Aula de Revisão

1. O plano π é determinado pelas retas $r: x+z=5=y+4$ e $s: X=(4,1,1)+\lambda(4,2,-3)$. Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de π.

2. Sejam $E: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ uma elipse e $H: \frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ uma hipérbole confocais, isto é, de mesmos focos. Prove que
   (a) $E\cap H$ contem exatamente quatro pontos.
   (b) Em cada ponto T da interseção $E\cap H$, as duas curvas se interceptam ortogonalmente, isto é, as retas tangentes a elas em T são perpendiculares.

3. Seja C a cônica de equação geral $x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$. Identifique a cônica C e, quando for o caso, obtenha seus parâmetros geométricos (a, b, c ou p) e determine, em relação ao sistema inicial, os elementos geométricos principais: centro, focos, vértices, eixos, assíntotas, diretriz etc.

4. Identifique, em cada caso, o lugar geométrico dos pontos X de $\mathbb{E}^3$ tais que $d(X,A)+d(X,B)=m$.
   (a) $A=(1,0,0)$ $\quad B=(-1,0,0)$ $\quad m=2$
   (b) $A=(2,0,2)$ $\quad B=(2,0,0)$ $\quad m=1$

5. Faça uma mudança de coordenadas conveniente para concluir que $\Omega: z=xy$ é um parabolóide hiperbólico, e esboce-o.

6. Sendo $\Omega: 2x^2-y^2+4z^2=1$, determine os planos paralelos aos planos coordenados que interceptam Ω em uma cônica de distância focal $\sqrt{6}$

7. (i) Determine as coordenadas cartesianas e cilíndricas do ponto com coordenadas esféricas $(\rho,\theta,\varphi)=(2,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$
   (ii) Faça um esboço da superfície dada em coordenadas cilíndricas (r,θ,z) pela equação $r=4\,\mathrm{sen}\,\theta$

Soluções

(1). Temos $r: \begin{cases} x+z=5 \\ y=1 \end{cases}$ e $s: X=(4,1,1)+\lambda(4,2,-3)$

O plano π determinado pelas retas r e s pertence ao feixe dos planos que contem a reta r (dada na forma planar). Portanto, sua equação geral é da forma

$$\pi: \quad \alpha(x+z-5)+\beta(y-1)=0 \quad (*)$$

Observe que o ponto $(4,1,1)$ da reta s pertence a reta r. Escolhendo um outro ponto de s, por exemplo, $P=(0,-1,4)\in s$ e substituindo em $(*)$ obtemos $\alpha(4-5)+\beta(-1-1)=0 \iff \alpha+2\beta=0 \iff \alpha=-2\beta$.

logo a equação de π é $\beta(-2(x+z-5)+(y-1))=0 \underset{\beta\neq 0}{\iff} \boxed{2x-y+2z-9=0}$

Queremos a equação de um plano π' que dista 2 de π. Este plano tem que ser paralelo a π. Portanto tem equação geral

$$\pi': \quad 2x-y+2z+d=0$$

Seja $P'=(0,d,0)\in\pi'$. Temos $d(\pi',\pi)=d(P',\pi)=2$

logo $\dfrac{|-d-9|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=2 \iff |-d-9|=6 \iff d=-3$ ou $d=-15$

As equações gerais dos planos que distam 2 de π são:

$$2x-y+2z-15=0 \quad \text{ou} \quad 2x-y+2z-3=0$$

(2). $E: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad H: \dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1$

E e H são confocais, portanto $a^2-b^2=m^2+n^2 \quad (**)$

Temos

$$E\cap H: \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{m^2}-\dfrac{y^2}{n^2}=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\dfrac{1}{a^2n^2}+\dfrac{1}{b^2m^2}\right)x^2=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{b^2} \\[2ex] \left(\dfrac{1}{b^2m^2}+\dfrac{1}{a^2n^2}\right)y^2=\dfrac{1}{m^2}-\dfrac{1}{a^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2=\dfrac{(n^2+b^2)\,a^2m^2}{a^2n^2+b^2m^2} \\[2ex] y^2=\dfrac{(a^2-m^2)\,b^2n^2}{a^2n^2+b^2m^2} \end{cases} \qquad 1)$$

Como E e H são confocais $a^2-b^2=m^2+n^2$ ($(**)$ acima), portanto $a^2-m^2=b^2+n^2\neq 0$. Logo o sistema 1) tem 4 soluções, ou seja $E\cap H$ contem 4 pontos.

Seja $T=(h,k)$ uma solução do sistema (1)

Observe que $\dfrac{h^2}{k^2} = \dfrac{\cancel{(n^2+b^2)}a^2m^2}{\cancel{(a^2-m^2)}b^2n^2} = \dfrac{a^2m^2}{b^2n^2}$

As equações das retas tangentes a E e H no ponto T são

$$\frac{h}{a^2}x + \frac{k}{b^2}y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{h}{m^2}x - \frac{k}{n^2}y - 1 = 0$$

e tem vetores normais $\left(\frac{h}{a^2}, \frac{k}{b^2}\right)$ e $\left(\frac{h}{m^2}, -\frac{k}{n^2}\right)$ resp.

Temos $\left(\frac{h}{a^2}, \frac{k}{b^2}\right)\cdot\left(\frac{h}{m^2}, -\frac{k}{n^2}\right) = \dfrac{h^2}{a^2m^2} - \dfrac{k^2}{b^2n^2} = \dfrac{b^2n^2h^2 - a^2m^2k^2}{a^2b^2m^2n^2} = 0$

Logo as duas curvas se interceptam ortogonalmente.

3. $C: x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

Matriz da cônica $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 25 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$ e o sistema linear

$$\begin{cases} h - k - 5 = 0 \\ -h + k - 3 = 0 \end{cases}$$ é incompatível.

Logo C é vazio ou é uma parábola.

Vamos fazer uma rotação de ângulo θ para eliminar o termo quadrático misto. Temos $\operatorname{Cotg} 2\theta = \dfrac{1-1}{-2} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} a' + c' = 2 \\ a' - c' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 0 \\ c' = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Logo, a equação de C no novo sistema de coordenadas é

$$2v^2 - 8\sqrt{2}\,u + 2\sqrt{2}\,v + 25 = 0$$

Completando quadrados

$$2(v^2+\sqrt{2}\,v) - 8\sqrt{2}\,u + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(v+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 - 8\sqrt{2}\,u + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(v+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}\,u - 24$$

$$\Leftrightarrow\ \left(v+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(u - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Fazendo a translação $\begin{cases} u = s + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ v = t - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

obtemos a equação reduzida da cônica C da forma

$\boxed{t^2 = 4\sqrt{2}\,s}$ que é uma parábola de parâmetro $p=\sqrt{2}$.

No sistema de coordenadas (s,t), temos

O foco: $F=(\sqrt{2},0)$

vértice: $V=(0,0)$

diretriz: $s=-\sqrt{2}$

eixo: $t=0$

Precisamos estas informações no sistema de coordenadas inicial (x,y)

Fizemos uma rotação de ângulo $\theta = \pi/4$ seguida de uma translação para $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Temos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

portanto $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(s - t + 2\sqrt{2}) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(s+t+\sqrt{2}) \end{cases}$, daí $\begin{cases} s = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Segui que, no sistema de coordenadas (x,y)

O foco: $F=(3,2)$; vertice: $V=(2,1)$

diretriz: $x+y=1$

eixo: $x-y=1$

(5) Vamos denotar $P = d(X,A)^2$, $Q = d(X,B)^2$

Temos $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = m \iff P + Q + 2\sqrt{PQ} = m^2$ (todos os números são positivos)

$$\iff 2\sqrt{PQ} = m^2 - (P+Q)$$

$$\iff m^4 - 2(P+Q)m^2 + (P+Q)^2 - 4PQ = 0$$

$$\iff m^4 - 2m^2(P+Q) + (P-Q)^2 = 0 \quad (*)$$

(i) $A = (1,0,0)$, $B = (-1,0,0)$, $m = 2$

$$P = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$
$$Q = (x+1)^2 + y^2 + z^2$$

Portanto $P + Q = 2(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$ e $(P - Q)^2 = 16x^2$

logo $(*) \iff 16 - 16(x^2 + y^2 + z^2 + 1) + 16x^2 = 0$

$$\iff 1 - x^2 - y^2 - z^2 - 1 + x^2 = 0$$

$$\iff y^2 + z^2 = 0$$

Então os pontos que satisfazem $(*)$ são os ponto do eixo x.

Mas temos $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = 2$,

então $|x-1| + |x+1| = 2 \iff -1 \leq x \leq 1$

Ou seja $d(X,A) + d(X,B) = 2 \iff X \in AB$ (segmento AB)

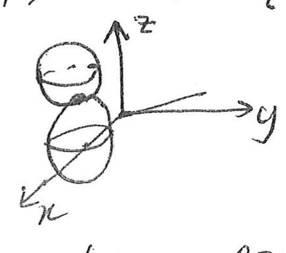
(ii) $A = (2,0,2)$, $B = (2,0,0)$, $m = 1$

$P = d(X,A)^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2$ e $Q = d(X,B)^2 = (x-2)^2 + y^2 + z^2$

Temos $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = 1 \Rightarrow \sqrt{P} \leq 1$ e $\sqrt{Q} \leq 1 \Rightarrow P \leq 1$ e $Q \leq 1$,

Ou seja X é dentro das superfícies esféricas $S(C_1, 1)$ e $S(C_2, 1)$ com $C_1 = (2,0,2)$ e $C_2 = (2,0,0)$. Observe que $S(C_1,1) \cap S(C_2,1) = \{(2,0,1)\}$

e $S(C_1,1)$ é exterior a $S(C_2,1) - \{(2,0,1)\}$



No ponto $T = (2,0,1)$

$$d(T,A) + d(T,B) = 2 > 1$$

Portanto $\forall X \in \mathbb{E}^3$ $d(X,A) + d(X,B) > 1$, ou seja o conjunto dos ponto tal que $d(X,A) + d(X,B) = 1$ é vazio.

(5) $\Omega: z = xy$

A equação reduzida de um hiperbolóide hiperbólico é $w = -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}$ (ou $w = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$). Fazendo uma rotação que deixa o eixo z fixo

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\,\text{sen}\,\theta \\ y = u\,\text{sen}\,\theta + v\cos\theta \\ z = w \end{cases}$$

obtemos a nova equação da quádrica

$$w = \cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,(u^2 - v^2) + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)uv$$

Para $\theta = \pi/4$, temo $\boxed{w = \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}.}$

(6) $\Omega: 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 1$ é um hiperbolóide a uma folha

Interseção com os planos $x = k$

$$\Omega \cap \Pi: \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 1 \\ x = k \end{cases} \iff \begin{cases} -y^2 + 4z^2 = 1 - 2k^2 \\ x = k \end{cases}$$

Temos que ter $1 - 2k^2 \neq 0$, daí

$$\Omega \cap \Pi: \begin{cases} -\frac{y^2}{(1-2k^2)} + \frac{z^2}{\frac{1-2k^2}{4}} = 1 \\ x = k \end{cases}$$ hipébole

distância focal $2c = \sqrt{6} \Rightarrow c^2 = \frac{6}{4} = |1 - 2k^2| + \left|\frac{1-2k^2}{4}\right|$

logo $5|1 - 2k^2| = 6 \iff 5(1 - 2k^2) = 6$ ou $5(1 - 2k^2) = -6$ $\iff$ $-10k^2 = 5$ impossível ou $10k^2 = 11 \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{11}{10}}$

Os planos são $x = \pm\sqrt{\frac{11}{10}}$

Interseção com os planos $z = k$

$$\Omega \cap \Pi: \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 1 \\ z = k \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 - 4k^2 \\ z = k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{\frac{1-4k^2}{2}} - \frac{y^2}{1-4k^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

$$c^2 = \left|\frac{1-4k^2}{2}\right| + |1-4k^2| = \frac{6}{4}$$

$$\Leftrightarrow |1-4k^2|\cdot\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \Leftrightarrow |1-4k^2| = 1$$

$$\Leftrightarrow 1-4k^2 = 1 \quad \text{ou} \quad 1-4k^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \quad \text{ou} \quad 4k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

os planos são $z = 0$, $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Interseção com os planos $y = k$

$$\Omega \cap \pi \begin{cases} 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 1 \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4z^2 = 1 + k^2 \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{1+k^2}{2}} + \dfrac{z^2}{\frac{1+k^2}{4}} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

$$c^2 = \frac{1+k^2}{2} - \frac{1+k^2}{4} = \frac{1}{4}(1+k^2) = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow k^2 = 5 \Rightarrow k = \pm\sqrt{5}$$

Os planos são $y = \pm\sqrt{5}$

⑦ (i) coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \varphi) = (2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

Coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

logo Coord cartesianas

$$\begin{cases} x = 2\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \\ z = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \end{cases}$$

$P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 1)$

Coord cilíndricas : $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, 1)$

(ii) $r = 4\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow r^2 = 4r\operatorname{sen}\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$

Quádrica cilíndrica de rotação