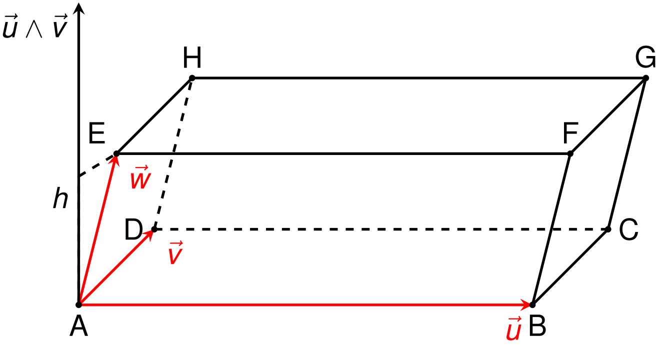
SMA0300-Geometria Analítica - Aula 7

Roberta Wik Atique

Produto Misto

Objetivo: Calcular o volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$.



Onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$.

A altura do paralelepípedo é o módulo da projeção ortogonal de $\vec{w}$ sobre $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2}\vec{u}\wedge\vec{v}.$$

$$h = \|\text{proj}_{\vec{u}\wedge\vec{v}}\vec{w}\| = \frac{|\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2}\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \frac{|\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

O volume do paralelepípedo é área da base vezes a altura:

$$V = \|\vec{u}\wedge\vec{v}\|\frac{|\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = |\vec{w}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})| = |(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}|$$

Definição: O produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (NESTA ORDEM) é o número real:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}$$

Proposição: Em relação à base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sejam $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$. Então:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{A}$$

Prova:

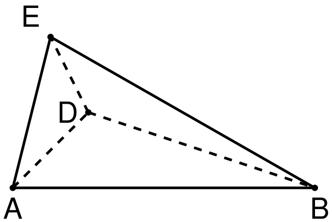
$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot (a_3, b_3, c_3)$$

$$= a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det A$$

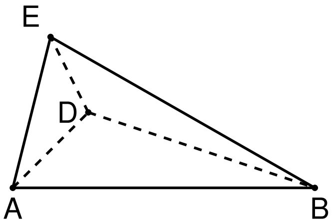
Propriedades:

1. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$.
2. $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LD $\Leftrightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$
3. Se $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] > 0$ então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base positiva.
4. Se $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] < 0$ então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é base negativa.
5. $[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1,\vec{v},\vec{w}] + \beta[\vec{u}_2,\vec{v},\vec{w}]$.
6. $[\vec{u},\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2,\vec{w}] = \alpha[\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w}] + \beta[\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w}]$.
7. $[\vec{u},\vec{v},\alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_1] + \beta[\vec{u},\vec{v},\vec{w}_2]$.
8. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}]$.

Exercício Calcule o volume do tetraedro $ABDE$, onde $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$, $\overrightarrow{AE} = (2, 1, 2)$ (em relação a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).

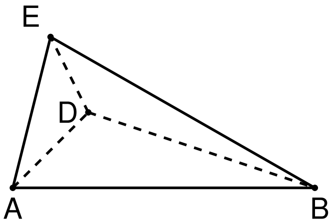


Exercício Calcule o volume do tetraedro $ABDE$, onde $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{AD} = (0,3,3)$, $\overrightarrow{AE} = (2,1,2)$ (em relação a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).



$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

Exercício Calcule o volume do tetraedro $ABDE$, onde $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$, $\overrightarrow{AE} = (2, 1, 2)$ (em relação a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$).



$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$$V = |-3|/6 = 3/6 = 1/2$$