

## Conteúdo

<b>V.1 Introdução</b>	<b>V.1</b>
V.1.1 Geometria Euclideana . . . . .	V.1
V.1.2 Geometria Analítica . . . . .	V.6
<b>V.2 Vetores</b>	<b>V.7</b>
V.2.1 Operações em $V^n$ ( $n = 2, 3$ ) . . . . .	.V.12
V.2.1.1 Adição de vetores . . . . .	.V.12
V.2.1.2 Multiplicação por escalar . . . . .	.V.14

### Objetivo<sup>1</sup>

Apresentar uma definição formal de **vetor** e propriedades pertinentes.

## V.1 Introdução

### V.1.1 Geometria Euclideana

Euclides de Alexandria ( $\sim 330$  a.c.):

- reconhecido como o primeiro a tentar abordar de uma maneira sistemática o estudo da Geometria Plana: escreveu o livro “**Elementos**”;
- assumiu 5 postulados (axiomas) que não são completos.

David Hilbert (1862-1943, [Hilbert’s foundations of geometry](#)):

- apresentou novo conjunto de axiomas para a geometria e organizou em cinco grupos:

- I. Axiomas de incidência (1–7)
- II. Axiomas de ordem (1–5)
- III. Axioma das paralelas (de Euclides)
- IV. Axiomas de congruência (1–6)
- V. Axioma de Continuidade (de Archimedes)

COMO DEFINIR “PONTO”, “RETA” OU “PLANO”?

<sup>1</sup>Os slides são baseados nas Notas de Aula do prof. Farid Tari e no livro Geometria Analítica - Paulo Boulos

A geometria é baseada em:

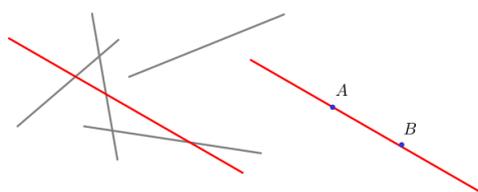
**Conceitos primitivos (ou termos indefinidos):** ponto, reta, plano, pertence a, entre, congruente.

**Axiomas:** um conjunto simples, completo e independente de postulados.

**Termos definidos e afirmações com demonstrações:** definição, lema, proposição, teorema, corolário.

**Exemplo V.1.1.**

**Axioma I1.** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

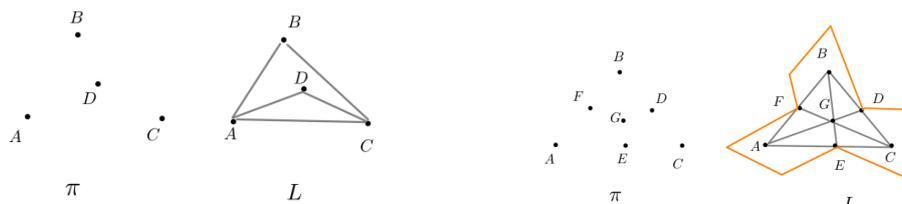


**Proposição.** Duas retas distintas se intersectam em no máximo um ponto.



**Exemplo V.1.2 (Modelos de planos e retas).** O conjunto  $\pi$  com as retas  $L$  satisfazem o Axioma 1:

1.  $\pi = \{A, B, C, D\}$  e  $L = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ .
2.  $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  e  $L = \{AFB, BDC, CEA, AGD, BGE, CGF, DEF\}$ .



Dizemos que um conjunto de pontos é **colinear** (ou os **pontos são colineares**) se existe uma reta que contém o conjunto.

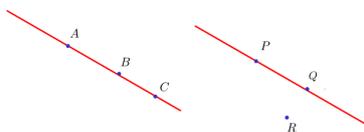


Figura 1:  $A, B, C$  são colineares,  $P, Q, R$  são não colineares

**Exemplo V.1.3.**

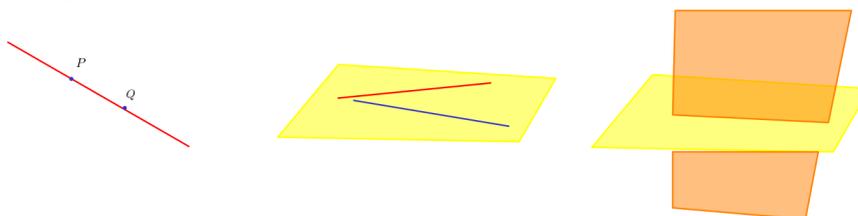
**Axioma I4.** Dados três pontos não colineares, existe um único plano que os contém.



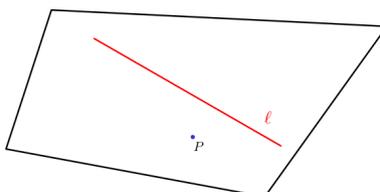
**Axioma I5.** Se dois pontos distintos pertencem a um plano  $\pi$ , então a única reta que os contém pertence a  $\pi$ .



**Axioma I7.** Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos, e em todo plano existem pelo menos duas retas distintas. Existem pelo menos dois planos distintos no espaço.



**Proposição.** *Sejam  $l$  uma reta e  $P$  um ponto que não pertence a  $l$  ( $P \notin l$ ). Então existe um único plano que contém  $P$  e  $l$ .*



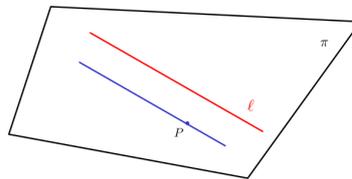
Dizemos que um conjunto de retas é **coplanar** (ou as **retas são coplanares**) se existe um plano que contém o conjunto.



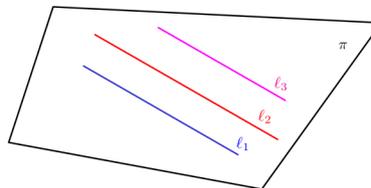
Figura 2: Fonte: internet

### Exemplo V.1.4. (Postulado 5 de Euclides<sup>2</sup>)

**Axioma das paralelas.** Seja  $l$  uma reta,  $P$  um ponto com  $P \notin l$  e  $\pi$  o único plano que os contém. Existe uma única reta em  $\pi$  que contém  $P$  e que é paralela a reta  $l$ .



**Proposição.** Sejam  $l_1, l_2, l_3$  três retas coplanares. Se  $l_1$  é paralela a  $l_2$  e  $l_2$  é paralela a  $l_3$ , então  $l_1$  é paralela a  $l_3$ .



**Nota:** Se o Axioma das paralelas é removido, constrói-se outras Geometrias (não Euclideana), por exemplo<sup>3</sup>:

- GEOMETRIA ESFÉRICA (onde não existem “retas” paralelas),
- GEOMETRIA HIPERBÓLICA (onde “retas” paralelas se interceptam).

<sup>2</sup>Matemáticos tentaram mostrar que este axioma podia ser deduzido a partir dos outros axiomas.

<sup>3</sup>Bolyai e Lobachevsky

**Exemplo V.1.5.**

**Axioma da continuidade**<sup>4</sup>. Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos e  $l$  a única reta que os contém. Existe uma régua sobre  $l$  tal que  $A$  corresponde ao número real 0 e  $B$  ao número 1.

Podemos identificar a reta (infinita)  $l$  com o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ :

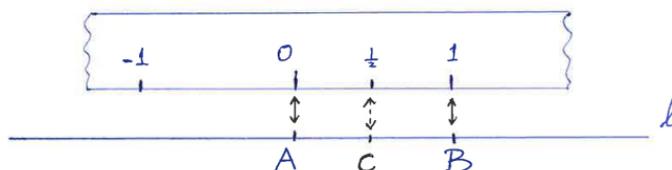


Figura 3: Notas de aula prof. Farid Tari:  $C$  é definido como o **ponto médio** de  $AB$ .  $l \approx \mathbb{R}$ .

Podemos identificar o plano Euclidiano  $\mathcal{G}$  com  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

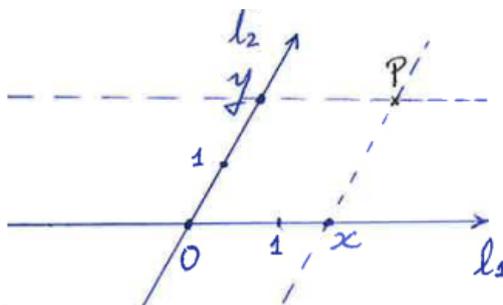


Figura 4: Notas de aula prof. Farid Tari: o ponto  $P$  está unicamente determinado pelo par  $(x, y)$ :  $\mathcal{G} \approx \mathbb{R}^2$

Dizemos que quatro pontos  $A, B, C, D$  formam um **paralelogramo**  $ABDC$  se as retas  $AB$  e  $CD$  são paralelas e as retas  $BD$  e  $AC$  são paralelas.



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

<sup>4</sup>Hilbert mostrou que pode-se construir a Geometria Euclidiana sem usar esse axioma. Mas pode-se mostrar que usando os números reais obtém-se a mesma geometria

## V.1.2 Geometria Analítica

Podemos usar as operações algébricas dos números reais para fazer cálculos sobre objetos geométricos.

Por exemplo, uma reta poderá ser representada por uma equação algébrica: o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem uma relação do tipo

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

A **Geometria Analítica** é o estudo de “objetos”:

*retas, planos, curvas, superfícies,*

ou no plano ou no espaço Euclideano usando a álgebra.

Neste curso vamos estudar:

1. Vetores
2. Retas e planos
3. Cônicas
4. Superfícies quádricas

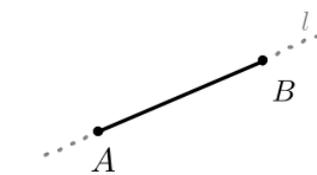
## V.2 Vetores

O **conjunto dos pontos no plano** será denotado por  $E^2$ .

O **conjunto dos pontos no espaço** será denotado por  $E^3$ .

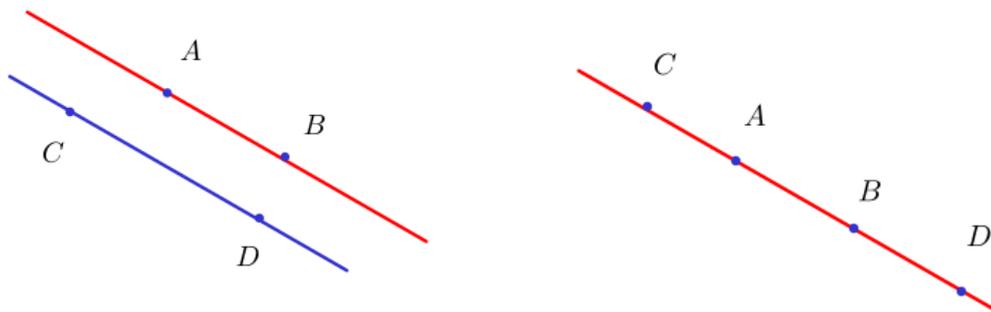
Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos em  $E^n$  ( $n = 2$  ou  $n = 3$ ).

Um **segmento orientado** da reta  $l$  será representado por  $\overline{AB}$ , onde  $A$  é a **origem** e  $B$  a **extremidade**,  $A, B \in l$ .



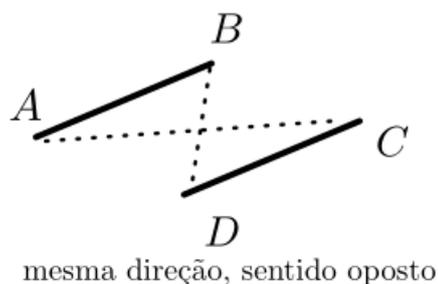
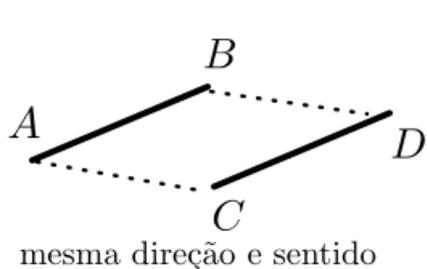
O **comprimento** de um segmento orientado  $\overline{AB}$  é a distância  $d(A, B)$  entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm **mesma direção** se as retas em que estão contidos (chamadas **retas suportes**) são paralelas (coplanares sem intersecção) ou coincidentes ( $A, B, C, D$  são colineares).



Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm a mesma direção e:

- as retas suportes de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são **paralelas**, dizemos que  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm **mesmo sentido** se os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  não se interceptam. Caso contrário os segmentos têm sentidos opostos.



- as retas suportes de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são **coincidentes**, então considere uma reta  $r$  paralela a reta que contém  $A, B, C, D$ , e tome  $A', B'$  pontos distintos em  $r$  tais que  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  têm mesmo sentido. Dizemos que  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm **mesmo sentido** se  $\overline{CD}$  e  $\overline{A'B'}$  têm mesmo sentido.

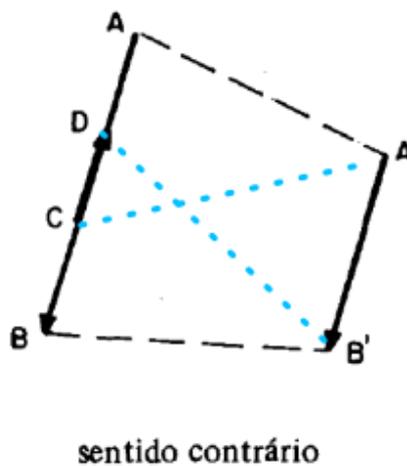
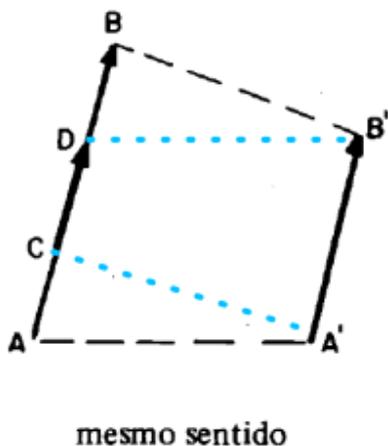


Figura 5: Fonte: Paulo Boulos

No conjunto dos segmentos orientados, defina a **relação de equivalência**<sup>5</sup>:

dois segmentos orientados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são **equivalentes** (ou **equipolentes**), usualmente denotado por  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$  se:

- $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm o mesmo comprimento
- $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm mesma direção
- $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm mesmo sentido
- ou ambos são segmentos nulos, isto é,  $A = B$  e  $C = D$ .

**Definição V.2.1.** O **vetor**  $\vec{AB}$  é o conjunto dos segmentos orientados que são equivalentes ao segmento orientado  $\overline{AB}$ .

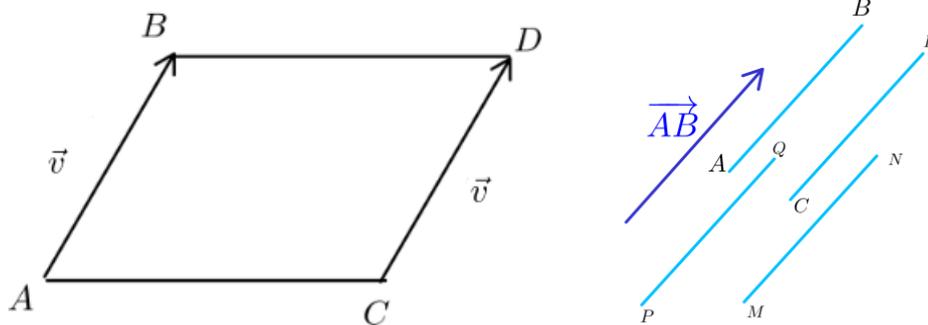
**Nota:**

1. Se  $ABDC$  é um paralelogramo, então

$$\vec{AB} \text{ e } \vec{CD}$$

representam o mesmo vetor  $\vec{v}$ .

Na verdade, existem infinitos segmentos orientados que representam o mesmo vetor, o que motiva a expressão “**um vetor é livre**”.



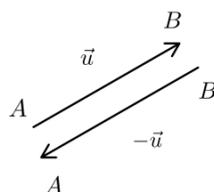
<sup>5</sup>é reflexiva ( $a \sim a$ ), simétrica ( $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ ) e transitiva ( $a \sim b$  e  $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ )

Dado um vetor  $\vec{u}$ :

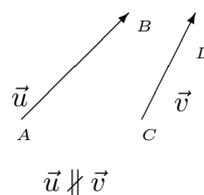
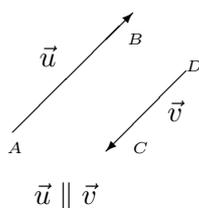
- A **norma** ou o **módulo** ou **comprimento** de  $\vec{u}$  é o comprimento de qualquer um de seus representantes:

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B);$$

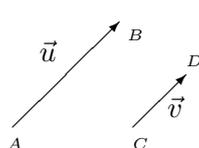
- a **direção** (resp. o **sentido**) de  $\vec{u}$  é a direção (resp. sentido) de qualquer um de seus representantes;
- $-\vec{u}$  é um vetor com mesmo módulo e direção de  $\vec{u}$  e sentido oposto de  $\vec{u}$ ;



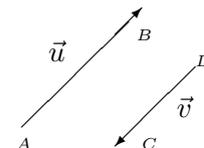
- o **vetor nulo**,  $\vec{0}$ , é o vetor representado por  $\overrightarrow{AA}$  para qualquer ponto  $A$  do espaço<sup>6</sup>.
- Dois vetores não nulos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  são **paralelos** se possuírem representantes com a mesma direção. Notação:  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ .



- Dois vetores não nulos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  paralelos possuem o **mesmo sentido** se possuírem representantes com o mesmo sentido. Caso contrário, dizemos que possuem **sentidos opostos**.



$\vec{u} \parallel \vec{v}$  com mesmo sentido



$\vec{u} \parallel \vec{v}$  com sentidos opostos

<sup>6</sup> $\|\vec{v}\| = 0$  se, e somente se,  $\vec{v} = \vec{0}$ .

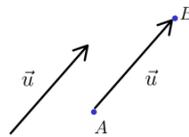
O **conjunto de todos os vetores em um plano** será denotado por  $V^2$ .

O **conjunto de todos os vetores no espaço** será denotado por  $V^3$ .

**Nota:** ( $n = 2$  ou  $n = 3$ )

1. Seja  $\vec{u} \in V^n$  e  $A$  um ponto de  $E^n$ . Então existe um único ponto  $B$  em  $E^n$  tal que

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}.$$



2. O vetor nulo  $\vec{0}$  é paralelo a qualquer outro vetor.

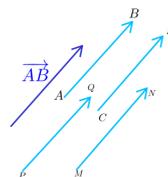
3. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores não nulos. Temos que

$$\vec{u} = \vec{v}$$

se, e somente se,

- $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos,
- $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  possuem o mesmo sentido,
- $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ .

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

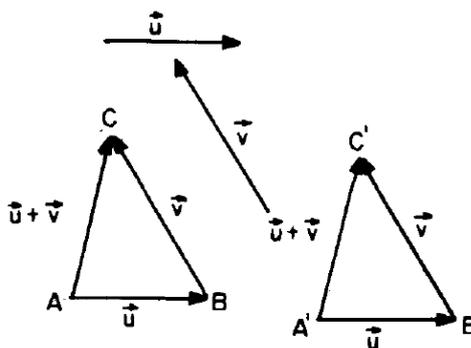


**V.2.1 Operações em  $V^n$  ( $n = 2, 3$ )**

**V.2.1.1 Adição de vetores**

**Definição V.2.2.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores representados, resp., por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . O **vetor soma** denotado por  $\vec{u} + \vec{v}$  é o vetor representado por  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$



Fonte: Boulos **Regra do triângulo**

**Exemplo V.2.3. (Regra do paralelogramo)** Se representamos os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  com a mesma origem:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ e } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \implies \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$

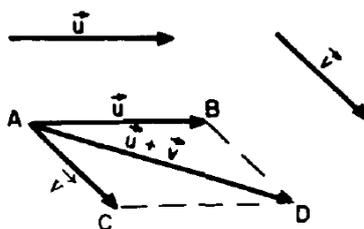
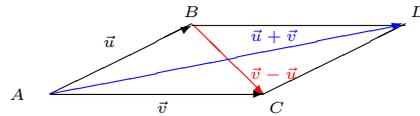


Figura 6: Fonte: Boulos

A **diferença**,  $\vec{v} - \vec{u}$ , é definida por

$$\vec{v} - \vec{u} := \vec{v} + (-\vec{u})$$

**Exemplo V.2.4.** Pela Regra do Paralelogramo,  $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{BC}$ .



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

### Propriedades de adição de vetores

**Teorema.** *Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  vetores em  $V^n$ . Então*

**A1. Associativa:**

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w});$$

**A2. Comutativa:**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};$$

**A3. Elemento Neutro:**

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u};$$

**A4. Elemento Oposto:** *para cada vetor  $\vec{u}$ , existe um vetor  $-\vec{u}$  tal que*

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

A adição de vetores tem as mesmas propriedades de adição de números reais, o que motiva usar o mesmo símbolo “+” para representar esta operação.

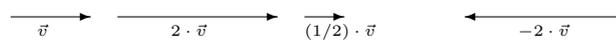
O conjunto  $V^n$  munido da adição “+”, ou seja  $(V^n, +)$ , é um **grupo abeliano (ou comutativo)** (Álgebra).

**Exemplo V.2.5.** Ver Exercício 1 em [Slide de Exercícios](#).

### V.2.1.2 Multiplicação por escalar

**Definição V.2.6.** Sejam  $\alpha$  um número real (um escalar) e  $\vec{u}$  um vetor em  $V^n$ .

1. Se  $\alpha = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$  então  $\alpha\vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} := \vec{0}$ .
2. Se  $\alpha \neq 0$  e  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , o vetor  $\alpha\vec{u}$  caracteriza-se por:
  - (a) (direção)  $\alpha\vec{u}$  é paralelo a  $\vec{u}$
  - (b) (sentido)  $\begin{cases} \text{se } \alpha > 0, \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm mesmo sentido} \\ \text{se } \alpha < 0, \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm sentido oposto;} \end{cases}$
  - (c) (comprimento)  $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$ .



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

**Exemplo V.2.7.** Ver Exercício 2 em [Slide de Exercícios](#).

Usualmente  $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$  é chamado **versor** de  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  de **vetor unitário**.

### Propriedades de multiplicação de vetores por escalar

**Teorema.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  vetores em  $V^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então

**M1. Associativa:**

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u};$$

**M2. Elemento Neutro:**

$$1\vec{u} = \vec{u};$$

**D1. Distributiva:**

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u};$$

**D2. Distributiva:**

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

---

O conjunto  $V^n$  munido da adição “+”, e a multiplicação por escalar “.”, ou seja  $(V^n, +, \cdot)$ , é um exemplo de **espaço vetorial real** (Álgebra Linear).

---

**Corolário.** *Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores em  $V^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então*

1.  $\alpha\vec{u} = \beta\vec{v}$  com  $\alpha \neq 0 \implies \vec{u} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\vec{v}$

2.  $\alpha(-\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$

3.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \implies \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ .

---

**Exemplo V.2.8.** Ver Exercícios 3 a 8 em [Slide de Exercícios](#).

---

OS EXERCÍCIOS 7 E 8 EM [SLIDE DE EXERCÍCIOS](#) NOS INDUZEM A UM NOVO CONCEITO: O DE **DEPENDÊNCIA LINEAR**.

---