SMA0300-Geometria Analítica - Aula 10
Perpendicularismo e ortogonalidade

Roberta Wik Atique

Exercício

Obtenha uma equação geral do plano π que contém $s : x - y - z + 1 = 0 = 3y - z$ e é paralelo a $r : X = (2, 0, 2) + \lambda(1, 1, 1)$.

Resolução:

$$s: \begin{cases} x = -1 + 4\mu \\ y = \mu \\ z = 3\mu \end{cases}.$$

Um vetor normal ao plano é $(4, 1, 3) \wedge (1, 1, 1) = (-2, -1, 3)$.
Como o plano contém s, o ponto $(-1, 0, 0)$ pertence ao plano:

$$-2(x+1) - (y-0) + 3(z-0) = 0 \;\Rightarrow\; -2x - y + 3z - 2 = 0.$$

Definição: Sejam r e s duas retas e π um plano.

1. r e s são perpendiculares se forem concorrentes e seus vetores diretores forem ortogonais.
2. r e s são ortogonais se forem reversas e seus vetores diretores forem ortogonais.
3. r é perpendicular a π se seu vetor diretor for paralelo ao vetor normal de π.
4. Dois planos são perpendiculares se seus vetores normais são ortogonais.

Exercícios

Exercício 1: Verifique se

$$r : X = (1,2,3) + \lambda(1,2,1) = A + \lambda\vec{u}$$

$$s : X = (2,4,4) + \mu(-1,1,-1) = B + \mu\vec{v}$$

são ortogonais ou perpendiculares.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2, 1) \cdot (-1, 1, -1) = -1 + 2 - 1 = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 4, 4) - (1, 2, 3) = (1, 2, 1).$$

Como $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB})$ é LD então r e s são concorrentes e portanto perpendiculares.

Exercícios

Exercício 2: Obtenha uma equação vetorial da reta s que contém $P = (2, 6, 1)$ e é perpendicular à reta

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Resolução: Podemos escrever $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

Seja $X = (\lambda, 2 - \lambda, 0)$ um ponto de r. Então $\overrightarrow{PX} = (\lambda, 2 - \lambda, 0) - (2, 6, 1) = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1)$ é ortogonal a $\vec{u} = (1, -1, 0)$, vetor diretor de r.

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{u} = (\lambda - 2, -4 - \lambda, -1) \cdot (1, -1, 0) = \lambda - 2 + 4 + \lambda = 2\lambda + 2 = 0.$$

Portanto $\lambda = -1$.
$s : X = P + \mu\overrightarrow{PX} = (2, 6, 1) + \mu(-3, -3, -1)$.

Exercício 4: Obtenha uma equação vetorial da reta r que contém $P = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi : 2x + y - z = 2.$$

Resolução:

Um vetor normal ao plano é $\vec{\eta} = (2, 1, -1)$. Logo

$$r : X = (1, 2, 3) + \lambda(2, 1, -1).$$

Exercícios

Exercício 5: Obtenha uma equação geral do plano π que contém $P = (0, 1, -1)$ e é perpendicular à reta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

Resolução:

Um vetor normal ao plano é um vetor $\vec{u}$ diretor da reta.

$$\vec{u} = (1, -2, 1) \wedge (2, -3, 1) = (1, 1, 1).$$

Logo uma equação geral do plano é

$$1(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z + 1) = 0$$

$$x + y + z = 0.$$

Exercícios

Exercício 6: (a) Determine as coordenadas da projeção ortogonal do ponto $P = (1, 4, 2)$ sobre o plano $\pi : x - y + z = 2$.
(b) Obtenha o ponto simétrico de P em relação a π.
(c) Calcule a distância de P a π.

Resolução:

(a) Considere a reta que passa por P e é perpendicular a π:

$$X = (1, 4, 2) + \lambda(1, -1, 1).$$

Queremos encontrar o ponto de interseção da reta com o plano: $Q = (1 + \lambda, 4 - \lambda, 2 + \lambda) \in \pi$,

$$1 + \lambda - (4 - \lambda) + (2 + \lambda) = 2,$$

$$3\lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad Q = (2, 3, 3)$$

(b) Qual é o valor do parâmetro λ que dá o ponto simétrico de P? Por que?

$$\lambda = 2$$

$$P' = (3, 2, 4)$$

ou

$$P' = P + 2\overrightarrow{PQ} = (1, 4, 2) + 2[(2, 3, 3) - (1, 4, 2)] = (3, 2, 4)$$

(c)

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-4)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3}$$