SMA0300-Geometria Analítica - Aula 1

Roberta Wik Atique

GEOMETRIA		ÁLGEBRA
Pontos, retas, planos	$\Longleftrightarrow$	Números
	Descartes	
Curvas, superfícies, sólidos		Equações

Descartes, no século 17, introduziu o sistema de coodenadas, fazendo assim uma conexão entre a geometria e a álgebra. Deste modo, os problemas geométricos são transformados em equações. Atualmente a Geometria Algébrica é uma importante área de pesquisa em matemática, ou seja, problemas geométricos são transformados em problemas algébricos, geralmente mais fáceis de resolver.

Introdução

Nesta disciplina queremos estudar geometria espacial usando esta abordagem, ou seja, através de um sistema de coordenadas, transformar os objetos e problemas geométricos em equações. Uma vez resolvidas estas equações podemos voltar e resolver o problema geométrico.

Introduziremos os sistemas de coordenadas através da Álgebra Linear. Estudaremos a álgebra linear no espaço tri-dimensional (que chamamos de E^3). No segundo semestre vocês estudarão álgebra linear mais geralmente.

Precisamos de um conjunto e operações entre os elementos deste conjunto. O conjunto que queremos é o conjunto de vetores em E^3.

Na física do ensino médio aprendemos que um vetor é *representado* por um segmento de reta com um sentido de percurso. Dados os pontos distintos A e B, o segmento orientado, que denotaremos por (A, B), é o segmento AB com o sentido de percurso de A para B. O módulo do vetor é o comprimento do segmento AB ou a distância entre A e B ($d(A, B)$), dois vetores têm mesma direção se os segmentos são paralelos e têm mesmo sentido se forem paralelos e *apontam* para o mesmo lugar. Aqui queremos dar um rigor matemático para esta abordagem. Um segmento orientado *ocupa* um lugar no espaço. Deste modo dados dois quaisquer segmentos orientados nem sempre poderemos definir uma soma.

Dados dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) dizemos que:

1. Têm mesma direção se as retas AB e CD (chamadas retas suportes), são paralelas.
2. Se (A, B) e (C, D) têm mesma direção, então eles têm mesmo sentido se os segmentos AC e BD não têm interseção. Se os segmentos AC e BD têm interseção dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm sentidos contrários.

No conjunto dos segmentos orientados vamos definir uma relação de equivalência (ou equipolência): dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) são equivalêntes se

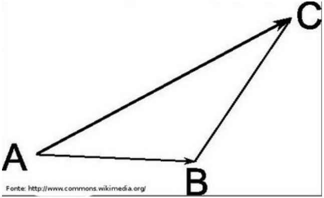
1. $d(A, B) = d(C, D)$, ou seja, os segmentos têm mesmo comprimento.
2. (A, B) e (C, D) têm mesma direção,
3. (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido.

Definição: O vetor $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto dos segmentos orientados que são equivalentes ao segmento orientado (A, B).

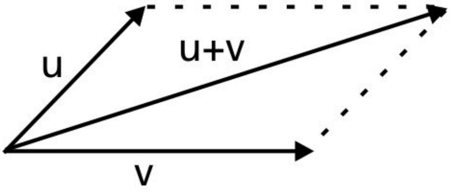
Dado um vetor $\vec{v}$ temos:

1. O módulo do vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes: $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$.
2. a direção (resp. sentido) de um vetor é a direção (resp. sentido) de qualquer um de seus representantes.
3. $-\vec{u}$ é um vetor com mesmo módulo e direção que $\vec{u}$ e sentido contrário ao de $\vec{u}$.

Regra do triângulo: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ queremos definir o vetor $\vec{u}+\vec{v}$. Tome um representante $\overrightarrow{AB}$ do vetor $\vec{u}$, isto é, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e escolha o representante $\overrightarrow{BC}$ do vetor $\vec{v}$, isto é, $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. O vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$.



Regra do paralelogramo: Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ queremos definir o vetor $\vec{u}+\vec{v}$. Tome um representante $\overrightarrow{AB}$ do vetor $\vec{u}$, isto é, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e escolha o representante $\overrightarrow{AD}$ do vetor $\vec{v}$, isto é, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$. Construa o paralelogramo $ABCD$. O vetor $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AC}$ (diagonal do paralelogramo).



Dado um número real α não nulo e um vetor $\vec{u}$ queremos definir um vetor denotado por $\alpha\vec{u}$.

1. Módulo: $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$.
2. $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ TÊM MESMA DIREÇÃO.
3. $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$.

Observações:

1. o vetor nulo não existe geometricamente. Só existe algebricamente de modo que a operação $\vec{u} + (-\vec{u})$ faça sentido. Notação: $\vec{0}$.
2. $0.\vec{u} = \vec{0}$.

Definição: O espaço vetorial V^3 é o conjunto dos vetores com as operações de soma e multiplicação por escalar, que satisfaz as seguintes condições:

1. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
2. Associativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$,
3. Elemento neutro: existe o vetor nulo,
4. Elemento oposto: Dado $\vec{u}$ existe o $-\vec{u}$ de modo que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$,
5. $1.\vec{u} = \vec{u}$,
6. Associativa: $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} = \beta(\alpha\vec{u})$
7. Distributiva: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$,
8. Distributiva: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$,