Conteúdo

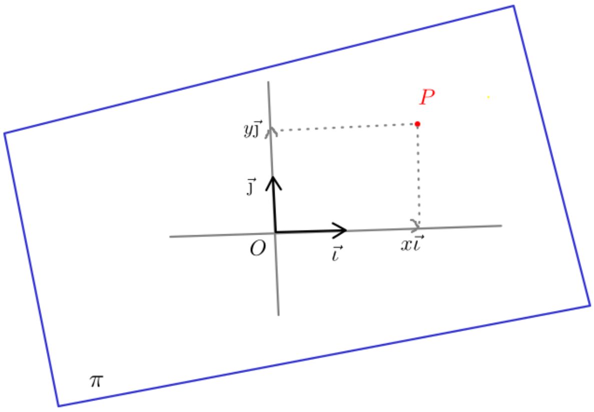
Objetivo

Estudar os lugares geométricos de E^2 chamados: elipse, hipérbole e parábola:

- deduzir suas equações;

- estudar suas propriedades geométricas.

Ehp.1 Ambiente



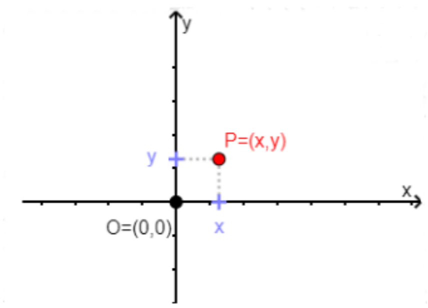
- π um plano em E^3
- $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ dois vetores diretores de π tais que

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1, \qquad \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$$

- O um ponto de π
- $P \in E^3$, $P \in \pi \iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
- $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: base ortonormal[1] de π
- $\Sigma = (O, B)$: sistema de coordenadas ortogonal em π (origem O e base B)
- as coordenadas de $P \in \pi$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base B:

$$P = (x, y)_\Sigma = (x, y)$$

Este ambiente é usualmente identificado com o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:



As coordenadas de P são chamadas de *coordenadas cartesianas*

Os eixos coordenados Ox e Oy são chamados de *eixo-x* e *eixo-y*.

[1] A base não precisa ser ortonormal, mas lembre que esta escolha permite calcular produto escalar, norma de vetores, distância entre pontos de maneira fácil.

Nota.

- $\Sigma_1 = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}))$ é um sistema de coordenadas ortogonal[2] em E^3 com base positiva
- Uma equação geral[3] do plano π em relação ao sistema de coordenadas Σ_1 é
$$z = 0,$$
e os pontos de π têm coordenadas da forma $(x, y, 0)$.
- Uma **equação geral de uma reta r no plano π** é da forma:[4]

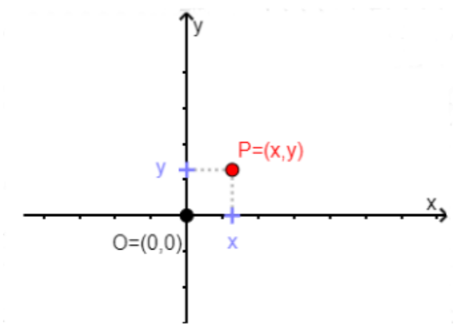
$$r : ax + by + d = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0) \qquad \text{(Ehp.1.1)}$$

onde o vetor $\vec{n} = (a, b)$ é ortogonal a r e

$$\vec{r} = (-b, a) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (b, -a)$$

são vetores diretores de r.

Vamos supor fixado um plano π em E^3 com um sistema de coordenadas ortogonal (s.c.o.) $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$.



---

[2] Lembre-se da Definição OPv.2.1 de produto vetorial e que $\|\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}\| = \|\vec{\imath}\|\|\vec{\jmath}\| \sin\theta$

[3] Ver Exercício 39

[4] Veja Seção R.4.3.1

Ehp.2 Elipse

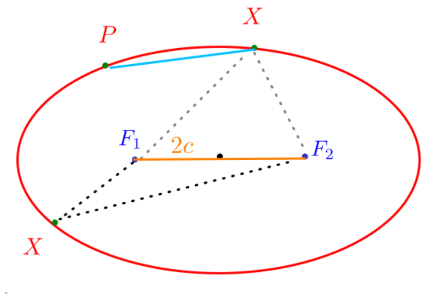
Definição Ehp.2.1. Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de π e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > c > 0$, onde

$$2c = d(F_1, F_2).$$

Uma **elipse** é o lugar geométrico dos pontos X de π tais que

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a. \tag{Ehp.2.1}$$

- **focos da elipse**: F_1 e F_2;
- **segmento focal**: $\overline{F_1F_2}$;
- **distância focal**: $2c = d(F_1, F_2)$;
- **reta focal**: reta F_1F_2;
- **centro** da elipse: ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- **corda** da elipse: $\overline{XP}$, para quaisquer X, P na elipse.



Construção de uma elipse:

Autoria Atractor: Método do jardineiro
"o comprimento da corda é $2a$, a qual deve ser maior que a distância entre os pinos"

Autor Paulo Tomson; Autora Luciana Brito: Geogebra.

Nota.

• dois pontos F_1, F_2 e um número real $2a > d(F_1, F_2)$ determinam uma elipse

• dada uma elipse E, existem um único par de pontos F_1, F_2 e um único número real $2a > d(F_1, F_2)$ tais que os pontos de E satisfazem (Ehp.2.1): $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a.$.

Portanto, a cada elipse estão associados um único número real a e um único segmento focal.

• Quando $F_1 = F_2$, temos $c = 0$ e para todo $a > 0$ o lugar geométrico dos pontos X de π tais que $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$, isto é, dos pontos que são equidistantes de F_1, é a **circunferência de centro F_1 e raio a**.

Exemplo Ehp.2.2. Ver Exercícios 77 e 78 em Slide de Exercícios.

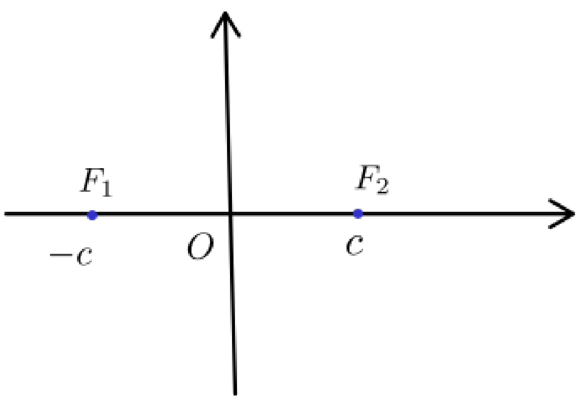
Ehp.2.1 Equação da elipse

Ehp.2.1.1 Com focos no eixo Ox

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que:

$$F_1 = (-c, 0), \qquad F_2 = (c, 0)$$

- $d(F_1, F_2) = 2c$
- $a > c > 0$



$$
\begin{aligned}
X=(x,y)\in \text{Elipse} &\iff d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a\\
&\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&\Longrightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
&\iff \vdots\\
&\Longrightarrow \exists b>0;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{onde } a>b>0 \text{ e } a^2=b^2+c^2
\end{aligned}
$$

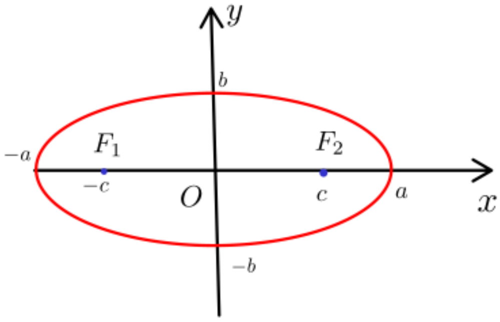
. . . .

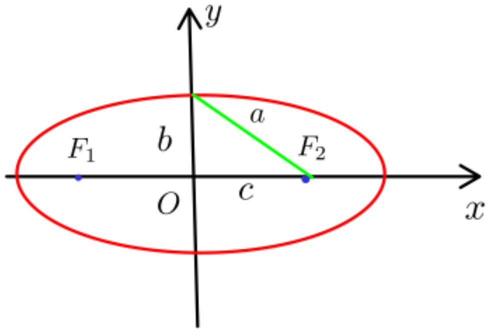
$$X=(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{onde } a>b>0 \text{ e } a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow X\in \text{Elipse}$$

A **equação reduzida da elipse** de centro O e focos no eixo Ox é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{(Ehp.2.2)}$$

onde $a>b>0$, $a^2=b^2+c^2$ e $2a>2c=d(F_1,F_2)>0$.



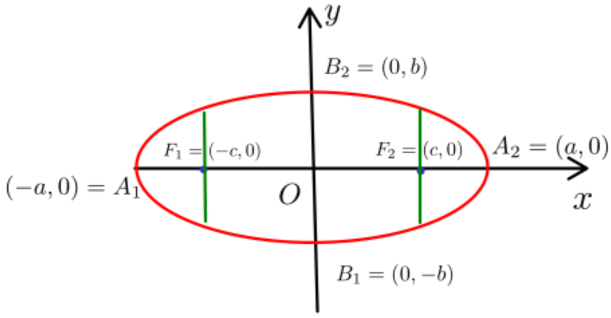


Proposição Ehp.2.3. *Um ponto $X = (x, y)$ é um ponto da elipse de equação reduzida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se as distâncias de X aos focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ são

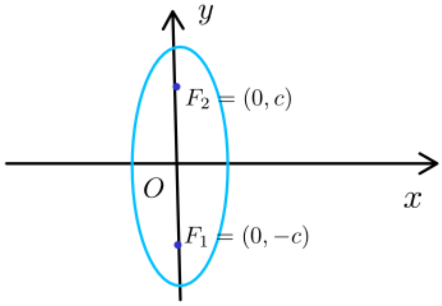
$$d(X, F_1) = a + \frac{c}{a}x, \qquad d(X, F_2) = a - \frac{c}{a}x.$$

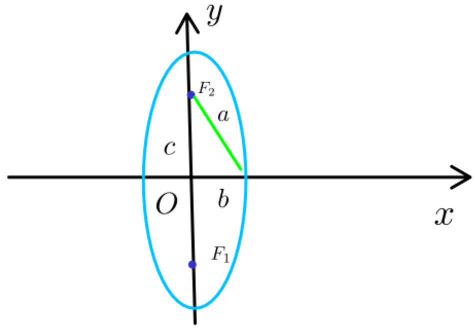


- $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$: **vértices da elipse**,
- corda $\overline{A_1A_2}$: **eixo maior** da elipse,
- corda $\overline{B_1B_2}$: **eixo menor** da elipse,
- **amplitude focal** é o comprimento de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal.

Ehp.2.1.2 Com focos no eixo Oy

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema ortogonal tal que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$;





- $a > c > 0$

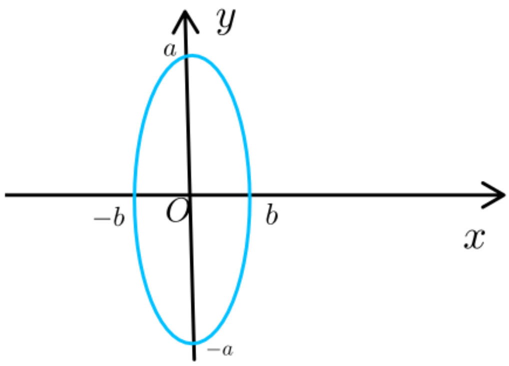
$$X = (x, y) \in \text{Elipse} \iff d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

$$\overset{verifique!}{\iff} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } a^2 = b^2 + c^2$$

A **equação reduzida da elipse** de centro O e focos no eixo Oy é dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad \text{(Ehp.2.3)}$$

onde $a > b > 0$, $a^2 = b^2 + c^2$ e $2a > 2c = d(F_1, F_2) > 0$.



Ehp.2.2 Algumas propriedades de uma elipse

Proposição Ehp.2.4. *A elipse é uma curva simétrica em relação à reta (focal) que passa F_1 e F_2 e em relação à reta mediatriz do segmento (focal) F_1F_2.*

Observação. Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que o desenho da elipse é como o apresentado: sem "bicos", côncavo para baixo "na parte de cima" e côncavo para cima "na parte de baixo"! O método algébrico que funcionou para retas e planos não é eficiente para curvas e superfícies.

Proposição Ehp.2.5. *Uma equação da forma*

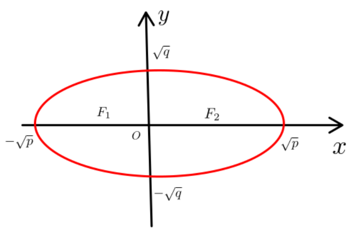
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \qquad \text{(Ehp.2.4)}$$

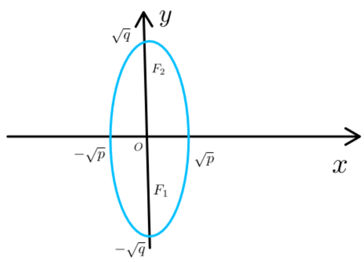
descreve uma elipse em relação a um s.c.o. $\Sigma = (O, B)$ se, e somente se, p e q são números reais distintos e positivos.

Corolário. *Sejam p e q são números reais distintos e positivos.*

A Equação (Ehp.2.4) representa:

1. *uma elipse com centro O e focos em Ox quando $p > q$;* (neste caso $a = \sqrt{p}$ e $b = \sqrt{q}$)
2. *uma elipse com centro O e focos em Oy quando $p < q$.* (neste caso $a = \sqrt{q}$ e $b = \sqrt{p}$)





Propriedade óptica da elipse (Geogebra): (num espelho elíptico) os raios de luz que passam por um foco são refletidos no outro foco.
Uma aplicação em óptica com elipses (vídeo)

Exemplo Ehp.2.6. Ver Exercício 79 em Slide de Exercícios.

Ehp.3 Hipérbole

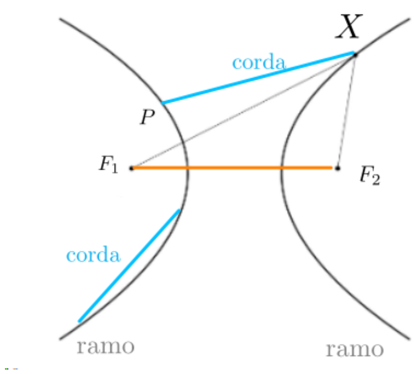
Definição Ehp.3.1. Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de π e $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < c$, onde

$$2c = d(F_1, F_2).$$

Uma **hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos X de π tais que

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a. \tag{Ehp.3.1}$$

- **focos da hipérbole**: F_1 e F_2;
- **segmento focal**: $\overline{F_1F_2}$;
- **distância focal**: $2c = d(F_1, F_2)$;
- **reta focal**: reta F_1F_2;
- **centro** da hipérbole: ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- **corda** da hipérbole: $\overline{XP}$, para quaisquer pontos $X \neq P$ na hipérbole.



Fonte: Matika

Construção de uma hipérbole:

Autoria Atractor: Corda e régua
Matemática para gente grande: Geogebra

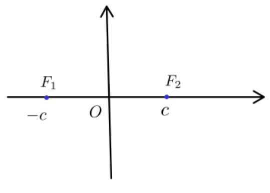
A cada hipérbole estão associados um único número real a e um único segmento focal.

Exemplo Ehp.3.2. Ver Exercícios 80 e 81 em Slide de Exercícios (tarefa!).

Ehp.3.1 Equação da hipérbole

Ehp.3.1.1 Com focos no eixo Ox

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ s. c. ortogonal tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$



$$d(F_1, F_2) = 2c$$

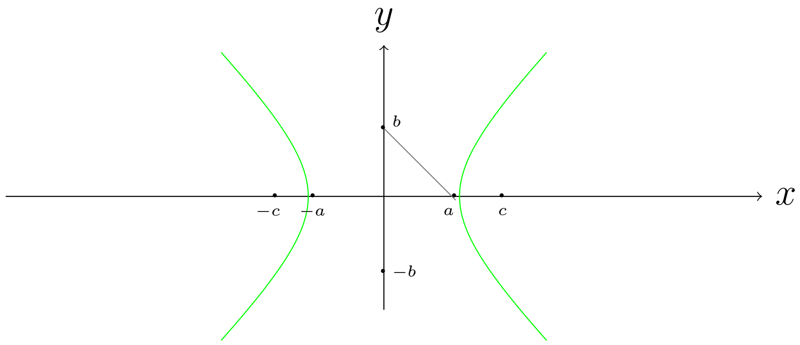
- $0 < a < c$

$$\begin{aligned} X = (x, y) \in \text{Hipérbole} &\iff d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a \\ &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

A **equação reduzida da hipérbole** de centro O e focos no eixo Ox é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{Ehp.3.2}$$

onde $c > b > 0$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $2c = d(F_1, F_2) > 2a > 0$.



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

- $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$: **vértices da hipérbole**.

Ehp.3.1.2 Com focos no eixo Oy

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema ortogonal tal que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$;
- $a > c > 0$

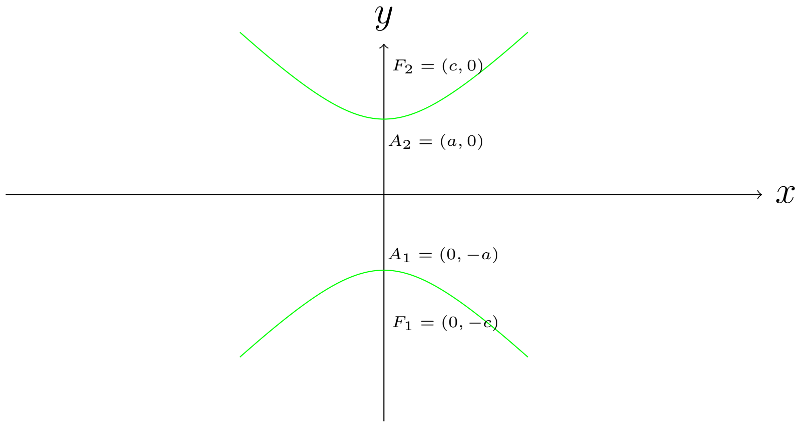
$$X = (x, y) \in \text{Hipérbole} \iff d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a$$

$$\overset{verifique!}{\iff} -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } a^2 = b^2 + c^2$$

A **equação reduzida da hipérbole** de centro O e focos no eixo Oy é dada por

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad \text{(Ehp.3.3)}$$

onde $c > b > 0$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $2c = d(F_1, F_2) > 2a > 0$.



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

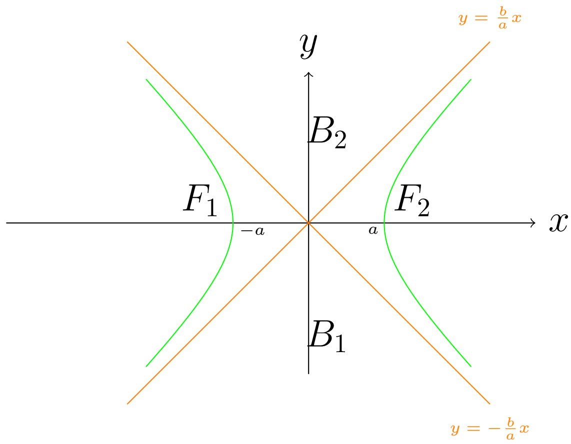
Ehp.3.2 Algumas propriedades de uma hipérbole

Proposição Ehp.3.3. *A hipérbole é uma curva simétrica em relação à reta focal F_1F_2 e em relação à reta mediatriz do segmento focal F_1F_2.*

Observação. Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que o desenho da hipérbole com focos no eixo Ox é como o apresentado: a hipérbole é a união dos gráficos das funções:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$

Estudando o domínio, crescimento, concavidade e assíntotas, obtemos:



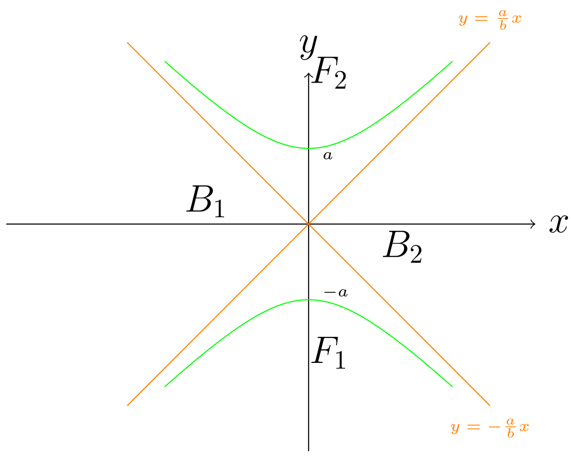
- As retas:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

são as **assíntotas** da hipérbole.

Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

Analogamente, para a hipérbole com focos no eixo Oy: $\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1\right)$



- As retas:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

são as assíntotas da hipérbole.

Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

Proposição Ehp.3.4. *Uma equação da forma*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \qquad \text{(Ehp.3.4)}$$

descreve uma hipérbole em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ *se, e somente se,* $pq < 0$.

Corolário. *Sejam* p *e* q *são números reais tais que* $pq < 0$.

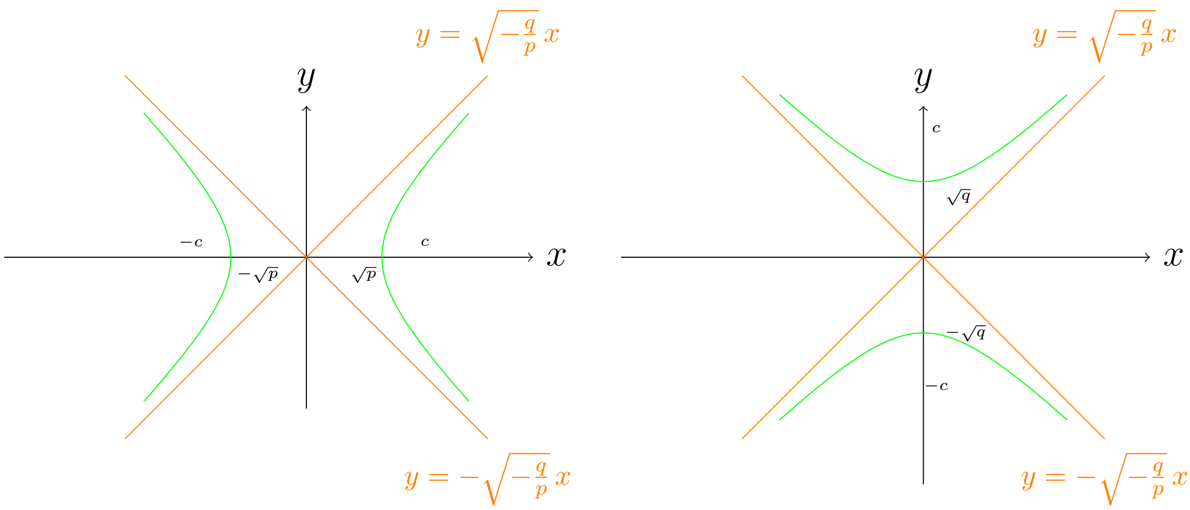
A Equação (Ehp.3.4) *representa:*

1. *uma hipérbole com centro* O *e focos em* Ox *quando* $p > 0$ *e* $q < 0$;

   (neste caso $a = \sqrt{p}$ *e* $b = \sqrt{-q}$*)*

2. *uma hipérbole com centro* O *e focos em* Oy *quando* $p < 0$ *e* $q > 0$.

   (neste caso $a = \sqrt{q}$ *e* $b = \sqrt{-p}$*)*



Exemplo Ehp.3.5. Ver Exercício 82 em Slide de Exercícios.

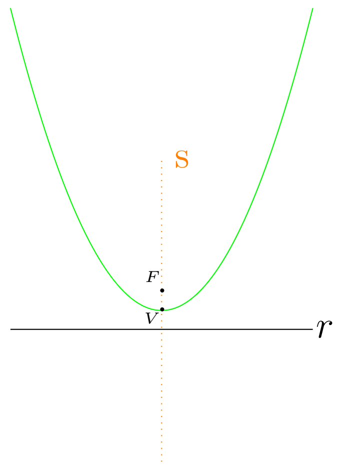
Ehp.4 Parábola

Definição Ehp.4.1. Sejam r uma reta de π e F um ponto de π, $F \notin r$.

Uma **parábola** é o lugar geométrico dos pontos X de π que são equidistantes de F e de r, i.e.,

$$d(X, F) = d(X, r). \qquad \text{(Ehp.4.1)}$$

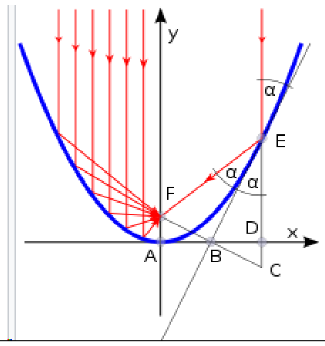
- **foco da parábola**: F;
- **diretriz**: reta r;
- **parâmetro** p: $p > 0$; $2p = d(F, r) > 0$;
- **eixo** (**de simetria**) da parábola: reta s que contém F perpendicular a r;
- **vértice da parábola** V: ponto médio de $\overline{FH}$, onde $H = r \cap s$;
- **corda** da parábola: $\overline{XP}$, para quaisquer pontos $X \neq P$ na parábola.



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

Construção de uma parábola:

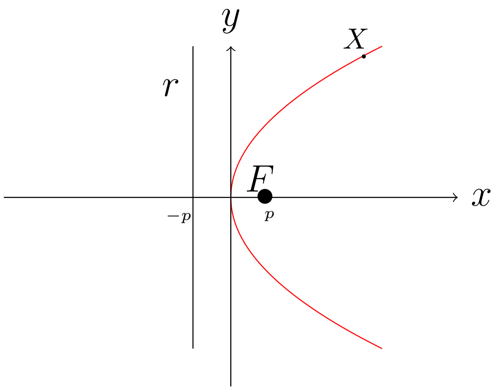
Autoria Atractor: Corda e esquadro
Propriedade refletora: Wikipedia:
"raios paralelos ao eixo de simetria é direcionado para o seu foco"



A cada parábola estão associados um único foco F e uma única diretriz r.

Ehp.4.1 Equação da parábola

Ehp.4.1.1 Com foco no semi-eixo positivo de Ox

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que a origem O coincide com o vértice da parábola e o foco F pertence ao semi-eixo positivo de Ox
- $2p = d(F, r)$
- 

Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

$F = (p, 0), \quad r : x = -p$

$$
\begin{aligned}
X = (x, y) \in \text{Parábola} &\iff d(X, F) = d(X, r) \\
&\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|
\end{aligned}
$$

A **equação reduzida da parábola** de vértice O e foco no semi-eixo positivo Ox é dada por

$$y^2 = 4px, \tag{Ehp.4.2}$$

onde $2p = d(F, r) > 0$.

Ehp.4.1.2 Com foco no semi-eixo positivo de Oy

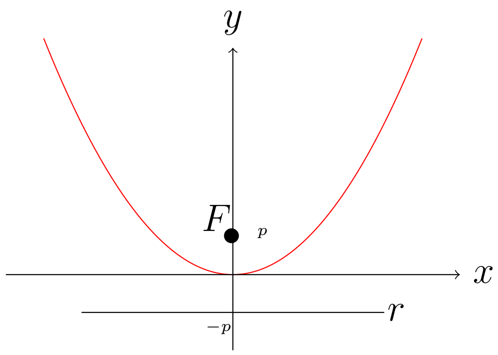
- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que a origem O coincide com o vértice da parábola e o foco F pertence ao semi-eixo positivo de Oy

$$\begin{aligned} X = (x, y) \in \text{Parábola} &\iff d(X, F) = d(X, r) \\ &\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p| \end{aligned}$$

A **equação reduzida da parábola** de vértice O e foco no semi-eixo positivo de Oy é dada por

$$x^2 = 4py, \qquad \text{(Ehp.4.3)}$$

onde $2p = d(F, r) > 0$.



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

Ehp.4.2 Algumas propriedades de uma parábola

Proposição Ehp.4.2. *A parábola*[5] *é uma curva simétrica em relação ao seu eixo (reta que passa pelo foco F e é perpendicular à reta diretriz r).*

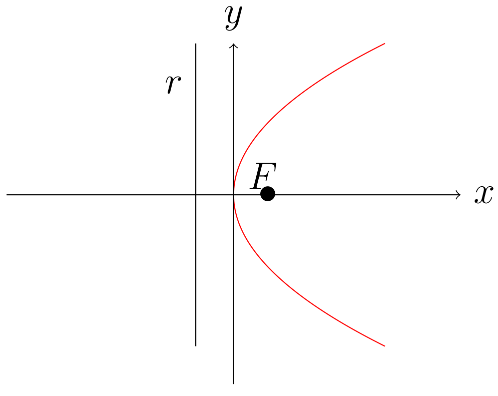
Proposição Ehp.4.3. *As equações da forma*

$$y^2 = qx, \tag{Ehp.4.4}$$
$$x^2 = qy \tag{Ehp.4.5}$$

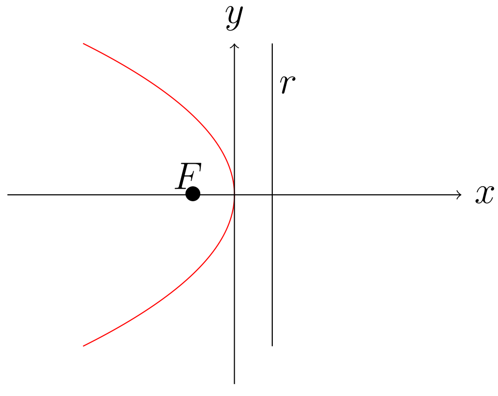
descrevem parábolas em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ se, e somente se, $q \neq 0$.

Corolário. *A Equação (Ehp.4.4): $y^2 = qx$, representa:*

1. *uma parábola com vértice O e foco em Ox positivo quando $q > 0$;*
2. *uma parábola com vértice O e foco em Ox negativo quando $q < 0$;*



$q > 0$: $4p = q, d(F, r) = \frac{q}{2}, r : x = -\frac{q}{4}$



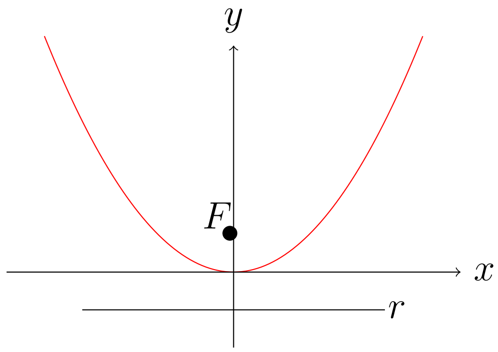
$q < 0$: $4p = -q, d(F, r) = -\frac{q}{2}, r : x = -\frac{q}{4}$

---

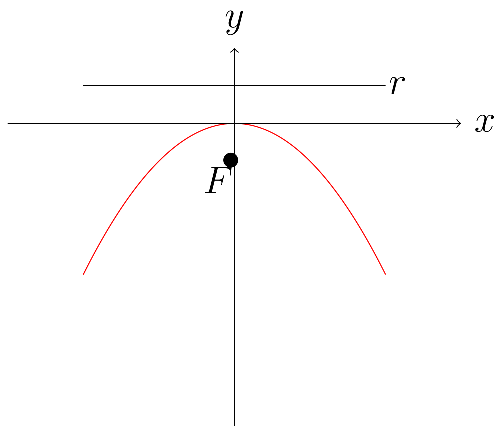
[5]Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que os desenhos das parábolas são de fato como os apresentados. 

Corolário. *A Equação* (Ehp.4.5)*:* $x^2 = qy$*, representa:*

1. *uma parábola com vértice* O *e foco em* Oy *positivo quando* $q > 0$*;*
2. *uma parábola com vértice* O *e foco em* Oy *negativo quando* $q < 0$*;*



$q > 0$: $4p = q, d(F, r) = \frac{q}{2}, r : y = -\frac{q}{4}$



$q < 0$: $4p = -q, d(F, r) = -\frac{q}{2}, r : y = -\frac{q}{4}$

Exemplo Ehp.4.4. Ver Exercício 83 em Slide de Exercícios.

Ehp.5 Seções Cônicas

As elipse, hipérbole e parábola podem ser definidas como interseções de um cone com um plano.

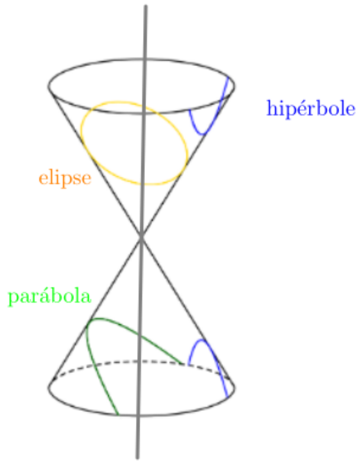


Figura 1: Fonte: Matika

Se C é a superfície cônica de duas folhas (rotação de um reta - geratriz - em torno de um eixo) e V seu vértice:

- **elipse**: intersecção de C com um plano que não contém V, intercepta apenas uma das folhas de C e não é perpendicular ao eixo;
- **hipérbole**: intersecção de C com um plano que não contém V e intercepta as duas das folhas de C;
- **parábola**: intersecção de C com um plano que é paralelo a geratriz;

Tais curvas são conhecidas como **seções cônicas**.

Animação 3D das seções cônicas

Tal abordagem é equivalente ao que foi feito até aqui (provado por Dandelin, 1822, veja P. Boulos, p. 346) e não trataremos desta nova abordagem neste curso.