SMA0300-Geometria Analítica - Aula 13
Cônicas

Roberta Wik Atique

Elipse

Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos, $2c$ a distância entre eles e $a > c$ um número real. Elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$. F_1 e F_2 são chamados focos.

Equação Reduzida: Suponha $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Seja $b^2 = a^2 - c^2$. A equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Prova

Seja $P = (x, y)$ um ponto da elipse: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Elevando ao quadrado:

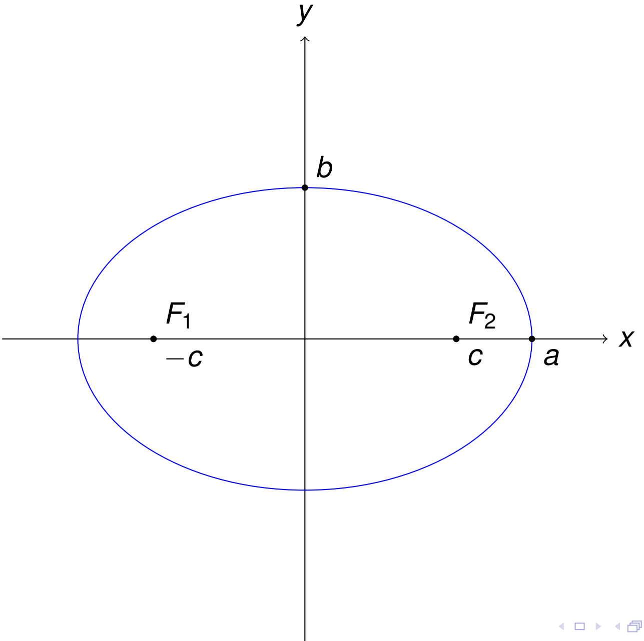
$$(x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2+2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2$$

$$2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2c^2$$

Dividindo por 2 e elevando novamente ao quadrado temos

$$(x+c)^2(x-c)^2+y^2(x+c)^2+y^2(x-c)^2+y^4 = (2a^2-x^2-y^2-c^2)^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

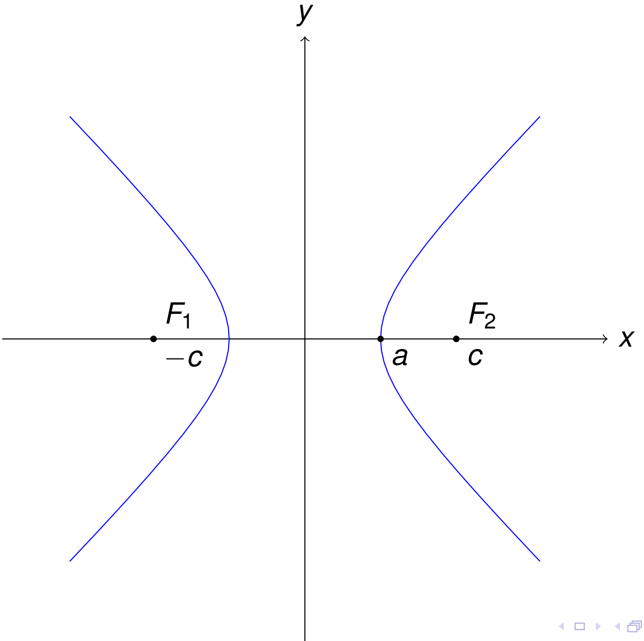

y
b
F_1
F_2
x
$-c$
c
a

Hipérbole

Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos, $2c$ a distância entre eles e $a < c$ um número real positivo. Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é $2a$. F_1 e F_2 são chamados focos.

Equação Reduzida: Suponha $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Seja $b^2 = c^2 - a^2$. A equação reduzida da hipérbole é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$


y
x
F_1
F_2
$-c$
a
c

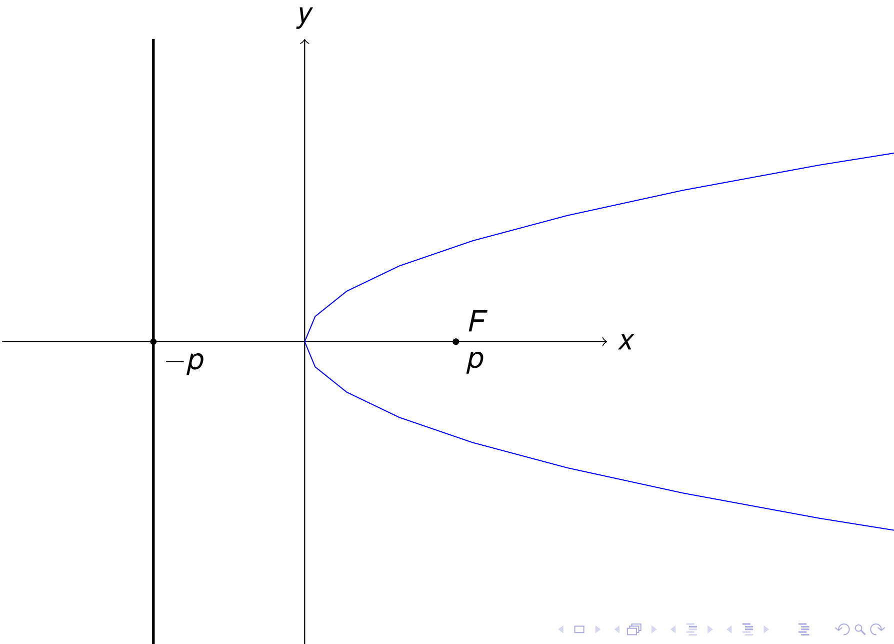
Definição: Sejam r uma reta e F um ponto não pertencente a r. Parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de r e F. F é chamado foco e r é chamada diretriz.

Equação Reduzida: Suponha $r : x + p = 0$ e $F = (p, 0)$. A equação reduzida da parábola é

$$y^2 = 4px.$$

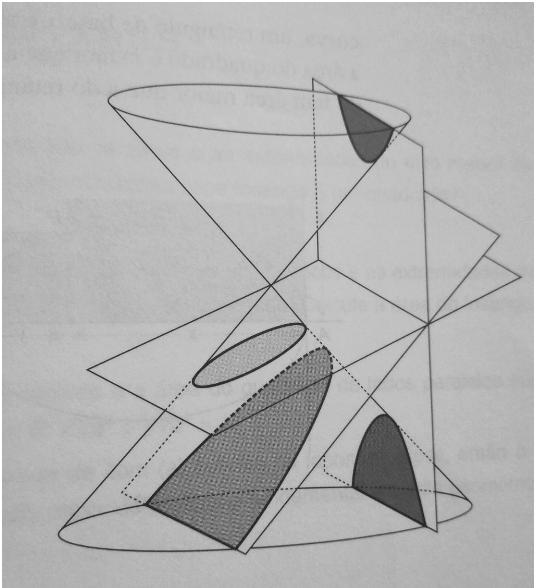
Prova: Seja $P = (x, y)$, $d(P, r) = d(P, F)$:

$$|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \;\; \Rightarrow (x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2.$$



y
F
x
−p
p

Seções cônicas



Cônica

Definição: Uma cônica é o lugar geométrico dos pontos de E^2 que satisfazem uma equação do segundo grau em 2 variáveis:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

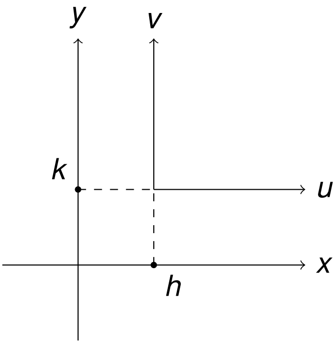
Uma cônica é obtida da interseção de um cone (duplo) com um plano e pode ser:

1. Elipse,
2. Circunferência,
3. Ponto,
4. Vazio,
5. Hipérbole,
6. Duas retas concorrentes,
7. Parábola
8. Duas retas paralelas,
9. Uma reta.

- Tipo Elíptico: $b^2 - 4ac < 0$ (1-4).
- Tipo Hiperbólico: $b^2 - 4ac > 0$ (5,6).
- Tipo Parabólico: $b^2 - 4ac = 0$ (7-9).

Definição: Uma translação é uma mudança de coordenadas em E^2 do tipo:

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases}$$



Translação e eliminação dos termos lineares

Dada a cônica:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

vamos fazer uma translação $x = u + h$, $y = v + k$:

$$a(u+h)^2+b(u+h)(v+k)+c(v+k)^2+d(u+h)+e(v+k)+f = 0$$

$$a(u^2 + 2hu + h^2) + b(uv + ku + hv + hk) + c(v^2 + 2kv + k^2)+$$

$$+d(u+h)+e(v+k)+f = au^2+buv+cv^2+(2ah+bk+d)u+$$

$$+(2ck + bh + e)v + ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek + f = 0$$

Queremos encontrar h e k tais que

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ 2ck + bh + e = 0 \end{cases}$$

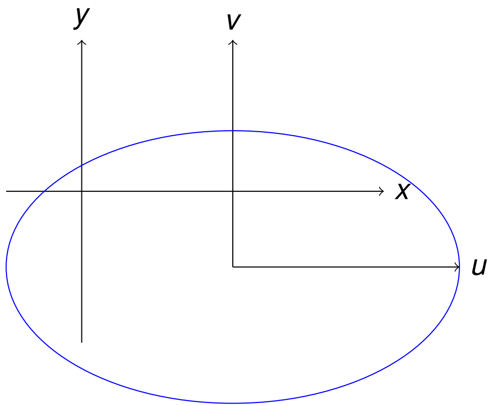
Exemplo: Reconheça a cônica: $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$.

$$\begin{cases} 2.2h + 0.k - 8 = 0 & \rightarrow & 4h - 8 = 0 \\ 2.3k + 0.h + 6 = 0 & \rightarrow & 6k + 6 = 0 \end{cases}$$

Logo $h = 2$ e $k = -1$. A nova equação é:

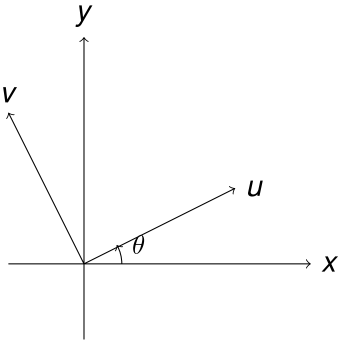
$$2u^2 + 3v^2 + 2.2^2 + 3.(-1)^2 - 8.2 + 6.(-1) - 7 = 2u^2 + 3v^2 - 18 = 0$$

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{6} = 1$$

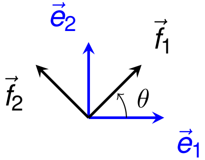


Definição: Uma rotação de um ângulo θ é uma mudança de coordenadas em E^2 do tipo:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$



Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ uma base ortonormal de E^2 e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ uma base obtida da base E através de uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo θ.



Temos $\vec{f}_1 = \|\vec{f}_1\| \cos\theta\, \vec{e}_1 + \|\vec{f}_1\| \sin\theta\, \vec{e}_2 = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2$ e $\vec{f}_2 = -\sin\theta\, \vec{e}_1 + \cos\theta\, \vec{e}_2$. Se

$$\vec{w} = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2 = (u\cos\theta - v\sin\theta)\vec{e}_1 + (u\sin\theta + v\cos\theta)\vec{e}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

então

$$x = u\cos\theta - v\sin\theta, \quad y = u\sin\theta + v\cos\theta$$

rotação e eliminação do termo misto

$$a(u\cos\theta - v\sin\theta)^2 + b(u\cos\theta - v\sin\theta)(u\sin\theta + v\cos\theta) +$$

$$+c(u\sin\theta + v\cos\theta)^2 + d(u\cos\theta - v\sin\theta) + e(u\sin\theta + v\cos\theta) + f = 0$$

$$a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f' = 0$$

$$\begin{cases} a' = a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta \\ b' = (c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta \\ c' = a\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \\ d' = d\cos\theta + e\sin\theta \\ e' = -d\sin\theta + e\cos\theta \\ f' = f \end{cases}$$

$$b' = 0 \quad \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{b}{a-c} \text{ ou } \theta = \pi/4 \ (a = c)$$

$$\begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin 2\theta} \end{cases}$$

Usando $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ obtemos

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{cotg}^2 2\theta}}.$$

Exemplo: Reconheça a cônica: $4x^2 + 3\sqrt{3}xy + y^2 - 1 = 0$.

Temos $\tan 2\theta = 3\sqrt{3}/3 = \sqrt{3}$. Logo $2\theta = \pi/3$ e $\sin 2\theta = \sqrt{3}/2$.

$$\begin{cases} a' + c' = 5 \\ a' - c' = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 6 \end{cases}$$

$$a' = 11/2, \quad c' = -1/2$$

$$\frac{11}{2}u^2 - \frac{1}{2}v^2 = 1$$

que é uma hipérbole.

Exemplo: Reconheça a cônica:
$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0.$
Translação:

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 = 14h + 6k + 28 \\ 2ck + bh + e = 0 = -2k + 6h + 12 \end{cases}$$

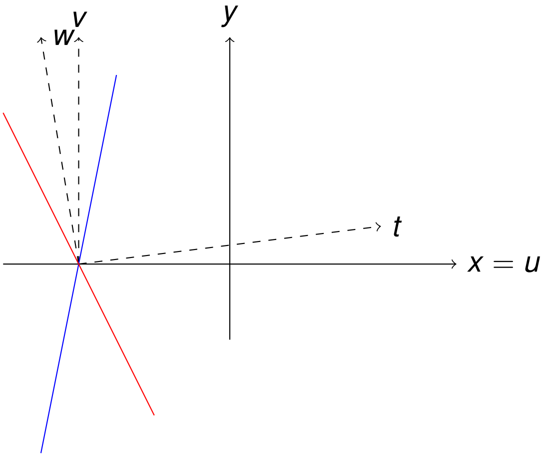
$\Rightarrow h = -2,\ k = 0$. Nova equação depois da translação:
$7u^2 + 6uv - v^2 + f' = 0$ onde
$f' = 7(-2)^2 + 6(-2).0 - 0 + 28(-2) + 12.0 + 28 = 28 - 56 + 28 = 0$
$\Rightarrow 7u^2 + 6uv - v^2 = 0.$

Rotação: $\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$$\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 2\theta}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+16/9}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = 6 \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin 2\theta} = 6/(3/5) = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow a' = 8$ e $c' = -2$. Nova equação depois da rotação: $8t^2 - 2w^2 = 0 \Rightarrow 2(2t+w)(2t-w) = 0$. Temos duas retas concorrentes: $w = 2t$ e $w = -2t$.



v
w
y
t
x = u

Exemplo: Reconheça a cônica:

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0$$

.

Translação:

$$\begin{cases} 2ah + bk + d = 0 = 32h - 24k - 38 & \Rightarrow & 4h - 3k - 19/4 = 0 \\ 2ck + bh + e = 0 = 18k - 24h - 34 & \Rightarrow & -4h + 3k - 17/3 = 0 \end{cases}$$

Logo o sistema é impossível. Não há translação que elimine os termos lineares.

Rotação: $\tan\, 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-24}{7} \Rightarrow$

$$\sin\, 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 2\theta}} \Rightarrow \sin\, 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+49/576}} = \frac{24}{25}$$

$$\begin{cases} a' + c' = a + c = 25 \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin\, 2\theta} = -24/(24/25) = -25 \end{cases}$$

$\Rightarrow a' = 0$ e $c' = 25$. Temos $\cos\, 2\theta = -7/25 \Rightarrow$
$\cos^2\theta = \frac{1+\cos\, 2\theta}{2} = 9/25$, $\sin^2\theta = \frac{1-\cos\, 2\theta}{2} = 16/25$.

$$\begin{cases} d' = d\cos\theta + e\sin\theta = -38.3/5 - 34.4/5 = -250/5 = -50 \\ e' = -d\sin\theta + e\cos\theta = 38.4/5 - 34.3/5 = 50/5 = 10 = \end{cases}$$

Nova equação depois da rotação: $25v^2 - 50u + 10v + 71 = 0$.

Completando o quadrado em v temos

$$25v^2 - 50u + 10v + 71 = 25(v^2 + \frac{10}{25}v) - 50u + 71 =$$

$$25(v^2 + \frac{2}{5}v) - 50u + 71 = 25[(v + \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{25}] - 50u + 71$$

$$25(v + \frac{1}{5})^2 - 50u + 70 = 25(v + \frac{1}{5})^2 - 50(u - \frac{7}{5}) = 0$$

Escrevendo $t = u - \frac{7}{5}$ e $w = v + \frac{1}{5}$ obtemos: $25w^2 - 50t = 0$ ou $2t = w^2$