Gram-Schmidt, Schwarz e a desigualdade triangular
não serão cobrados.

Levar Caneta azul ou preta e documento físico com foto.
(Você também poderá usar lápis e borracha para suas resoluções na prova).

Lembre que o volume usa o módulo:

Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que o volume do tetraedro determinado pelos vetores $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (2,x,1)$ e $\vec{w} = (0,1,-1)$ seja 1.

Solução: Temos $1 = V_t = \dfrac{1}{6}|\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| \iff |\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}| = 6$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x - 2 + 1 - 2 = x - 3.$$

Logo, $|x-3| = 6 \iff x - 3 = 6$ ou $x - 3 = -6 \iff$ $x = 9$ ou $x = -3$. $\square$

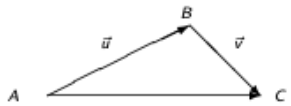
Considere as retas $r\colon X = (0,0,0) + \lambda(1,2,4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e
$s\colon X = (1,0,-2) + \lambda(-1,-1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Encontre as coordenadas do ponto de interseção entre elas.

Soma de dois vetores em V^n

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ dois vetores em V^n. Sejam A, B e C pontos de E^n tais que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC}.$$

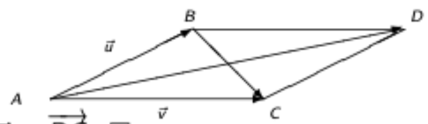


Definição

O vetor $\overrightarrow{AC}$ é chamado a *soma ou adição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$* e é representado por $\vec{u} + \vec{v}$.

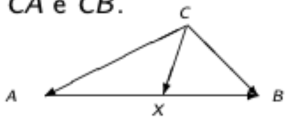
Ou pela regra do paralelogramo:

Suponha que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Seja D tal que $ACDB$ seja um paralelogramo como na figura.



Então $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{BC}$. □

Considere o triângulo ABC como na figura e seja X como na figura. Suponha que $\overrightarrow{AX} = m \cdot \overrightarrow{XB}$, com $m > 0$. Escreva o vetor $\overrightarrow{CX}$ em função dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



Solução: Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{AX} \\ \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{XB} &= \overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

Portanto

$$\overrightarrow{AC} + 2 \cdot \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{CB}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overrightarrow{CX} &= \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{AC} \\ &= (m-1) \cdot \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB} = m \cdot \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XB} = (m+1) \cdot \overrightarrow{XB}.$$

Ou seja,

$$\overrightarrow{XB} = \frac{1}{m+1} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

e obtemos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overrightarrow{CX} &= \frac{m-1}{m+1} \cdot (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \\ &= \left(1 - \frac{m-1}{m+1}\right) \cdot \overrightarrow{CA} + \left(1 + \frac{m-1}{m+1}\right) \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= \frac{2}{m+1} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{2m}{m+1} \cdot \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overrightarrow{CX} = \frac{1}{m+1} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{m}{m+1} \cdot \overrightarrow{CB}. \ \square$$

Serem paralelos é o mesmo que …….. e o mesmo que …….

Fixe uma base $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ de V^3. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)_E$ e $\vec{v} = (m, 2m, 4)_E$ sejam paralelos.

Solução: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se, e somente se, existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} 2 = \lambda m \\ -1 = 2\lambda m \\ 1 = 4\lambda. \end{cases}$

Segue que $\lambda = 1/4$ e temos que $m = 8$ e $m = -2$. Logo, não existe $m \in \mathbb{R}$ que torna os vetores paralelos. $\square$

No espaço como ver se 3 vetores são LD ou LI?

Exercício 1

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3. Considere os seguintes vetores de V^3: $\vec{u} = (1, 2, -1)_E$, $\vec{f}_1 = (1, 1, 1)_E$, $\vec{f}_2 = (m, 2m, -1)_E$ e $\vec{f}_3 = (0, 4, 3)_E$.

(a) Para que valores de m, o conjunto $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3?

(b) Nas condições do item (a), calcule m para que $u = (0, 1, 0)_F$.

Solução: Para mostrar que F é uma base de V^3 basta mostrar que os vetores de F são LI. Para isso utilizamos o Segundo Critério. Devemos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 2m & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6m + 4m + 4 - 3m = 7m + 4.$$

Portanto, $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $7m + 4 \neq 0$ se, e somente se, $m \neq -4/7$.

(b) Devemos encontrar um $m \in \mathbb{R}$ (com $m \neq -4/7$) tal que $u = (0,1,0)_F$.

$$(1,2,-1)_E = \vec{u} = 0\vec{f_1} + 1\vec{f_2} + 0\vec{f_3} = 1(m, 2m, -1)_E = (m, 2m, -1)_E.$$

Logo,

$$\begin{cases} 1 = m \\ 2 = 2m \\ -1 = -1 \end{cases} \Longrightarrow m = 1. \quad \square$$

Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3, $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ e $\vec{f}_3 = 3\vec{e}_3$.

(a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3.

(b) Calcule m para que os vetores $\vec{u} = (0, m, 1)_E$ e $\vec{v} = (0, 1, -2)_F$ sejam LD.

Solução: (a) Notemos que
$\vec{f}_1 = (1, -1, 0)_E, \quad \vec{f}_2 = (0, 1, -1)_E \quad$ e $\quad \vec{f}_3 = (0, 0, 3)_E$. Para mostrar que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3, devemos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Portanto, os vetores de F são LI e isso implica que F é uma base de V^3.

(b) Como $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$, recordemos que

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ LD} \Longleftrightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ paralelos} \Longleftrightarrow \text{ existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{u} = \lambda\vec{v}.$$

Como $\vec{u} = (0, m, 1)_E$ e $\vec{v} = (0, 1, -2)_F$, à primeira vista a resposta parece ser $m = -1/2$.
Mas reflita...
A resposta está errada! Onde está o erro? Antes de prosseguir tente descobrir o problema... Descobriu? Vamos descobrir juntos!
O objetivo é olhar para as coordenadas dos dois vetores e verificar se elas são proporcionais ou não. Para fazer isso, as coordenadas dos dois vetores devem ser em relação **à mesma base**.

Vamos determinar as coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base E.

$$\vec{v} = 0\vec{f_1} + 1 \cdot \vec{f_2} - 2 \cdot \vec{f_3} = 1(\vec{e_2} - \vec{e_3}) - 2(3\vec{e_3}) = \vec{e_2} - 7\vec{e_3}.$$

Logo, $\vec{u} = (0, m, 1)_E$ e $\vec{v} = (0, 1, -7)_E$. Portanto,

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ LD} \iff m = -\frac{1}{7}. \quad \square$$

Exercício:

Seja $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3. Considere os vetores

$$\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v} - (1/3)\vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{b} = -\vec{u} + (1/2)\vec{v}.$$

(a) Para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ a lista de vetores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, onde $\vec{c} = m(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, forma base de V^3?
(b) Escolha um valor para m de modo que $F = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ seja uma base de V^3 e encontre as coordenadas do vetor $\vec{r} = (7, 4, -1)_E$ em relação à base F.

Solução: (a) A lista de vetores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ forma base de V^3 se, e somente se, a lista $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é LI.
As coordenadas do vetor $\vec{c}$ em relação à base E são $(m, m, 1)_E$.
Portanto, a lista $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ é LI se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/3 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ m & m & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1/3 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{6} + 2 = \frac{5}{2} + \frac{m}{2}.$$

Portanto, $\frac{5}{2} + \frac{m}{2} = 0$ se, e somente se, $m = -5$. Logo, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é LI se, e somente se, $m \neq -5$.
(b) Seja $m \neq -5$. Temos que F é uma base de V^3. Logo existem α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Portanto

$$7\vec{u}+4\vec{v}-\vec{w} = \alpha(\vec{u}+2\vec{v}-(1/3)\vec{w})+\beta(-\vec{u}+(1/2)\vec{v})+\gamma(m\vec{u}+m\vec{v}+\vec{w}).$$

Portanto,

$$\begin{cases} \alpha - \beta + m\gamma = 7 \\ 2\alpha + \frac{1}{2}\beta + m\gamma = 4 \\ -\frac{1}{3}\alpha + \gamma = -1. \end{cases}$$

Temos que $\gamma = -1 + \frac{1}{3}\alpha$ e obtemos

$$\begin{cases} \alpha - \beta + m(-1 + \frac{1}{3}\alpha) = 7 \\ 2\alpha + \frac{1}{2}\beta + m(-1 + \frac{1}{3}\alpha) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1 + \frac{m}{3})\alpha - \beta + = 7 + m \\ (2 + \frac{m}{3})\alpha + \frac{1}{2}\beta = 4 + m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\dfrac{m}{3})\alpha - \beta + = 7 + m \\ (4+\dfrac{2m}{3})\alpha + \beta = 8 + 2m \end{cases}$$

Logo

$$(1+\frac{m}{3}+4+\frac{2m}{3})\alpha = 7 + m + 8 + 2m$$

ou

$$(m+5)\alpha = 15 + 3m = 3(5+m).$$

Como $m \neq -5$, segue que $\alpha = 3$ e $\gamma = 0$. Com isso $3 - \beta = 7$ e $\beta = -4$. Portanto, as coordenadas do vetor $\vec{r} = (7, 4, -1)_E$ em relação à base F são $\vec{r} = (3, -4, 0)_F$. $\square$

Descreva os vetores $\vec{x}$ tais que $\vec{x} \cdot (\imath + \jmath - \kappa) = 0$, onde $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ é uma base ortonormal.

Solução: Denote $\vec{x} = (a, b, c)_B$. Note que $\imath + \jmath - \kappa = (1, 1, -1)_B$. Como B é uma base ortonormal temos

$$\vec{x} \cdot (\imath + \jmath - \kappa) = 0 \iff a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot (-1) = 0 \iff c = a + b.$$

Logo, $\vec{x} = (a, b, a + b) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1)$, onde $a,\ b \in \mathbb{R}$. $\square$

Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema ortogonal de coordenadas em E^3. Sejam $A = (2, 2, 1)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (0, 1, 2)$. Encontre as coordenadas do ponto $D = (x, x, x)$, $x \in \mathbb{R}$, de modo o tetraedro $ABCD$ possua volume 5.

Solução: Recordemos que o volume do tetraedro $ABCD$ é dado por

$$\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right|$$

$$A = (2, 2, 1) \text{ e } B = (2, 1, 1) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = (0, -1, 0)$$

$$A = (2, 2, 1) \text{ e } C = (0, 1, 2) \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = (-2, -1, 1)$$

$$A = (2, 2, 1) \text{ e } D = (x, x, x) \Longrightarrow \overrightarrow{AD} = (x-2, x-2, x-1)$$

e

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ x-2 & x-2 & x-1 \end{vmatrix} = -(x-1) - 2(x-1) = -3x + 4.$$

$$\begin{aligned}
5 = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| &\iff 5 = \frac{1}{6}\,|-3x+4| \\
&\iff |-3x+4| = 30 \\
&\iff \begin{cases} -3x+4 = 30 \Longrightarrow x = -\dfrac{26}{3} \\[2ex] -3x+4 = -30 \Longrightarrow x = \dfrac{34}{3}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, há dois pontos:

$$\begin{aligned}
D_1 &= (-26/3, -26/3, -26/3) \\
D_2 &= (34/3, 34/3, 34/3). \quad \square
\end{aligned}$$

Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema ortogonal de coordenadas em E^3. Determine o ponto da reta $r \colon X = (1,0,0) + \lambda(1,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ que distam $\sqrt{2}$ do ponto $A = (1,1,1)$.