SMA0300-Geometria Analítica - Aula 5

Roberta Wik Atique

Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ duas bases de V^3. Dado $\vec{u} \in V^3$, temos

$$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{u} = (y_1, y_2, y_3)_F = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3$$

Objetivo: Obter relações entre x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3. Para isto precisamos escrever os vetores de uma base em relação a outra base.

Podemos escrever:

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\vec{u} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 = y_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) +$$

$$y_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + y_3(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) =$$

$$(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)\vec{e}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)\vec{e}_2 +$$

$$(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)\vec{e}_3 = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

Portanto:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 \end{cases}$$

Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Matriz Mudança de Base

Definição: A matriz A acima é chamada de matriz mudança de base da base E para a base F. Notação: $A = M_{EF}$.

Temos:

$$\vec{u}_E = M_{EF}\vec{u}_F.$$

Proposição: $M_{FE} = M_{EF}^{-1}$.

Exercício

Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ duas bases de V^3 tais que

$$\vec{f}_1 = (2, 2, 0)_E, \quad \vec{f}_2 = (2, -1, 0)_E, \quad \vec{f}_3 = (1, 1, -5)_E.$$

Verifique se

$$\vec{u} = (2, 2, 0)_F, \quad \vec{v} = (1, 0, 1)_E, \quad \vec{w} = (-4, 0, -2)_E$$

são LI ou LD.
Temos que

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_E = M_{EF}\vec{u}_F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para verificar se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI ou LD precisamos calcular:

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 \neq 0.$$

Logo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI.

Orientação

Definição: Uma orientação de V^3 consiste em fixar uma base E que é chamada positiva.

Seja F uma base qualquer de V^3. Dizemos que F é uma base positiva se $\det M_{EF} > 0$ (ou $\det M_{FE} > 0$). Caso contrário dizemos que F é uma base negativa

Regra da mão direita

- Considere uma base $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formada pelos dedos médio, indicador e polegar da mão esquerda (nesta ordem). Encolha os outros dedos.

- Coloque a mão direta com os dedos indicando a direção e sentido do vetor $\vec{e}_1$ e com a palma da mão voltada para o semi-espaço onde está o vetor $\vec{e}_2$.

  Gire a mão direita fechando-a na direção do vetor $\vec{e}_2$. O polegar da mão direita deverá indicar o mesmo sentido do polegar da mão esquerda.

- Repita o mesmo processo para os vetores $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

Base Ortonormal Positiva

Definição: Denotaremos por $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal que satisfaz a regra da mão direita.

No que segue consideraremos que uma base que satisfaz a regra da mão direita é uma base positiva.