SMA0300-Geometria Analítica - Aula 6

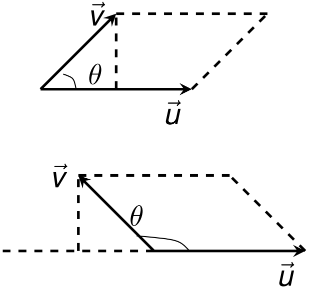
Roberta Wik Atique

Produto Vetorial

Definição: O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o vetor, indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, tal que:

1. Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e θ é a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ então
   - **a** Módulo: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$,
   - **b** Direção: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$,
   - **c** Sentido: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva.

Observação 1: Caso $(\vec{u}, \vec{v})$ LI: considere o paralelogramo $ABCD$ onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ é a área do paralelogramo. De fato, $\|\vec{u}\|$ é a base e se θ for um ângulo agudo $\|\vec{v}\| \sin\theta$ é a altura. Se θ for um ângulo obtuso $\|\vec{v}\| \sin(\pi - \theta) = \|\vec{v}\| \sin\theta$ é a altura.

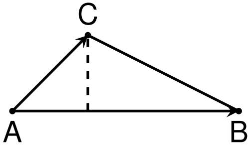


Observação 2: Se $(\vec{u}, \vec{v})$ LI então $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$ (por que?). Logo

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff (\vec{u}, \vec{v}) \text{ é LD}$$

Observação 3: Seja h a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB. Então

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$



De fato, $\dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\| h}{2}$.

Exercício 1: O triângulo ABC tem área 4. Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, calcule $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$.

Exercício 2: Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2, 2, 1)_E$ são de mesmo sentido. Determine as coordenadas de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ na base E.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \alpha(2, 2, 1) = (2\alpha, 2\alpha, \alpha)$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha^2 + \alpha^2} = 3|\alpha|$$

Portanto $\alpha = \pm 1/6$. Como $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $(2, 2, 1)_E$ são de mesmo sentido, $\alpha = 1/6$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1/3, 1/3, 1/6)_E$.

Proposição: Seja $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$ então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Para decorar:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Seja $\vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Prova:

1. Caso $(\vec{u}, \vec{v})$ LD. Então (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são proporcionais e o determinante acima é nulo.
2. Caso $(\vec{u}, \vec{v})$ LI.

a Seja θ medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2} + \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}.$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2$$

$= x_1^2y_2^2 + x_1^2z_2^2 + y_1^2x_2^2 + y_1^2z_2^2 + z_1^2x_2^2 + z_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_1x_2z_1z_2 - 2y_1y_2z_1z_2.$

$$= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2$$

$$= \|(y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1)\|^2 = \|\vec{w}\|^2.$$

b $(y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_1, y_1, z_1) =$
$x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 + y_1x_2z_1 - y_1x_1z_2 + z_1x_1y_2 - z_1x_2y_1 = 0.$

$(y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 0.$

c Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

$$M_{BE} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1z_2 - y_2z_1 \\ y_1 & y_2 & x_2z_1 - x_1z_2 \\ z_1 & z_2 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

$$\det M_{BE} = (y_1z_2 - y_2z_1)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} -$$

$$(x_2z_1 - x_1z_2)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + (x_1y_2 - x_2y_1)\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 > 0.$
Portanto E é base positiva.

Exercício: Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ onde $\vec{u} = (6, -2, -4)$ e $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -10\vec{i} - 10\vec{j} - 10\vec{k} = (-10, -10, -10)$$

Proposição: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

a $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

b $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

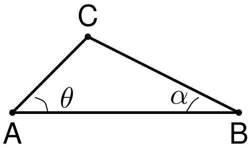
c $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

d $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$

Exercício 1: Prove que se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI e $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ então $\vec{w} = \vec{0}$.

Vimos na observação 2 que $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{w}, \vec{u})$ é LD. Analogamente, $(\vec{w}, \vec{v})$ é LD. Assim $\vec{w}$ é um vetor paralelo a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Observe que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Se $\vec{w} \neq \vec{0}$ então teremos 3 vetores não nulos e paralelos entre si, logo $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD, contrariando a hipótese.

Exercício 2: Demonstre a lei dos senos, segunda a qual, em qualquer triângulo, são iguais as razões entre os senos dos ângulos internos e as medidas dos respectivos lados opostos.



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \sin\theta$$

$$\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\| \sin\alpha$$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \wedge (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \sin\theta = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\| \sin\alpha$$

$$\frac{\sin\theta}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\sin\alpha}{\|\overrightarrow{AC}\|}$$