Conteúdo

Objetivo

Estudar quando dois ou três vetores são ou não linearmente dependentes, relacionando também tal conceito com o aspecto geométrico dos vetores.

D.1 Dependência Linear

D.1.1 Motivação

• Caso dois vetores:

Vimos no Exercício 8 (ver Slide de Exercícios) que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores em V^n ($n = 2$ ou $n = 3$) não nulos e **paralelos**, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, a saber:

- se têm o mesmo sentido: $\lambda = \dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ e portanto
$$\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v} = 0;$$
- se têm sentidos opostos: $\lambda = -\dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ e portanto
$$\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v} = 0;$$

ou seja:

> se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e paralelos, então existem escalares α e β ambos não nulos tais que
> $$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Nota: Se $\vec{u}$ e/ou $\vec{v}$ é o vetor nulo (portanto paralelos), a equação $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = \vec{0}$ também é válida (por exemplo, $\vec{v} = \vec{0}$: $\alpha = 0, \beta = 1$).

Proposição D.1.1. *Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$ são paralelos se, e somente se, existem escalares α, β não ambos nulos tais que*

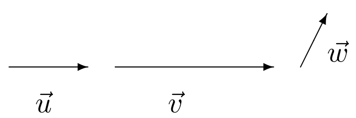
$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}. \tag{D.1.1}$$

Nota:

1. Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$ não são paralelos se, e somente se,
$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$
2. A Equação (D.1.1) diz que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ *dependem* um do outro. Usualmente dois vetores paralelos são ditos *(linearmente) dependentes* e caso contrário *(linearmente) independentes* (ver Definição D.1.5).
3. Se $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, usualmente dizemos que $\vec{x}$ é *combinação linear* de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Exemplo D.1.2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, então $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$.

Exemplo D.1.3. Considere os vetores:



(a) $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$?

(b) $\vec{u}$ é uma combinação linear de $\vec{v}$?

(c) $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$?

(d) $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{v}$?

(e) $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$?

Pergunta: Dados três vetores não nulos em V^n, um deles é sempre combinação linear dos outros dois?

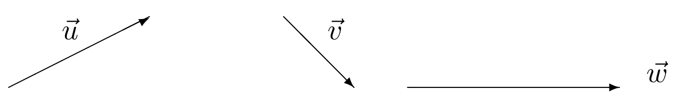


Figura: em V^2 (lembrar Exercício 7 (ver Slide de Exercícios))

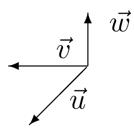


Figura: em V^3

Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

- **Caso três vetores:**

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores não nulos em V^n.

- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{u}, \vec{v}$ **não paralelos**
- A, B, C determinam um único plano $\mathcal{P}$ (Axioma I4)
- $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ para algum ponto D

Temos duas possibilidades:

- **Caso (i):** $D \in \mathcal{P}$

Neste caso dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são **coplanares** (existem representantes dos vetores que são paralelos a um mesmo plano de V^n)

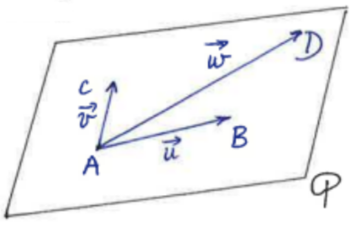


Figura 1: Fonte: Notas de aula Prof. Farid

- **Caso (ii):** $D \notin \mathcal{P}$

Neste caso $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.

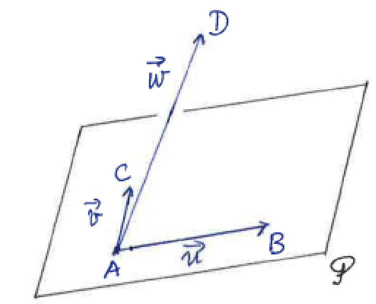


Figura 2: Fonte: Notas de aula Prof. Farid

Vamos estudar o Caso (i): o Caso (ii) será uma consequência do Caso (i).

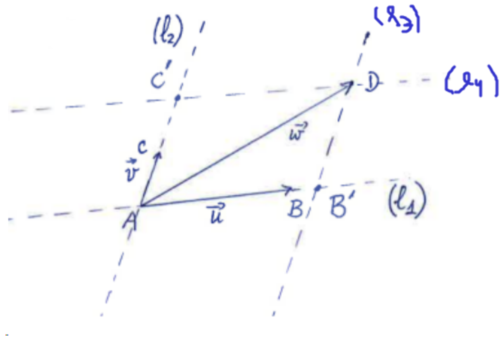


Figura 3: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanares
Fonte: Notas de aula Prof. Farid

- l_1: única reta que contém A e B
- l_2: única reta que contém A e C
- l_3: única reta paralela a l_2 passando por D
- B': $l_1 \cap l_3$
- l_4: única reta paralela a l_1 passando por D
- C': $l_2 \cap l_4$
- $AB'DC'$ é um paralelogramo
- $\exists! \alpha, \beta$ não ambos nulos tais que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
- $$\exists \alpha, \beta, \gamma \text{ não todos nulos tais que } \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0. \qquad (*)$$
- $\vec{u}, \vec{w}$ ou $\vec{v}, \vec{w}$ não são paralelos: mesmo raciocínio.
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ paralelos: (*) também vale! (verifique!)

Proposição D.1.4. *Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$ são coplanares se, e somente se, existem escalares α, β, γ não todos nulos tais que*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}. \qquad \text{(D.1.2)}$$

Nota:

1. Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$ não são coplanares (Caso (ii)) se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. $n = 2$: Três vetores em V^2 sempre são coplanares.

D.1.2 Dependência e independência linear (LD/LI)

Definição D.1.5. Dizemos que um vetor $\vec{v} \in V^n$ é **combinação linear** dos (ou que é **gerado** pelos) vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_k \in V^n$ se

existem escalares α_1, α_2, …, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k.$$

Os escalares α_1, α_2, …, α_k são chamados de **coeficientes** da combinação linear.

Os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_k \in V^n$ são **linearmente dependentes**[1] (**LD**) se

existem escalares α_1, α_2, …, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, …, $\vec{v}_k \in V^n$ são **linearmente independentes** (**LI**) se

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

[1] Ou que o conjunto $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ é LD.

Nota:

1. $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ é LD $\iff \exists \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ não todos nulos; $\alpha\vec{v} + \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$
$\iff$ um dos vetores é combinação linear dos outros.

2. Se um dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ é o vetor nulo, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ são LD.

3. (Proposição D.1.1) Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$ ($n = 2$ ou $n = 3$) são LD se e somente se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

4. (Proposição D.1.4) Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$ ($n = 2$[2] ou $n = 3$[3]) são LD se e somente se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

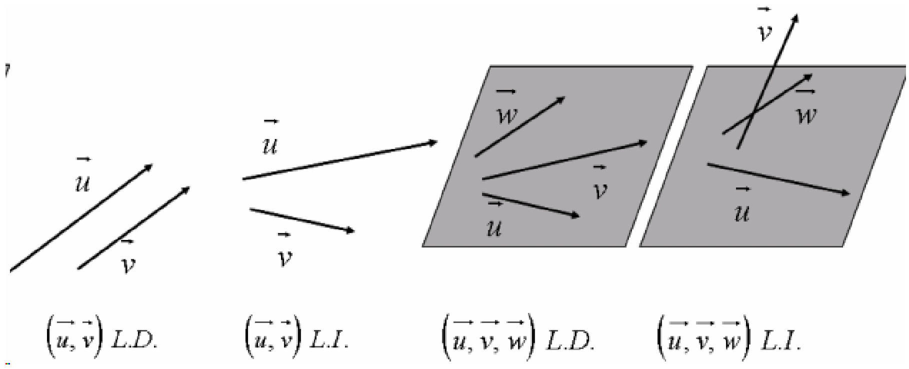


Figura 4: Fonte: internet

Exemplo D.1.6. Ver Exercício 9 em Slide de Exercícios.

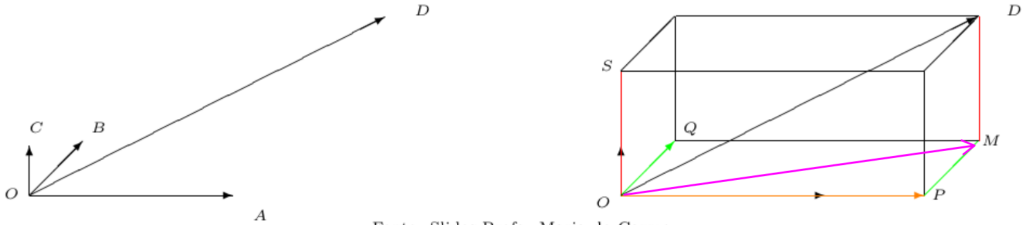
Proposição D.1.7. *Se três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são LI, então quaisquer dois deles são LI.*

Exercício. Verifique que a recíproca da proposição acima não vale! (tarefa!)

[2]Como três vetores em V^2 são sempre coplanares, segue que três vetores em V^2 são sempre LD!
[3]Segue que três vetores em V^3 são LI se e somente se não são coplanares.

Exemplo D.1.8. Ver Exercício 10 em Slide de Exercícios.

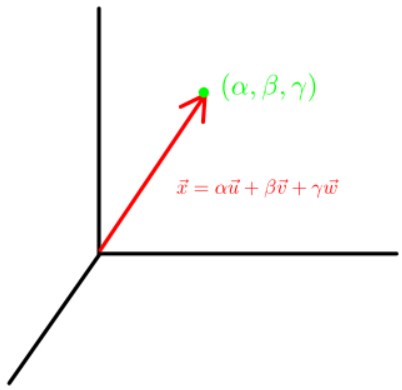
Proposição D.1.9. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são LI, então qualquer vetor $\vec{x} \in V^3$ é combinação linear única de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.*



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Nota: Como a combinação linear na proposição acima é única, podemos identificar o vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ com a tripla (α, β, γ) de números reais.

$$\vec{x} \approx (\alpha, \beta, \gamma); \qquad V^3 \approx \mathbb{R}^3$$



Fortemente recomendado: revisar matrizes e sistemas lineares.

relembre quando um sistema linear tem: solução única (possível determinado), infinitas soluções (possível indeterminado), não tem solução (indeterminado)
