Ondas

Lucy V. C. Assali

Física II – 2016 - IO

Interferência de ondas

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas de mesma frequência.

1. Ondas no mesmo sentido ⇨
$$\begin{cases} y_1(x,t) = A_1 \cos\left(kx - \omega t + \delta_1\right) \\ y_2(x,t) = A_2 \cos\left(kx - \omega t + \delta_2\right) \end{cases}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos\left[kx - \omega t + \delta'\right]}$$

onde $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}$, com $\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1$ (diferença de fase)

$$\text{e } \delta' - \delta_1 = \delta \quad \text{e} \quad \text{sen}\delta = \frac{A_2}{A}\,\text{sen}\delta_{12}$$

Como a frequência das duas ondas é a mesma, então a intensidade de cada uma delas é proporcional ao quadrado de sua amplitude, com a mesma constante de proporcionalidade. Chamando de I_1 *e* I_2 *as intensidades das componentes, a intensidade* I *da onda resultante*

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\delta_{12}}$$

Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

1. Ondas no mesmo sentido

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\delta_{12}}$$

A intensidade da onda resultante é diferente da soma das intensidades das componentes, dependendo da diferença de fase entre elas $\Rightarrow$ este fenômeno se chama ***Interferência***

Intensidade Máxima $\Rightarrow$ Interferência Construtiva quando $\cos\delta_{12} = 1$

$$\delta_{12} = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \boxed{I = I_{\text{máx}} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2}$$

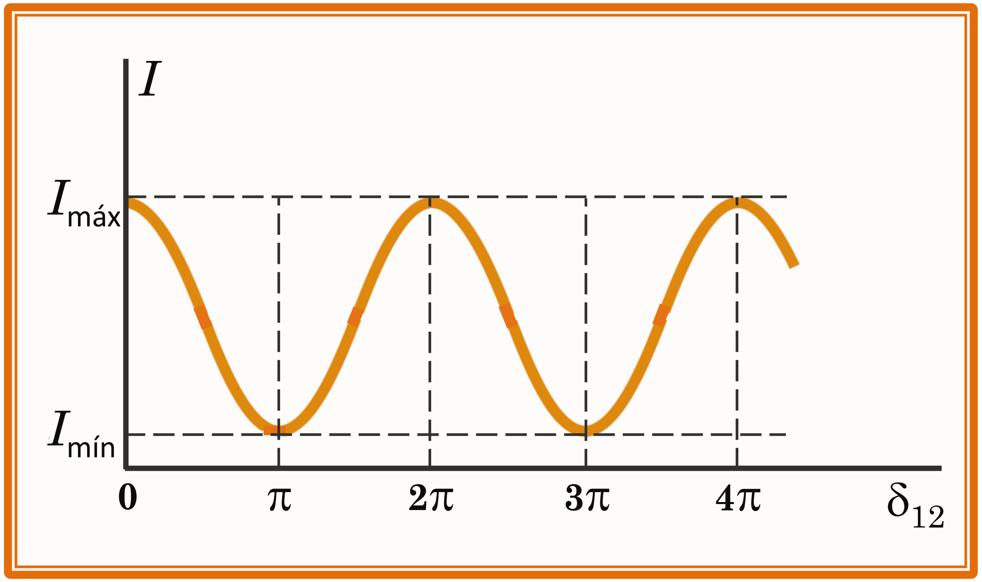
Intensidade Mínima $\Rightarrow$ Interferência Destrutiva quando $\cos\delta_{12} = -1$

$$\delta_{12} = (2m+1)\,\pi \quad (m \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \boxed{I = I_{\text{mín}} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}$$

Interferência de ondas

1. Ondas no mesmo sentido

A intensidade da onda resultante oscila entre os valores máximo e mínimo, como função da fase δ_{12}



Em particular, se $I_1 = I_2$, então $I_{máx} = 4I_1$ e $I_{mín} = 0$

Fenômenos de interferência estão entre os efeitos mais característicos da propagação de ondas

Obtenção da amplitude e da constante de fase da onda resultante:

Consideremos a superposição de duas ondas progressivas harmônicas, de mesma frequência, se propagando no mesmo sentido:

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x,t) = A_1 \cos\left[\varphi_1(x,t)\right], \quad \text{onde} \quad \varphi_1(x,t) = kx - \omega t + \delta_1 \\ y_2(x,t) = A_2 \cos\left[\varphi_2(x,t)\right], \quad \text{onde} \quad \varphi_2(x,t) = kx - \omega t + \delta_2 \end{cases}}$$

A onda resultante será:

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos\left[\varphi(x,t)\right], \text{com } \varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta'}$$

Definindo

$$\boxed{\begin{cases} \delta_2 - \delta_1 = \delta_{12} \text{ teremos que } \varphi_2 = \varphi_1 + \delta_{12} \\ \delta' - \delta_1 = \delta \quad \text{teremos que } \quad \varphi = \varphi_1 + \delta \end{cases}}$$

Podemos escrever, então, que:

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(\varphi_1 + \delta) = y_1 + y_2 = A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_1 + \delta_{12})}$$

Sabendo que

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta, \text{ onde } \cos\theta = \Re e\left[e^{i\theta}\right] \text{ e } \text{sen}\theta = \Im m\left[e^{i\theta}\right]}$$

podemos escrever que

$$\boxed{z(x,t) = Ae^{i\varphi_1}\,e^{i\delta} = e^{i\varphi_1}\left[A_1 + A_2 e^{i\delta_{12}}\right].} \tag{1}$$

Com isso teremos que $y(x,t) = \Re e[z]$.
A igualdade (1) é verdadeira para $Ae^{i\delta} = A_1 + A_2 e^{i\delta_{12}}$.
Portanto:

$$\begin{cases} \Im m\,[z] \Longrightarrow A\,\text{sen}\delta = A_2\,\text{sen}\delta_{12} \\ \Re e\,[z] \Longrightarrow A\cos\delta = A_1 + A_2\cos\delta_{12} \end{cases} \tag{2}$$

Elevando ao quadrado as equações (2) e somando os resultados temos

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}, \text{ com } \delta_{12} = \delta_2 - \delta_1 \text{ (diferença de fase)}}$$

Da equação (2) temos a relação entre δ e δ_{12}:

$$\boxed{\text{sen}\delta = \frac{A_2}{A}\,\text{sen}\delta_{12}}$$

Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

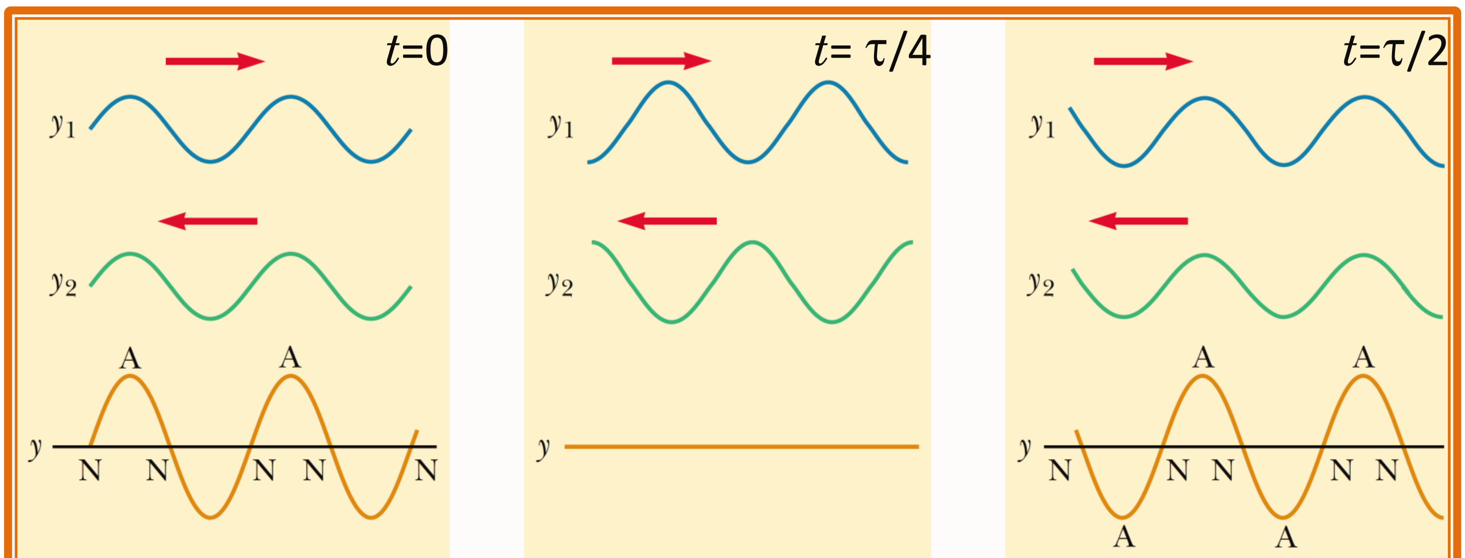
2. Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas, em sentidos opostos, que, além de terem a mesma frequência, também têm a mesma amplitude e constante de fase nula

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t) \end{cases}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2\,A\cos(kx)\cos(\omega t)}$$ ⟹ ***Onda Estacionária***

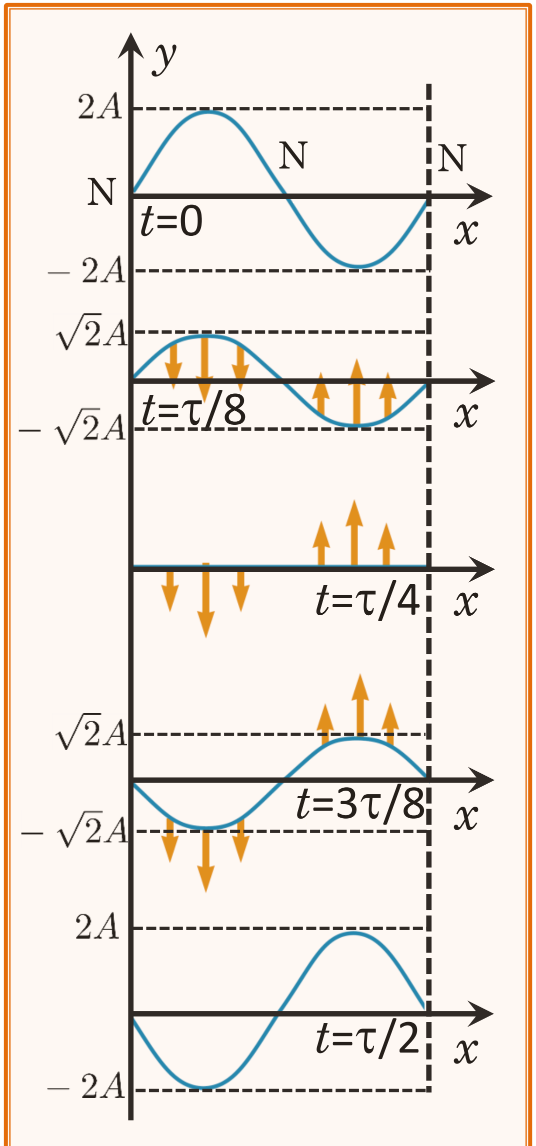
***Não há propagação**: a forma da onda permanece sempre semelhante, com o deslocamento mudando apenas de amplitude e, eventualmente, de sinal*



Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

2. Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)

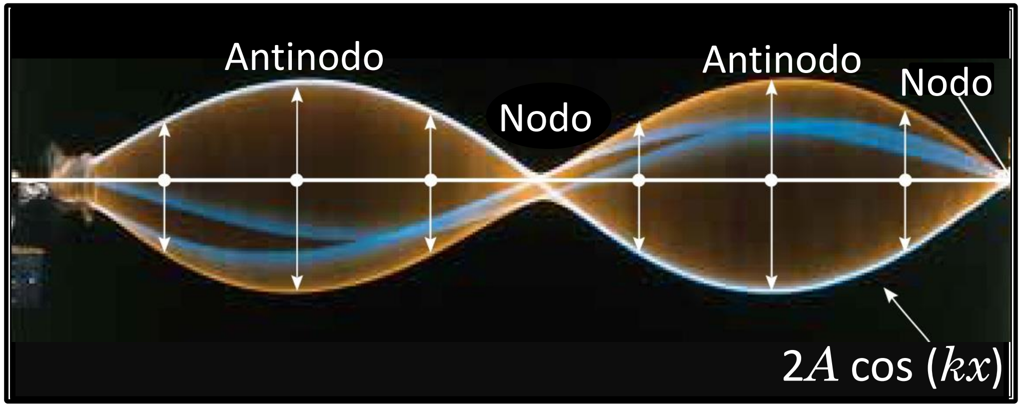


A figura mostra uma série de *"Instantâneos" de uma onda estacionária:* para $t = \tau/4$ a corda passa pela posição de equilíbrio ($y = 0$) e depois os deslocamentos trocam de sinal, até atingir amplitude máxima para $t = \tau/2$. Daí em diante os gráficos seriam percorridos em sentido inverso (de baixo para cima), até voltar a configuração inicial para $t = \tau$. O fluxo médio de energia, em uma onda estacionária, é nulo.

Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

2. Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)



A figura mostra uma fotografia, de tempo de exposição longo, de uma onda estacionária em uma corda. O comportamento temporal de um deslocamento vertical (transversal), a partir do equilíbrio, de uma partícula individual da corda é dado por $\cos(\omega t)$. Isso indica que cada partícula vibra com frequência angular ω. A amplitude da oscilação vertical de qualquer partícula depende da posição horizontal da partícula, que vibra confinada em uma função envelope $2A\cos(kx)$.

Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

3. Batimentos e velocidade de grupo

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas que se propagam no mesmo sentido, têm a mesma amplitude e constante de fase nula, mas têm frequências ligeiramente diferentes ($\therefore$ diferentes número de onda)

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos\left(k_1\, x - \omega_1\, t\right) \\ y_2(x,t) = A\cos\left(k_2\, x - \omega_2\, t\right) \end{cases}$$

$$\text{Sejam} \begin{cases} \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \overline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2\right), \text{com } \omega_1 > \omega_2 \\ \Delta k = k_1 - k_2 \ll \overline{k} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right), \text{com } k_1 > k_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left\{\cos\left[\left(\overline{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\overline{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\right\}$$

$$\boxed{y(x,t) = \mathbb{A}(x,t)\cos\left(\overline{k}x - \overline{\omega}t\right)}$$

alta frequência

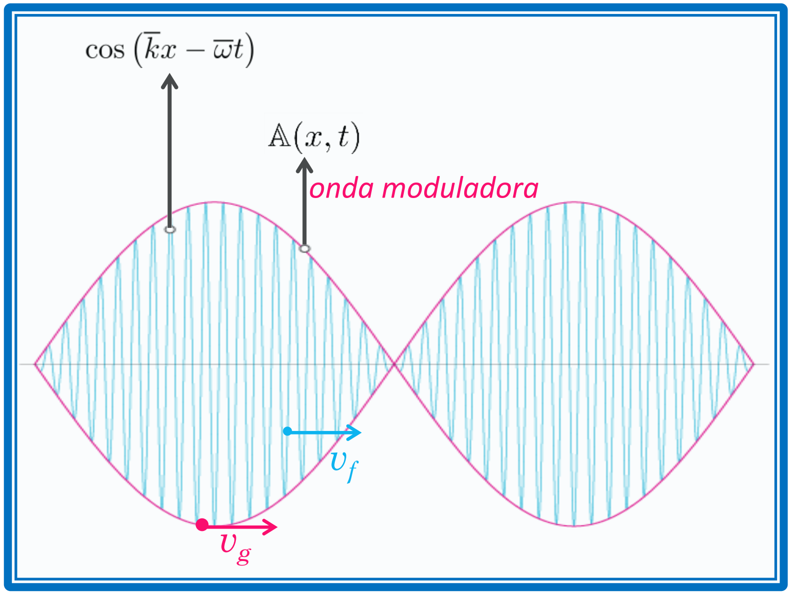
$$\boxed{\mathbb{A}(x,t) = 2\,A\cos\left[\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right]}$$

baixa frequência

Interferência de ondas

3. Batimentos e velocidade de grupo

A expressão que encontramos representa um fenômeno de batimentos: a onda encontrada é uma onda de frequência $\overline{\omega}$, elevada, que é modulada pela amplitude $\mathbb{A}$, que é outra onda com frequência $\Delta\omega$ bem mais baixa. Este é o exemplo mais simples de um grupo de ondas.



A fase desta onda é dada por:

$$\varphi(x,t) = \overline{k}x - \overline{\omega}t$$

de modo que a velocidade com que se desloca um ponto de fase constante é a velocidade de fase

$$v_f = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}}$$

A velocidade com que se desloca o grupo de ondas como um todo é a velocidade associada a um ponto da envoltória (onda moduladora), onde $\mathbb{A}$ é constante. Esta velocidade é chamada velocidade de grupo e

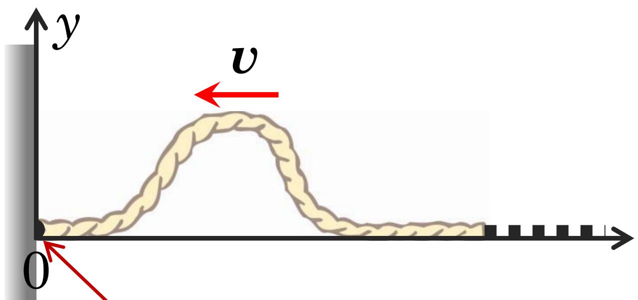
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

Reflexão de ondas

Pulso que se propaga em uma corda comprida que tem sua extremidade em um ponto O. O que acontece quando o pulso atinge O?

1. Extremidade fixa:

$y(x,t) = g(x+vt)$ (pulso antes de atingir 0)



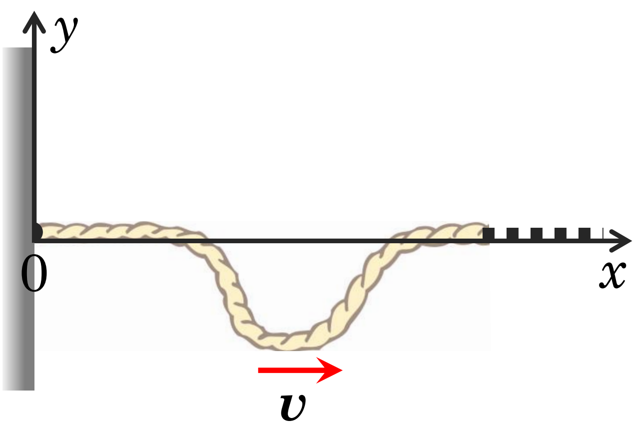
$y(0,t) = 0 \quad \forall\, t$

Solução geral: $y(x,t) = g(x+vt) + \underbrace{f(x-vt)}_{\text{nula antes de atingir 0}}$

$$y(0,t) = g(vt) + f(-vt) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(-vt) = -g(vt) \quad \forall\, t$$



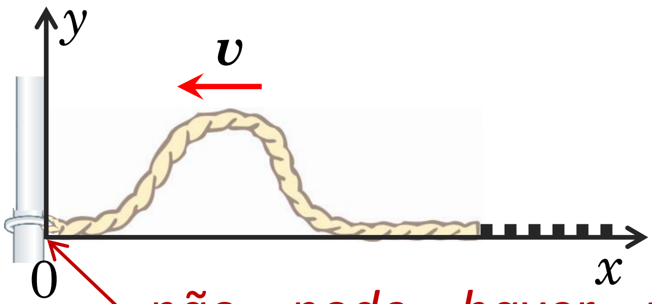
o pulso volta invertido, depois da reflexão em 0, com defasagem de 180º

Lucy V. C. Assali

Reflexão de ondas

2. Extremidade livre:

$y(x,t) = g(x+vt)$ (pulso antes de atingir 0)



Solução geral: $y(x,t) = g(x+vt) + \underbrace{f(x-vt)}_{\text{nula antes de atingir 0}}$

não pode haver força transversal sobre a corda:

$$F_y(0,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \forall\, t$$

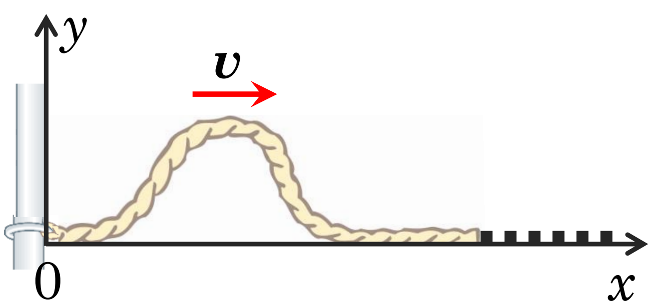
$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(-vt) + \frac{\partial g}{\partial x}(vt) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-vt) = -\frac{\partial g}{\partial x}(vt)$$

$$\Downarrow$$

$$f(-vt) = g(vt) \quad \forall\, t$$

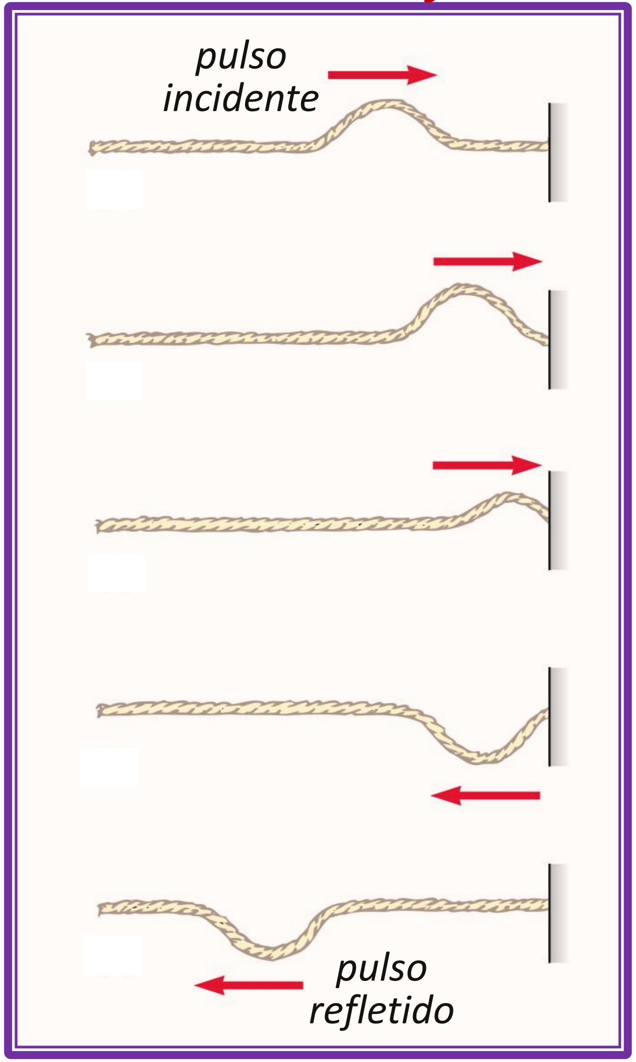


o pulso volta sem ser invertido, depois da reflexão em 0, e sem mudança de fase

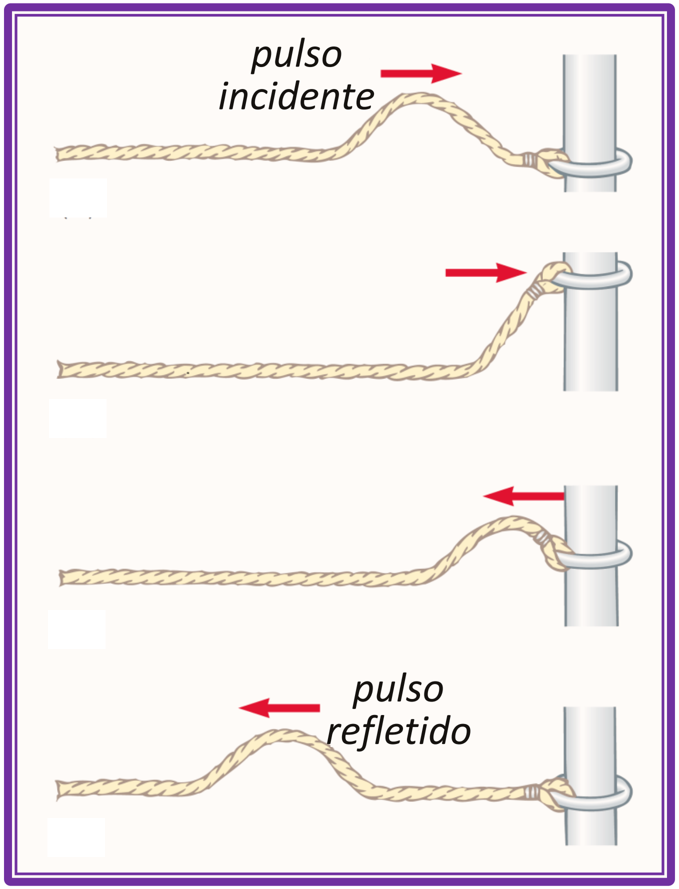
Lucy V. C. Assali

Reflexão de ondas

Extremidade fixa



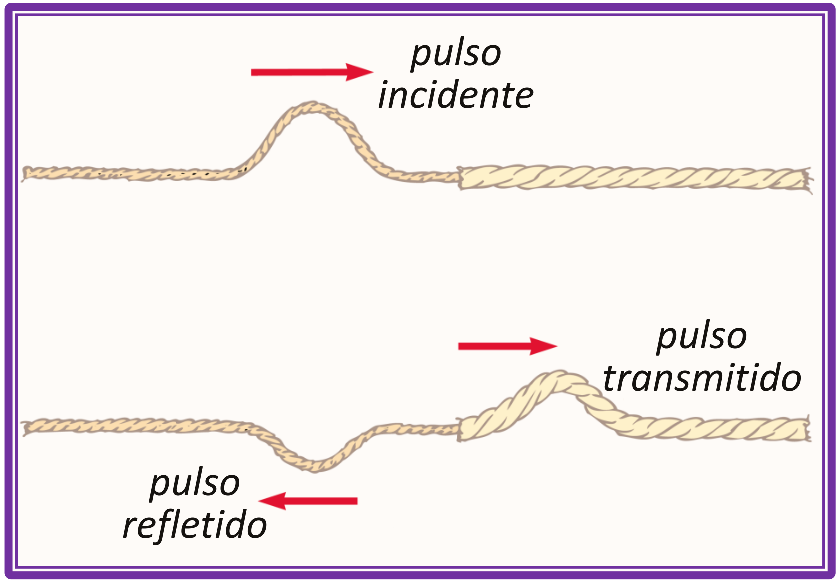
Extremidade livre

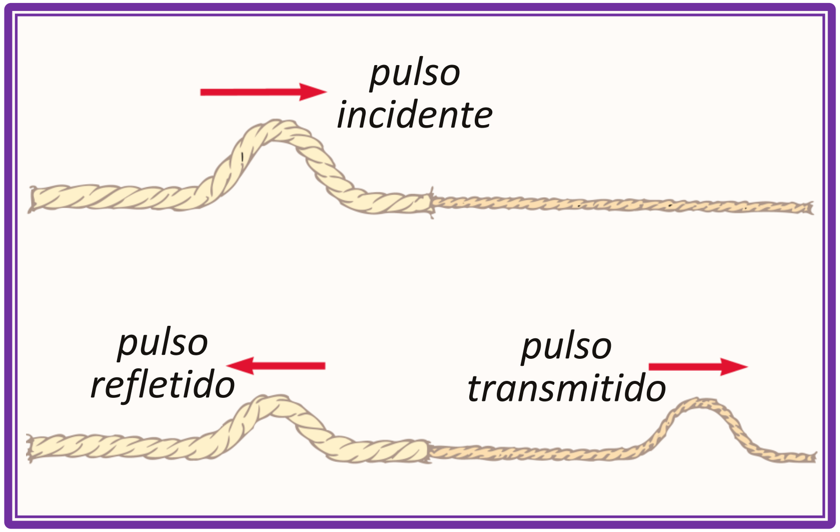


Reflexão de ondas

3. Junção de duas cordas (descontinuidade no meio):

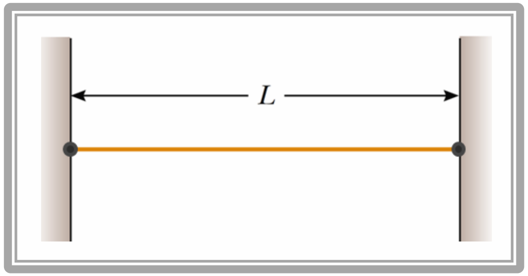
Duas cordas de diferentes densidades lineares e unidas. Se um pulso atinge a junção, onde há uma descontinuidade, há uma onda refletida e uma onda transmitida, cujas amplitudes devem ser obtidas a partir da equação da onda e das condições de contorno a que as ondas estão sujeitas na posição da descontinuidade, tal como a continuidade do deslocamento e da força nesse ponto.





Modos Normais de Vibração

- Ondas estacionárias em uma corda finita presa em ambas as extremidades:



Vamos considerar uma corda de comprimento L, fixa em ambas extremidades. Ondas estacionárias podem ser geradas na corda por uma superposição continua de ondas incidentes e refletidas nos extremos fixos. Esta corda terá um número de possíveis oscilações naturais, chamados de modos normais de vibração, cada qual com uma frequência característica.

Em geral, o movimento de uma corda vibrante é descrito por uma superposição de vários modos normais e quais destes modos estão presentes, em um determinado movimento, depende de como as oscilações tiveram início.

Condição de que as duas extremidades permaneçam fixas:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad \forall\, t$$

Característica de um Modo Normal: *Onda estacionária*

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \delta) \quad \text{solução de} \quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Lucy V. C. Assali

Modos Normais de Vibração

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}A(x)\cos(\omega t+\delta) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2}\cos(\omega t+\delta)$$

$$\boxed{\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0 \qquad \left(k = \frac{\omega}{v}\right)}$$

Solução: $A(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx), \quad \text{onde} \quad A(0) = A(L) = 0$

$$\begin{cases} A(0) = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow A(x) = b\,\mathrm{sen}(kx) \\ A(L) = 0 \Longrightarrow b\,\mathrm{sen}(kL) = 0 \Longrightarrow \boxed{k_n = \dfrac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)} \end{cases}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}v$$

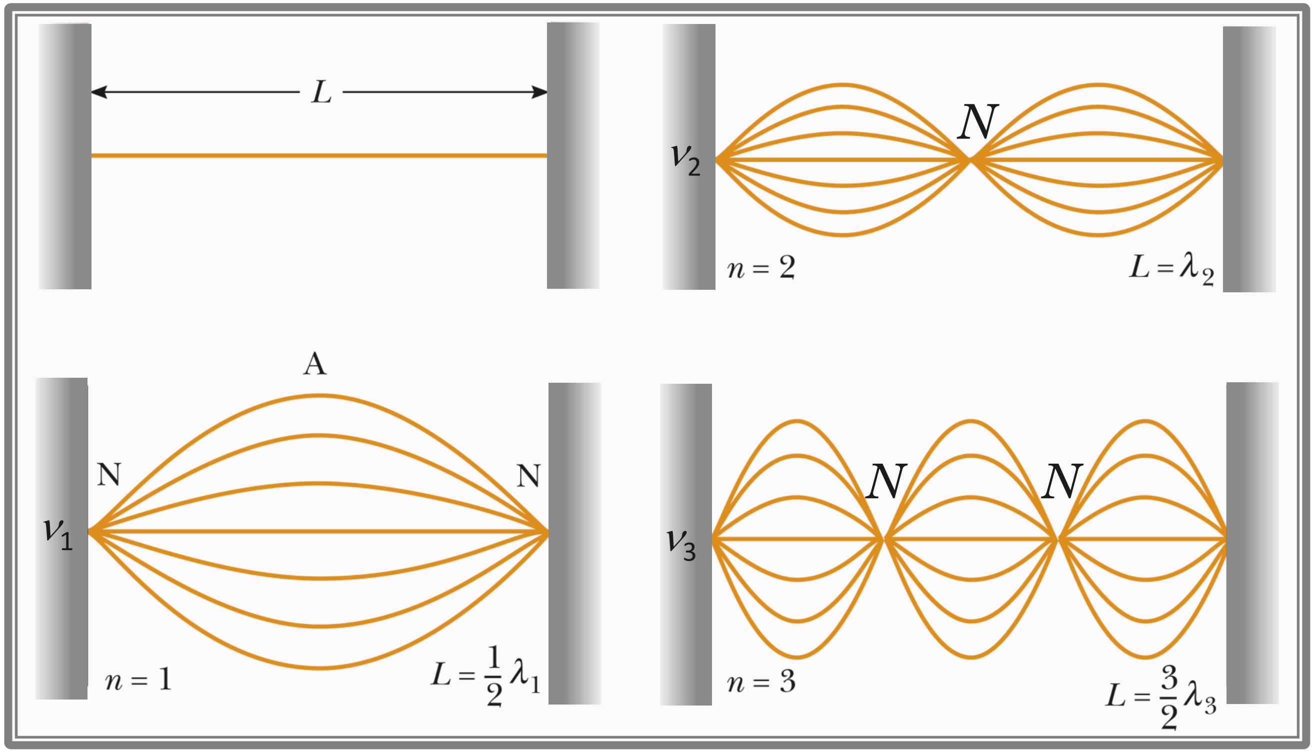
Os comprimentos de onda associados ao modos normais de vibração são:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}$$

Lucy V. C. Assali

Modos Normais de Vibração

Os modos de vibração mais baixos estão ilustrados na figura abaixo:



Modo de ordem n: contém (n-1) nodos e n/2 comprimentos de onda

Frequência do modo n:

$$\nu_n = n\nu_1 \quad \text{onde} \quad \nu_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

n 'ésimo harmônico da frequência ν_1 (frequência fundamental)

Exercícios

1. Uma corda uniforme de 20 m de comprimento e massa de 2 kg esta esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima.

   (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda;

   (b) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue a outra extremidade;

   (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

Dados: $L = 20$ m; $m = 2$ kg; $A = 3$ cm $= 0,03$ m; $\nu = 5$ Hz; $T = 10$ N

(a) Densidade linear da corda: $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{2}{20} \Longrightarrow \mu = 0,1$ kg/m

Velocidade: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{10}{0,1}} \Longrightarrow v = 10$ m/s

Comprimento de onda: $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{10}{5} \Longrightarrow \lambda = 2$ m

Lucy V. C. Assali

Exercícios

(b) Equação da corda: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) = 0,03\cos(\pi x - 10\pi t + \delta)$, pois $\omega = 2\pi\nu = 10\pi$ rad/s e $k = \frac{\omega}{v} = \frac{10\pi}{10} = \pi$ rad/m

De acordo com o problema, temos, em $t = 0$ e $x = 0$, $y = 1,5$ cm $= 0,015$ m. Substituindo na equação da corda:

$$y(0,0) = 0,015 = 0,03\cos\delta \Longrightarrow \cos\delta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \delta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x,t) = 0,03\cos(\pi x - 10\pi t + \pi/3)}$$

(c) A intensidade I representa o fluxo médio de energia através de um ponto qualquer da corda, ou seja, a intensidade é dada como o valor da potência média sobre um período. Assim: $I = \dfrac{1}{2}\,\nu\, v\,\omega^2\, A^2 \Longrightarrow I = 0,44$ W