côncava é simétrica).

Pode-se demonstrar que essas três afirmativas são equivalentes. Aqui, vamos nos limitar a mostrar a equivalência de (I) e (II). Tendo em vista a correspondência entre transferências regressivas e transferências progressivas, discutida na seção 3.7, é claro que a afirmativa (II) é equivalente a:

- (IIa) A distribuição $\mathbf{x}$ pode ser transformada na distribuição $\mathbf{v}$ fazendo uma seqüência finita e não-vazia de *reduções* em rendas e/ou *transferências regressivas* de renda.

Vamos mostrar, inicialmente, que (I) é condição suficiente para (IIa) fazendo um raciocínio contábil, analisando as alterações que devemos fazer nos x_i para tornar a distribuição $\mathbf{x}$ igual a $\mathbf{v}$. Temos que $X_i > V_i$ para algum valor de i . Considerando valores crescentes de i , vamos admitir que a soma parcial X_i supera a soma parcial V_i pela primeira vez quando $i = h$. Então $x_h > v_h$. Para tornar a distribuição $\mathbf{x}$ igual à distribuição $\mathbf{v}$ até esse ponto, basta subtrair o montante $\theta = x_h - v_h$ de x_h . Esse valor θ é colocado numa "reserva". Prosseguindo na seqüência de valores de i , novos casos em que $x_i > v_i$ levarão a aumentar a "reserva" graças a novas reduções em rendas x_i para torná-las iguais a v_i . Mas podem ocorrer, também, casos em que $x_i < v_i$; então será necessário acrescentar um valor a x_i gastando parcialmente ou totalmente a "reserva". O fato de que $X_i \geq V_i$, para todo i , garante que o saldo na "reserva" nunca será insuficiente para fazer os acréscimos necessários nos x_i . Se, ao chegarmos a $i = n$, a "reserva" ficar vazia é porque a distribuição $\mathbf{x}$ pôde ser transformada na distribuição $\mathbf{v}$ por meio de transferências regressivas (redução de um ou mais valores x_i e acréscimos, no mesmo montante total, a outros valores x_j , com $j > i$). Se, ao chegarmos a $i = n$, houver saldo positivo na reserva, é porque a transformação da distribuição $\mathbf{x}$ na distribuição $\mathbf{v}$ exige, além de eventuais transferências regressivas, que seja feita pelo menos uma redução de renda.

Vamos mostrar, em seguida, que (II) implica (I). Dada a distribuição $\mathbf{v}$, é óbvio que um incremento fará com que aumentem todas as somas parciais V_i a partir de certo ponto. É claro, também, que uma transferência progressiva de

v_j para v_h , com $v_h < v_j$, fará com que aumente pelo menos um valor V_i (com $h \leq i < j$). Conclui-se, portanto, que, se uma seqüência não-vazia de incrementos e/ou transferências progressivas em $\mathbf{v}$ gera a distribuição $\mathbf{x}$, a afirmativa (I) é verdadeira.

Foster e Shorrocks (1988b) mostram, ainda, que as afirmativas (I), (II) e (III) são equivalentes à afirmativa (IV) a seguir, em que $HI(\mathbf{x}, z)$ indica o valor da medida de pobreza HI na distribuição $\mathbf{x}$ para a linha de pobreza z :

(IV) $HI(\mathbf{x}, z) \leq HI(\mathbf{v}, z)$ para qualquer valor de z , com a desigualdade sendo válida para pelo menos um valor de z .

Observada a validade de qualquer uma das quatro afirmativas apresentadas nesta seção [(I), (II), (III) ou (IV)], podemos dizer que a distribuição $\mathbf{x}$ *domina* a distribuição $\mathbf{v}$ *em segunda ordem*.

Uma maneira prática de verificar se há dominância de segunda ordem entre duas distribuições é construir as respectivas curvas de Lorenz generalizadas. Shorrocks (1983) definiu a curva de Lorenz generalizada como

$$GL(p) = \mu L(p)$$

A ordenada da curva de Lorenz generalizada é, portanto, igual ao produto da renda média da distribuição pela ordenada da curva de Lorenz. Lembrando as equações (9.26) e (9.27), segue-se que as ordenadas das curvas de Lorenz generalizadas para as distribuições $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$ são, respectivamente,

$$GL_x(p) = \frac{1}{n} X_i \quad \text{e} \quad (9.28)$$

$$GL_v(p) = \frac{1}{n} V_i \quad (9.29)$$

Essas expressões mostram que a afirmativa (I) é equivalente a:

(Ia) $GL_x(p) \geq GL_v(p)$ para todo p e as duas curvas de Lorenz generalizadas não coincidem.

Se estivermos comparando uma distribuição $\mathbf{x}$ com n pessoas e uma distribuição $\mathbf{v}$ com k pessoas, com $k \neq n$, as afirmativas (I) e (II) deixam de ter sentido, mas a afirmativa (Ia) ainda pode ser analisada.

Da mesma maneira que na seção anterior, para comparar o bem-estar social associado a distribuições com número diferente de elementos, é necessário introduzir a pressuposição de que o bem-estar *per capita* permanece o mesmo quando a distribuição é repetida duas ou mais vezes. Assim, a afirmativa (III) deve ser substituída por:

(IIIa) O bem-estar social *per capita* associado a $\mathbf{x}$ é maior do que o bem-estar social *per capita* associado a $\mathbf{v}$ para toda função de bem-estar social crescente, Schur-côncava e cujo valor *per capita* permanece o mesmo quando a distribuição é repetida duas ou mais vezes.

Pode-se provar que as afirmativas (Ia), (IIIa) e (IV) são equivalentes. A validade de qualquer uma delas permite afirmar que a distribuição $\mathbf{x}$ domina a distribuição $\mathbf{v}$ em segunda ordem.

A comparação entre a afirmativa (II) desta seção com a afirmativa (II) da seção anterior mostra que a dominância de primeira ordem é condição suficiente para a dominância de segunda ordem. O exemplo numérico a seguir deixa evidente que o inverso não é verdade:

$$\mathbf{x} = [2 \quad 4 \quad 9]$$

$$\mathbf{v} = [3 \quad 3 \quad 12]$$

Como as rendas já estão ordenadas dentro de cada distribuição, basta comparar os elementos correspondentes para verificar que, em primeira ordem, $\mathbf{x}$ não domina $\mathbf{v}$, nem $\mathbf{v}$ domina $\mathbf{x}$. Por outro lado, as somas parciais X_i e V_i apresentadas na Tabela 9.1 mostram que $\mathbf{v}$ domina $\mathbf{x}$ em segunda ordem.

Tabela 9.1. Somas parciais e ordenadas das curvas de Lorenz generalizadas para as distribuições $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$.

i	x_i	v_i	X_i	V_i	GL_x	GL_v
1	2	3	2	3	2/3	1
2	4	3	6	6	2	2
3	9	12	15	18	5	6

Na mesma tabela, são apresentados os valores das ordenadas das curvas de Lorenz generalizadas para as duas distribuições, podendo-se confirmar que $\mathbf{v}$

domina $\mathbf{x}$ em segunda ordem. Note que a ordenada da curva de Lorenz generalizada no último ponto ($p = 1$) é sempre igual à média da distribuição.

É interessante notar, ainda, que a distribuição $\mathbf{v}$ pode ser transformada na distribuição $\mathbf{x}$, fazendo uma transferência regressiva (de uma unidade) entre v_1 e v_2 e uma redução (de três unidades) em v_3 .

Para ilustrar a construção e comparação de curvas de Lorenz generalizadas, vamos considerar a distribuição da renda entre pessoas economicamente ativas nos estados de São Paulo e Santa Catarina, conforme dados de uma amostra de 0,8% do Censo Demográfico de 1980. Considerando apenas as pessoas economicamente ativas com rendimento positivo, temos 10 128 milhares de pessoas no Estado de São Paulo e 1 188 milhares em Santa Catarina, representadas, na amostra, por 21 881 e 8 779 pessoas, respectivamente. Utilizando os dados do Censo sobre rendimento global de cada uma dessas pessoas foram obtidas as curvas de Lorenz generalizadas da Figura 9.3. A unidade de medida dos rendimentos é o maior salário mínimo (SM) vigente em agosto de 1980, que é o mês de referência daquele Censo Demográfico. Os rendimentos médios, para São Paulo e Santa Catarina, são 3,90 e 2,75 SM, respectivamente. Note que essas são as ordenadas das curvas para $p = 1$ na Figura 9.3.

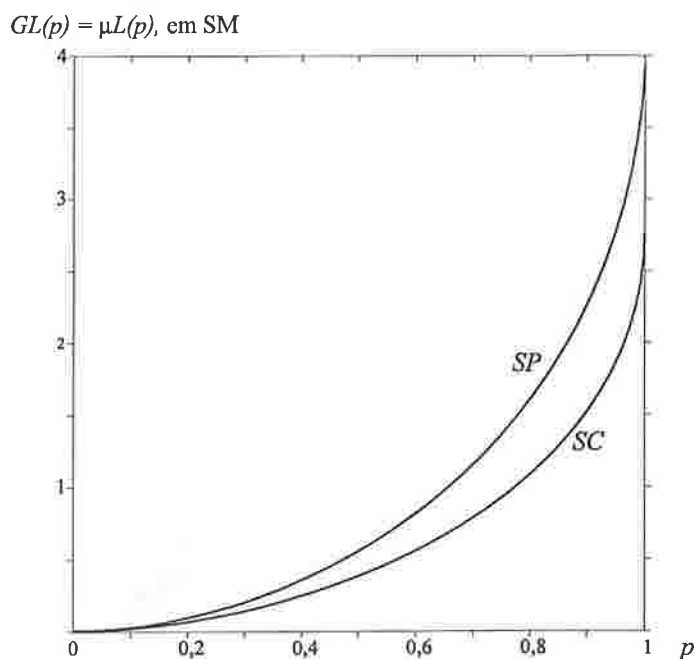


Figura 9.3. Curvas de Lorenz generalizadas para a distribuição da renda entre pessoas economicamente ativas com rendimento nos estados de São Paulo e Santa Catarina, conforme dados do Censo Demográfico de 1980.

Verifica-se que, excluindo o ponto inicial, a curva de Lorenz generalizada para Santa Catarina permanece abaixo da curva de Lorenz generalizada para o estado de São Paulo. Isso significa que a distribuição em São Paulo domina, em segunda ordem, a distribuição em Santa Catarina¹⁰.

É interessante complementar essa análise considerando outros aspectos da distribuição da renda entre a população economicamente ativa (PEA) com rendimento nos dois estados, em 1980. Verifica-se que a desigualdade é maior em São Paulo, com índice de Gini igual a 0,546, T de Theil igual a 0,623 e L de Theil igual a 0,523; em Santa Catarina esses índices são 0,507, 0,546 e 0,452, respectivamente. A curva de Lorenz para Santa Catarina fica acima da curva de Lorenz para São Paulo.

Pode-se verificar que a curva dos quantis para São Paulo (que foi apresentada na Figura 2.1) está quase sempre acima, e nunca abaixo, da curva de quantis para Santa Catarina. Portanto, apesar de a desigualdade ser menor em Santa Catarina, a distribuição de São Paulo domina a de Santa Catarina em primeira ordem (e, conseqüentemente, também em segunda ordem) porque o rendimento médio é substancialmente mais elevado em São Paulo.

EXERCÍCIOS

1. Uma população é formada por sete pessoas cujas rendas são 1, 1, 2, 4, 6, 10 e 18. Admitindo que a linha de pobreza é $z = 5$, determine:

- (a) A proporção de pobres.
- (b) A razão de insuficiência de renda.
- (c) A relação entre a insuficiência de renda e a renda total da população.
- (d) A relação entre a insuficiência de renda e a renda total dos não pobres.
- (e) O índice de pobreza de Sen.
- (f) O índice de Foster, Greer e Thorbecke.

10. É importante lembrar as limitações dos dados censitários já comentadas no capítulo 8, particularmente o fato de os dados sobre rendimento não incluírem o valor da produção para autoconsumo.

2. Seja r a razão entre a insuficiência de renda e a renda total da população, isto é,

$$r = \frac{1}{n\mu} \sum_{i=1}^p (z - x_i) \quad .$$

Prove que

$$r = H \frac{z - m}{\mu} = HI \frac{z}{\mu} \quad .$$

3. Na seção 3.10, foi apresentado um exemplo numérico de uma população dividida em dois grupos, com quatro pessoas em cada um, cujas rendas são

$$x_{11} = 3 \quad x_{12} = 3 \quad x_{13} = 3 \quad x_{14} = 51$$

$$x_{21} = 8 \quad x_{22} = 16 \quad x_{23} = 24 \quad x_{24} = 32 \quad .$$

Foram feitas três transferências de uma unidade de renda: de x_{11} para x_{13} , de x_{14} para x_{13} e de x_{23} para x_{24} . As novas rendas são:

$$x_{11}^* = 2 \quad x_{12}^* = 3 \quad x_{13}^* = 5 \quad x_{14}^* = 50$$

$$x_{21}^* = 8 \quad x_{22}^* = 16 \quad x_{23}^* = 23 \quad x_{24}^* = 33 \quad .$$

Vamos adotar uma linha de pobreza $z = 60$, fazendo com que todas as oito pessoas sejam consideradas pobres ($H = 1$).

Utilizando as fórmulas exatas (9.5) ou (9.8), mostre que os índices de Sen dentro de cada grupo e para as oito pessoas, antes das transferências, são, respectivamente, $P_1 = 0,87$, $P_2 = 0,733333$ e $P = 0,836111$. Verifique, em seguida, que após as transferências esses índices são $P_1 = 0,871667$, $P_2 = 0,735$ e $P = 0,835185$. Note que as transferências causam aumento do índice de pobreza de Sen dentro de cada um dos dois grupos e, ao mesmo tempo, diminuição do índice de Sen para toda a população.

4. A tabela a seguir mostra as rendas de uma população de 10 pessoas dividida em dois grupos. Se a linha de pobreza é $z = 5$, determine a participação do Grupo A na pobreza total medida por $\phi(\alpha)$, considerando

- (a) $\alpha = 0$.
 (b) $\alpha = 1$.
 (c) $\alpha = 2$.

Rendas	
Grupo A	Grupo B
6	9
3	2
10	2
3	7
3	8

5. Vamos considerar uma população de n pessoas com p pobres cuja renda média é m . Isso corresponde a fixar os valores da proporção de pobres (H) e da razão de insuficiência de renda.

- (a) Mostre que, nesta situação, o valor mínimo de $\varphi(\alpha)$, que ocorre quando todos os pobres têm a mesma renda, é

$$H \left(1 - \frac{m}{z} \right)^\alpha.$$

Note que esse mínimo é igual a HI^2 para $\alpha = 2$.

- (b) Mostre que, nesta situação, a desigualdade entre pobres é máxima quando Ip pobres têm renda igual a zero e os demais $(1 - I)p$ pobres têm renda igual a z .
- (c) Dados os valores de H e I , demonstre que o valor máximo de $\varphi(\alpha)$ é HI , para qualquer $\alpha > 0$.
- (d) Demonstre que, nesta situação, o valor máximo de C_*^2 (o quadrado do coeficiente de variação entre os pobres) é $I / (1 - I)$.

6. Com base na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), o IBGE (1996, p. 104) apresenta os seguintes dados sobre o rendimento de todos os trabalhos das pessoas de 10 anos ou mais de idade, ocupadas, com rendimento do trabalho, no Brasil (exclusive a população rural de Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Pará e Amapá), em 1987, 1988, 1990 e 1995:

Rendimento médio mensal real¹ de todos os trabalhos, segundo estratos delimitados por percentis da distribuição do rendimento de todos os trabalhos.

Estrato	1987	1988	1990	1995
1º décimo	29	24	29	42
2º décimo	68	57	65	91
3º décimo	98	94	80	106
4º décimo	122	114	108	147
5º décimo	161	149	146	192
6º décimo	212	193	197	244
7º décimo	279	257	265	322
8º décimo	387	366	372	448
9º décimo	608	587	582	702
10º décimo	1733	1820	1707	2044
5% mais ricos	2463	2620	2439	2912
1% mais ricos	4980	5181	4926	5813
Total	370	366	355	433

1. Valores inflacionados pelo INPC com base em setembro de 1995.

Cabe ressaltar que os dez décimos constituem uma divisão exaustiva da população. O vigésimo (5%) mais rico está incluído no décimo mais rico, e o centésimo (1%) mais rico está incluído no vigésimo mais rico.

Esses dados permitem calcular os rendimentos médios das parcelas da população localizadas entre o 90º e o 95º percentil, entre o 95º e o 99º percentil, e acima do 99º percentil. Teremos, assim, os rendimentos médios para 12 estratos que constituem uma divisão exaustiva e mutuamente exclusiva da população. Admitindo que esses 12 pontos reflitam cor-

retamente a posição relativa da curva dos quantis em cada ano, verifique se ocorre dominância de primeira ordem, comparando as distribuições de

- (a) 1995 com os demais anos.
- (b) 1987 com 1988.
- (c) 1988 com 1990.

Os dados da tabela permitem obter, também, 12 pontos da curva de Lorenz generalizada para cada ano (além da origem dos eixos). Admitindo que esses 12 pontos reflitam corretamente a posição relativa dessa curva em cada ano, verifique se ocorre dominância de segunda ordem, considerando as mesmas comparações.