SMA0300-Geometria Analítica - Aula 8
Sistemas de coordenadas e retas

Roberta Wik Atique

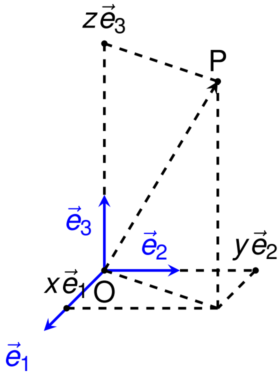
Sistema de coordenadas

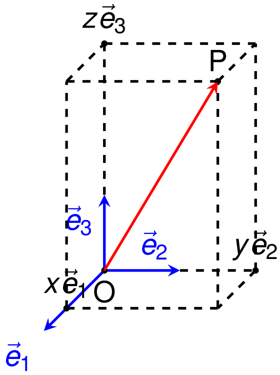
Definição: Um sistemas de coordenadas em E^3 é um par $S = (O, E)$, onde O é um ponto fixado em E^3, chamado de origem, e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base.

Coordenadas: Dado um sistemas de coordenadas $S = (O, E)$ e um ponto $P \in E^3$, escrevemos o vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)_E$. Dizemos que x, y, e z são as coordenadas do ponto P no sistema S: $P = (x, y, z)_S$.

$$P = (x, y, z)_S \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_E,$$

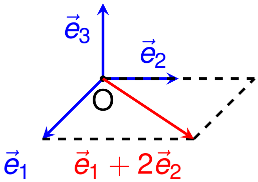
x é chamada de *abscissa*, y é chamada de *ordenada* e z é chamada de *cota*.

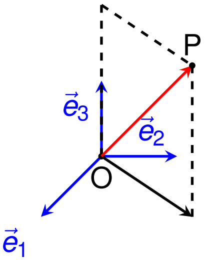

$z\vec{e}_3$
P
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
$y\vec{e}_2$
$x\vec{e}_1$
O
$\vec{e}_1$


$z\vec{e}_3$
P
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
$y\vec{e}_2$
$x\vec{e}_1$
O
$\vec{e}_1$

Exercício

Desenhe $P = (1, 2, 2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.




P
$\vec{e}_3$
$\vec{e}_2$
O
$\vec{e}_1$

Soma de ponto com vetor

Definição: Sejam $A \in E^3$ e $\vec{u} \in V^3$. Definimos a soma

$$A + \vec{u} = B \ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}.$$

Propriedades: Seja $S = (O, E)$ um sistema de coordenadas e $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{u} = (a, b, c)$.

(a) $A + \overrightarrow{AB} = B$.

(b) $O + \overrightarrow{OA} = A$.

(c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) =$
$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = B - A$.

(d) $A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)$.

Ponto médio

Exercício: Dados $A, B \in E^3$, encontre as coordenadas de M, o ponto médio do segmento AB, sabendo que $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$.

Temos que $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$:

$$M = A + \overrightarrow{AM} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$= (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

Distância entre dois pontos

Seja $S = (O, E)$ um sistema de coordenadas onde E é base ortonormal. Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ pontos em E^3. Então a distância entre A e B é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Equação Vetorial da Reta

Axioma: Dois pontos distintos em E^3 determinam uma única reta.

Objetivo: Encontrar uma equação da reta determinada por A e B.
Seja r a reta determinada por A e B. Seja X um ponto qualquer de r. Note que $X = A + \overrightarrow{AX}$

$$X \in r \;\; \Leftrightarrow \;\; (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}) \;\text{ é }\; \text{LD}$$

$$\Leftrightarrow \;\; \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow X = A + \lambda\overrightarrow{AB},$$

para algum número real λ.

Equação vetorial da reta AB:

$$\boxed{X = A + \lambda \overrightarrow{AB}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Definição: Qualquer vetor NÃO NULO paralelo a uma reta chama-se vetor diretor dessa reta.

Observação: O vetor $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta AB. Qualquer vetor não nulo paralelo a $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor da reta AB.

Um ponto e um vetor não nulo determinam uma única reta. Seja $A \in E^3$ um ponto e $\vec{u} \neq \vec{0}$. Se X é um ponto da reta, $(\overrightarrow{AX}, \vec{u})$ é LD. Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u}$. Assim, a equação vetorial da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ é:

$$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{A} + \lambda\,\vec{u}, \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos

Exemplo 1: Sejam $A = (0, 1, 1)$ e $B = (1, 2, 1)$. Determine uma equação vetorial da reta AB.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1) - (0, 1, 1) = (1, 1, 0)$$

$$X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0), \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

O ponto $C = (2, 3, 1)$ pertende à reta AB?
O ponto $D = (2, 3, 2)$ pertence à reta AB?

Exemplo 2: Sejam $A = (1, 0, 3)$ e $\vec{u} = (2, -1, 5)$. A equação vetorial da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ é:

$$X = (1, 0, 3) + \lambda(2, -1, 5),\ \ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Equações paramétricas da reta

Dados $S = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ um sistema de coordenadas, $A = (x_0, y_0, z_0)$ ponto em E^3 e $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor não nulo. Seja r a reta determinada por A e $\vec{u}$. Seja $X = (x, y, z)$ um ponto qualquer de r:

$$X = (x, y, z) = A + \lambda\vec{u} = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c), \ \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c),$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \qquad (\forall \ \lambda \in \mathbb{R})$$

Exemplos

Exemplo 3: Sejam $A = (1, 2, 1)$ e $B = (2, 1, 3)$. Determine equações paramétricas da reta AB.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3) - (1, 2, 1) = (1, -1, 2)$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda \in \mathbb{R})$$

Exemplo 4: Sejam $A = (1, 0, 3)$ e $\vec{u} = (2, -1, 5)$. As equações paramétricas da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ é:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = 3 + 5\lambda \end{cases} \qquad (\forall\ \lambda \in \mathbb{R})$$

Equações da reta na forma simétrica

Dados $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto em E^3 e $\vec{u} = (a, b, c)$ um vetor não nulo tal que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Seja r a reta determinada por A e $\vec{u}$. Seja $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$:
$\lambda = \dfrac{x - x_0}{a}, \quad \lambda = \dfrac{y - y_0}{b}, \quad \lambda = \dfrac{z - z_0}{c} \quad \Rightarrow$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

são chamadas de equações da reta r na forma simétrica.

Exemplo 5: Sejam $A = (1, 1, 3)$ e $\vec{u} = (2, 1, 5)$. As equações da reta que passa por A e cujo vetor diretor é $\vec{u}$ na forma simétrica é:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 3}{5}.$$

Posição relativa entre retas

Considere as retas:

$$r : X = A + \lambda\vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{(I)}$$

$$s : X = B + \mu\vec{v} \quad (\mu \in \mathbb{R}) \qquad \text{(II)}$$

Em E^3 as retas podem ser:

- retas coplanares: paralelas ou concorrentes,
- retas não coplanares: reversas.

Proposição 1: r e s são retas coplanares. Então $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é LD. Além disso:

(a) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LD então r e s são retas paralelas ou (I) e (II) são equações da mesma reta e neste caso dizemos que r e s são coincidentes.

(b) Se $(\vec{u}, \vec{v})$ é LI então r e s são retas concorrentes.

Proposição 2: Se $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é LI então r e s são retas reversas.

Resumo

$r : X = A + \lambda\vec{u} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
$s : X = B + \mu\vec{v} \quad (\mu \in \mathbb{R})$

- $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ LD e $(\vec{u}, \vec{v})$ LD: paralelas ou coincidentes (neste caso basta verificar se $A \in s$).
- $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ LD e $(\vec{u}, \vec{v})$ LI: concorrentes (um ponto em comum).
- $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ LI: reversas.

Exercício 1: Sejam $A = (1, 2, 5)$ e $B = (0, 1, 0)$. Determine o ponto P da reta AB tal que $\|\overrightarrow{PB}\| = 3\|\overrightarrow{PA}\|$.

Resolução: $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -5)$. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$P = A + \lambda\overrightarrow{AB} = (1, 2, 5) + \lambda(-1, -1, -5) = (1 - \lambda, 2 - \lambda, 5 - 5\lambda)$.

$$\|\overrightarrow{PB}\| = \|(-1 + \lambda, -1 + \lambda, -5 + 5\lambda)\| = 3\|\overrightarrow{PA}\| = 3\|(\lambda, \lambda, 5\lambda)\|$$

$$\sqrt{(-1 + \lambda)^2 + (-1 + \lambda)^2 + (-5 + 5\lambda)^2} = 3\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + (5\lambda)^2}$$

$$27(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 9.27.\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad 8\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1/4 \text{ ou } \lambda = -1/2 \Rightarrow P = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right) \text{ ou } P = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right).$$

Exercício 2: Encontre a posição relativa entre
$r : X = (8,1,9) + \lambda(2,-1,3)$ e $s : X = (3,-4,4) + \mu(1,-2,2)$.

Resolução: $\vec{u} = (2,-1,3)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$ e
$\overrightarrow{AB} = (3,-4,4) - (8,1,9) = (-5,-5,-5)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -5 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$