Conteúdo

Objetivo

Verificar a posição relativa de uma reta e uma cônica e suas intersecções.

C.1 Retas secantes, tangentes e normais

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal no plano π

QUAL A POSIÇÃO RELATIVA DE UMA RETA r E UMA CÔNICA C EM π ?

- $r : X = (h, k) + \lambda(m, n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (Proposição C.2.3):
  - *o conjunto vazio:* ✓
  - *um ponto:* ✓
  - *uma reta ou duas retas idênticas ou duas retas paralelas ou duas retas concorrentes: Seção R.4.1: Posição relativa entre retas* ✓
  - *uma circunferência (caso particular da elipse),*
  - *uma elipse, ou*
  - *uma hipérbole, ou*
  - *uma parábola.*
- Vamos considerar C uma elipse ou hipérbole ou parábola

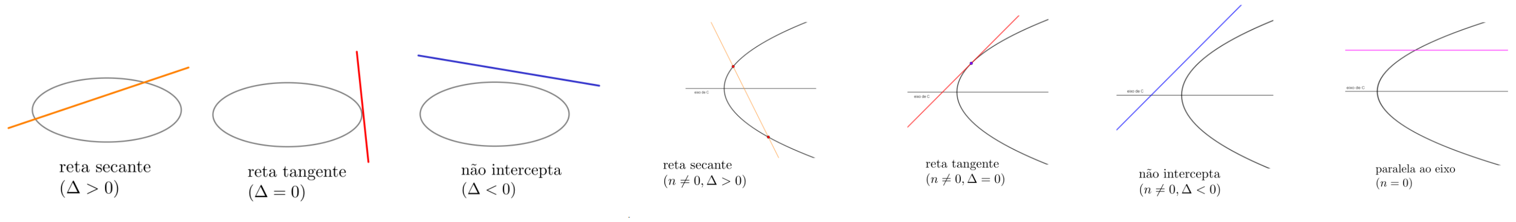
- $X \in r \cap C \iff X = (h + \lambda m, k + \lambda n)$ e $g(X) = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$:
  - equação de grau no máximo 2 na variável λ, a saber:

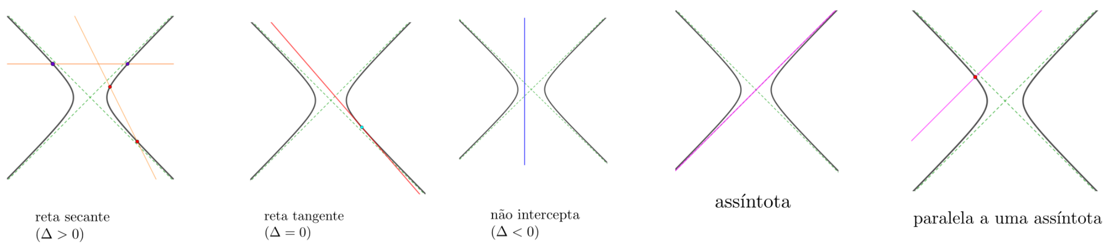
$$(am^2+bmn+cn^2)\lambda^2+(2ahm+bmk+bnh+2cnk+dm+en)\lambda+(f+ah^2+bhk+ck^2+dh+ek) = 0$$

  - cada solução λ da equação acima corresponde a um ponto X de $r \cap C$:
    - $*$ $r \cap C$ pode possuir 2 pontos distintos;
    - $*$ $r \cap C$ pode possuir 1 único ponto;
    - $*$ $r \cap C$ pode ser $\emptyset$.

Definição C.1.1. Seja C uma elipse, hipérbole ou parábola.

1. Uma reta r é **secante** a C se $r \cap C$ possui 2 pontos distintos.
2. Uma reta r é **tangente** a
   (a) elipse C se $r \cap C$ possui 1 único ponto T;
   (b) hipérbole C se $r \cap C$ possui 1 único ponto T e r não é paralela a uma assíntota;
   (c) parábola C se $r \cap C$ possui 1 único ponto T e r não é paralela ao eixo de simetria.
      i. O ponto T é chamado **ponto de tangência** e qualquer vetor diretor de r é chamado **vetor tangente** a C em T.
3. A reta perpendicular a reta tangente no ponto de tangência T é chamada **reta normal** a C em T.





C.1.1 Elipse

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \vec{r} = (m,n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2} + \frac{(k+\lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$

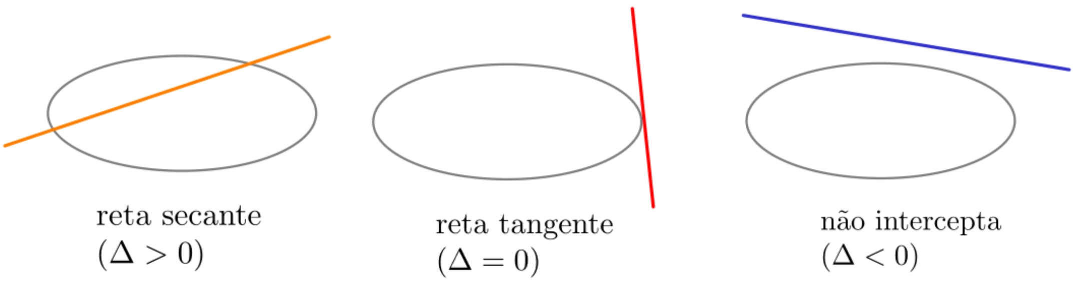
$$(*) \quad \left(\underbrace{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}_{>0}\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{m}{a^2}h + \frac{n}{b^2}k\right)\lambda + \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

- a equação (*) é de 2^o grau
-

$$\Delta = 4\left[\left(\frac{m}{a^2}h + \frac{n}{b^2}k\right)^2 - \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1\right)\right]$$

Os três possíveis casos da posição relativa da reta e elipse são:

- $\Delta > 0$: r é reta secante a C
- $\Delta = 0$: r é reta tangente a C em $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$, onde λ_0 é a raiz de $(*)$
- $\Delta < 0$: r não intercepta C



Proposição C.1.2. *Seja* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *uma equação reduzida da elipse* C*.*

Se $T = (h, k)$ *é um ponto da elipse, então a equação da reta tangente a* C *em* T *é dada por*

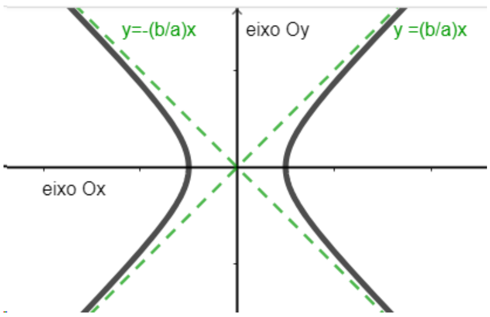
$$\frac{h}{a^2}x + \frac{k}{b^2}y = 1.$$

C.1.2 Hipérbole

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$\boxed{C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,}$$

cujas assíntotas são[1] $A_1 : y = \dfrac{b}{a}x$ e $A_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$.



$$\boxed{r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}}$$

- $$X \in r \cap C \iff \frac{(h + \lambda m)^2}{a^2} - \frac{(k + \lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$$

[1] Ver p. Ehp.13

$$(**)\quad \left(\underbrace{\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}}_{\neq 0?}\right)\lambda^2+2\left(\frac{m}{a^2}h-\frac{n}{b^2}k\right)\lambda+\left(\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}-1\right)=0$$

$$\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=\left(\frac{m}{a}-\frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)=0$$

$$\iff \frac{m}{a}=\frac{n}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{a}=-\frac{n}{b}$$

$$\iff \frac{m}{n}=\frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n}=-\frac{a}{b}$$

$$\iff \vec{r}=(m,n)\parallel(a,b) \text{ ou } \vec{r}=(m,n)\parallel(a,-b)$$

$$\overset{\text{(Ehp.1.1)}}{\iff} r \text{ é paralela a uma das assíntotas de } C$$

- Se r não é paralela a qualquer das assíntotas de C:

  \- a equação (**) é de segundo grau, e portanto:

  - $\Delta > 0$: r é reta secante a C
  - $\Delta = 0$: r é reta tangente a C em $T=(h+\lambda_0 m, k+\lambda_0 n)$, onde λ_0 é a raiz de $(**)$
  - $\Delta < 0$: r não intercepta C

- Se r é paralela a uma das assíntotas de C:

  \- a equação (**) é de primeiro grau, e portanto:

  - paralela coincidente: r é a assíntota e não intercepta C
  - paralela distinta: r é paralela à assíntota e intercepta C em $P_1=(h+\lambda_1 m, k+\lambda_1 n)$, onde λ_1 é a raiz de $(**)$

- tome $\vec{r} = (m, n) = (a, b)$ (o caso $\vec{r} = (m, n) = (a, -b)$ é similar)
- a eq. de 2^o grau (**) fica:

$$(***)\ 2\left(\frac{1}{a}h - \frac{1}{b}k\right)\lambda + \left(\frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

- (***) tem nenhuma solução:

$$\frac{h}{a} = \frac{k}{b} \Longleftrightarrow \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 0 \neq 1 \text{ e } k = \frac{b}{a}h$$

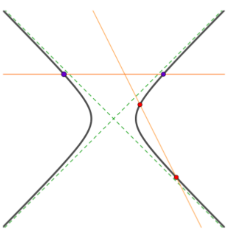
$$\therefore (h, k) \in r \cap A_1 \Longrightarrow r = A_1$$

- (***) tem uma única solução λ_1:

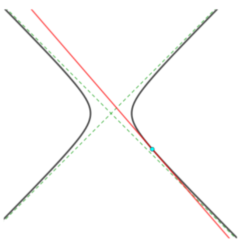
$$P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n) \in r \cap C$$

$$\therefore r \cap A_1 = \emptyset \Longrightarrow r \parallel A_1, r \neq A_1$$

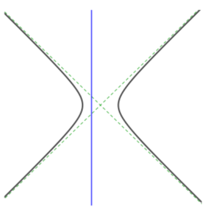
Os cinco possíveis casos da posição relativa da reta e hipérbole são:



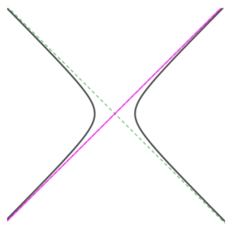
reta secante
($\Delta > 0$)



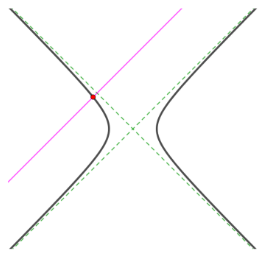
reta tangente
($\Delta = 0$)



não intercepta
($\Delta < 0$)



assíntota

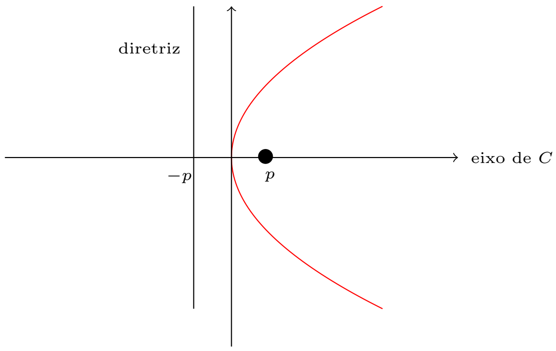


paralela a uma assíntota

C.1.3 Parábola

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = y^2 - 4px = 0.$$



$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff (k + \lambda n)^2 = 4p(h + \lambda m) \iff$

$$(\diamond) \quad \underbrace{n^2}_{\neq 0?} \lambda^2 + 2(nk - 2pm)\lambda + (k^2 - 4ph) = 0$$

- $n \neq 0$:

  - a equação $(\diamond)$ é de 2^o grau e portanto:

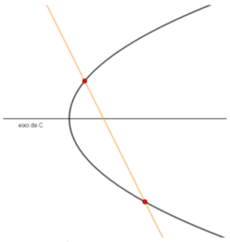
  - $\Delta > 0$: r é reta secante a C
  - $\Delta = 0$: r é reta tangente a C em $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$, onde λ_0 é a raiz de $(\diamond)$
  - $\Delta < 0$: r não intercepta C

- $n = 0$:

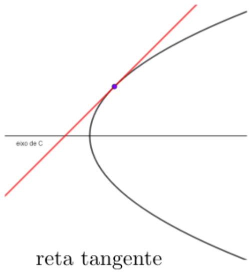
  - $\vec{r} = (m, 0)$, $m \neq 0$ e $p \neq 0$
  - $(\diamond)$ é de 1^o grau e tem uma única solução: $\lambda_1 = \frac{k^2 - 4ph}{4pm}$
  - r é paralela ao eixo de simetria de C [a] e intercepta C no ponto $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$.

[a] Ver Definição Ehp.4.1 e (Ehp.4.2)

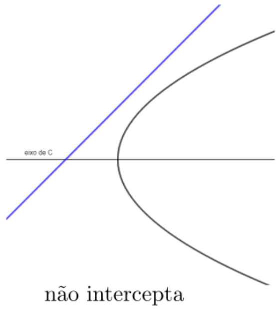
Os quatro possíveis casos da posição relativa da reta e parábola são:



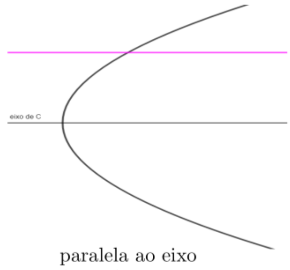
reta secante
$(n \neq 0, \Delta > 0)$



reta tangente
$(n \neq 0, \Delta = 0)$



não intercepta
$(n \neq 0, \Delta < 0)$



paralela ao eixo
$(n = 0)$

Se r é uma reta tangente a C no ponto T e $\vec{r} = (m, n)$ é um vetor diretor de r, então a reta normal a C no ponto T é a reta que passa por T e tem $\vec{n} = (n, -m)$ como um vetor diretor.

Exemplo C.1.3. Ver Exercício 86 em Slide de Exercícios.
